

УДК 532.526

ТЕПЛОВОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

ЗАВОЛЬСКИЙ Н. А., РЕУТОВ В. П.

При малых степенях турбулентности набегающего потока в пограничном слое на обтекаемой модели наблюдаются волны Толлмина – Шлихтинга. Вопросу происхождения этих волн, определяющих положение точки перехода от ламинарного течения к турбулентному, посвящено большое число работ (см. обзор [1]). До настоящего времени основное внимание уделялось таким источникам волн Толлмина – Шлихтинга, как вихревые возмущения в набегающем потоке, акустические поля и вибрации обтекаемой модели [2–4]. Роль пускового механизма колебаний может играть также тепловое движение среды [5], однако эффективность данного механизма не выяснялась.

Лабораторные и численные эксперименты показывают, что вихревые возмущения в набегающем потоке преобразуются в волны пограничного слоя в окрестности передней кромки модели [3, 4]. При этом индуцированные волны успевают сильно затухнуть, прежде чем достигнут активной области пограничного слоя [4]. Поскольку тепловое движение способно индуцировать волны непосредственно в активной области пограничного слоя, можно надеяться на его конкурентоспособность с турбулентностью набегающего потока. Кроме того, интерес к тепловому механизму связан с явлением стабилизации точки перехода при уменьшении степени турбулентности набегающего потока, которое обычно связывают с техническими шумами аэродинамических труб [6]. В экспериментах на установке с пониженным уровнем шума [7] стабилизация точки перехода происходила при значительно больших числах Рейнольдса, чем полученные ранее в [8]. При этом одним из возможных источников волн Толлмина – Шлихтинга, определяющих предельное число Рейнольдса, является тепловое движение, которое дает начальные возмущения даже при полном отсутствии внешних воздействий.

В настоящей работе получено выражение для эффективной (приведенной к нейтральной поверхности) интенсивности волн Толлмина – Шлихтинга, индуцированных тепловым движением в пограничном слое с профилем скорости Блазиуса. На этой основе найдена амплитуда квазисинусоидальной волны при числах Рейнольдса, соответствующих стабилизации точки перехода в [7].

1. Уравнения гидродинамики, линеаризованные относительно возмущений первичного течения, в приближении несжимаемой жидкости имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}_0 + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

где $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ – скорость первичного течения, \mathbf{u} и p – возмущения поля скорости и давления, ρ – плотность среды, ν – кинематическая вязкость, \mathbf{f}_i ($i=1, 2, 3$) – вектор сторонних сил. Тепловое движение вызывает пульсации гидродинамического поля, которые можно учесть в уравнениях гидродинамики путем введения сторонних напряжений и потоков тепла. При этом в уравнениях несжимаемой жидкости войдут случайные сторонние силы [9]

$$f_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k}, \quad \langle s_{ik}(t_1, \mathbf{r}_1) s_{lm}(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle = \frac{2T}{\rho} \left[\nu (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}) - \right.$$

$$-\frac{2\nu}{3} \delta_{ik} \delta_{lm} \Big] \delta(t_1 - t_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

Здесь s_{ik} — тензор случайных напряжений, T — температура среды в энергетических единицах.

Используя квазипараллельную модель течения в пограничном слое на пластине, примем $u_0 = U(y/\delta_*)\mathbf{i}$, где U — профиль Блазиуса, $\delta_* = C(\nu x/u_\infty)^{1/2}$ — толщина вытеснения (u_∞ — скорость набегающего потока, $C = 1,7208$ — постоянная Блазиуса). В соответствии с этой моделью в дальнейшем будем пренебрегать производными δ_* по x . Перейдем в (1.1) к фурье-представлению по времени t и координате поперек пластины z , обозначая фурье-образы переменных символом плюс

$$u_i^+ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt dz u_i e^{i\omega t - i\beta z}$$

Полагая $\alpha' = -i\partial/\partial x$ и используя преобразования Сквайра [5], получим краевую задачу для спектра y -компоненты скорости v в виде

$$Lv^+ = -\alpha' \frac{\partial f_1^+}{\partial y} - \beta \frac{\partial f_3^+}{\partial y} + i\alpha_g'^2 f_2^+; \quad (1.2)$$

$$v^+ = \frac{\partial v^+}{\partial y} = 0|_{y=0}, \quad v^+ \rightarrow 0|_{y \rightarrow \infty}.$$

$$L = (\alpha' U - \omega) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha_g'^2 \right) - \alpha' \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + i\nu \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} - 2\alpha_g'^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha_g'^4 \right);$$

$$\alpha_g' = (\alpha'^2 + \beta^2)^{1/2}$$

При $\delta_* = \text{const}$ и в отсутствие источников f_i решение (1.2) имеет вид $v^+ \sim \varphi(\omega, \beta; \eta) \exp(i\alpha x)$, где $\eta = y/\delta_*$; φ и волновое число $\alpha(\omega, \beta; \delta_*)$ — собственная функция и собственное значение краевой задачи Орра — Зоммерфельда

$$\left(u_* - \frac{\omega_N}{\alpha_N} \right) \left(\frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} - \alpha_{gN}^2 \varphi \right) - \frac{d^2 u_*}{d\eta^2} \varphi + \frac{i}{\alpha_N R} \left(\frac{d^4 \varphi}{d\eta^4} - 2\alpha_{gN}^2 \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} + \alpha_{gN}^4 \varphi \right) = 0 \quad (1.3)$$

$$\varphi = \frac{d\varphi}{d\eta} = 0|_{\eta=0}, \quad \varphi \rightarrow 0|_{\eta \rightarrow \infty}$$

где $u_* = U/u_\infty$; $R = u_\infty \delta_*/\nu$ — локальное число Рейнольдса, индекс N означает, что соответствующая размерная переменная нормируется через толщину вытеснения: $\alpha_N = \alpha \delta_*$, $\beta_N = \beta \delta_*$, $\omega_N = \omega \delta_*/u_\infty$, $\alpha_{gN} = (\alpha_N^2 + \beta_N^2)^{1/2}$. Как следует из «апостериорной» оценки (см. (1.7)), длина области возбуждения волны (ω, β) распределенными источниками f_i велика по сравнению с $(\text{Re } \alpha)^{-1}$. Поэтому решение (1.2) будем строить в виде

$$v^+ = a\varphi \exp(i\theta) + v^{(1)}, \quad \theta = \int \text{Re } \alpha dx; \quad \frac{da}{dx} = \gamma a + F^{(1)} \quad (1.4)$$

где $a(\omega, \beta; x)$ — комплексная амплитуда волны, мало меняющаяся при изменении θ на 2π ; $v^{(1)}$ — малая добавка, $\gamma = -\text{Im } \alpha$ — пространственный инкремент волны; $F^{(1)}$ — неизвестная функция, которая находится из условия ограниченности $v^{(1)}$. Используя стандартные процедуры [10–12], получим

$$F^{(1)} = - \int_0^{\infty} \left(\alpha_g'^2 f_2^+ + i\alpha \frac{\partial f_1^+}{\partial y} + i\beta \frac{\partial f_3^+}{\partial y} \right) \chi \exp(-i\theta) dy \left[\int_0^{\infty} \chi \frac{\partial L}{\partial \alpha'} \varphi dy \right]^{-1}$$

где $\chi(\eta)$ — решение сопряженного с (1.3) уравнения, удовлетворяющее крайевым условиям $\chi = d\chi/d\eta = 0$ ($\eta = 0$), $\chi \rightarrow 0$ ($\eta \rightarrow \infty$) [10].

Решая (1.4) с граничными условиями $a = 0$ при $x = x_0$ ($x_0 < x_c$ и выбирается достаточно далеко от нейтральной точки $x_c(\omega, \beta)$ волны (ω, β)), можно построить корреляционную функцию спектра индуцированного поля

$$\langle a(\omega, \beta; x) a^*(\omega', \beta', x) \rangle = (2\pi)^4 I \delta(\omega - \omega') \delta(\beta - \beta') \quad (1.5)$$

$$I(\omega, \beta; R) = K^2(\omega, \beta; R) I_e(\omega, \beta; R), \quad K = \exp \left[\frac{2}{C^2} \int_{R_c}^R \gamma_N dR \right] \quad (\gamma_N = \gamma \delta_*)$$

$$I_e = \int_{R_0}^R G(R) K^{-2} dR; \quad G = \frac{1}{\pi^2 C^2} \frac{T}{\nu \rho} \frac{\alpha_{eN}^2 e}{R^2 |g|^2} \quad (1.6)$$

$$e = \int_0^\infty (\alpha_{eN}^4 |\chi|^2 + 2\alpha_{eN}^2 \left| \frac{d\chi}{d\eta} \right|^2 + \left| \frac{d^2\chi}{d\eta^2} \right|^2) d\eta$$

$$g = \int_0^\infty \chi \left\{ \left(u_s - \frac{4i\alpha_N}{R} \right) \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \left[2\alpha_N \omega_N + \frac{4i\alpha_N}{R} \alpha_{eN}^2 - \frac{d^2 u_s}{d\eta^2} - (3\alpha_N^2 + \beta_N^2) u_s \right] \varphi \right\} d\eta$$

В формулах (1.5), (1.6) интегрирование по x заменено с помощью соотношения [10] $dx = \delta_*(2/C^2) dR$ интегрированием по R . Коэффициент усиления K и функция G вычисляются при фиксированных ω и β . Поведение нормированного инкремента γ_N волны (ω, β) в зависимости от R схематически показано на фигуре. Множитель K^{-2} , стоящий под интегралом в (1.6), имеет пик в окрестности нейтральной точки $R = R_c$. Используя линейную аппроксимацию инкремента $\gamma_N = \mu(R - R_c)$ ($\mu = \partial\gamma_N/\partial R_c$), можно найти полуширину этого пика по формуле $\Delta R = C(2\mu)^{-1/2}$. Грубая оценка коэффициента наклона μ дает

$$\Delta R \sim \frac{C}{\sqrt{2}} \left[\frac{R_m - R_c}{\gamma_{Nm}} \right]^{1/2} \quad (1.7)$$

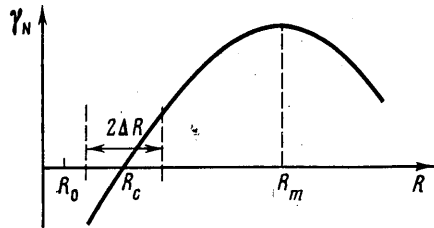
где $\gamma_{Nm} = \gamma_N(R_m)$ — максимальное значение γ_N . Из (1.7) следует, что при большом усилении, когда произведение $\gamma_{Nm}(R_m - R_c)$ велико, ΔR может быть в несколько раз меньше $R_m - R_c$.

При этом возбуждение волны локализуется в относительно небольшой окрестности нейтральной точки с размером ΔR (см. фигуру). Множитель I_e представляет собой эффективную (приведенную к нейтральной поверхности) спектральную интенсивность индуцированного поля. Когда $R - R_c > \Delta R$, $R_c - R_0 > \Delta R$, I_e перестает зависеть от R и R_0 , что позволяет в рамках линейной аппроксимации инкремента расширить пределы интегрирования до бесконечности. Аппроксимировав G в области возбуждения волны линейной функцией, получим

$$I_e = C \left(\frac{\pi}{2\mu} \right)^{1/2} G(R_c) \quad (1.8)$$

Эта формула дает приближенное выражение для I_e через собственные функции и интегралы от них в нейтральной точке.

2. Для расчета интенсивности пульсаций в заданном сечении погранич-



ного слоя необходимо найти частотно-волновую зависимость коэффициента усиления K . Введем безразмерные переменные, не зависящие от δ_* [13]: $\omega_* = \omega_N/R$, $\alpha_* = \alpha_N/R$, $\beta_* = \beta_N/R$. Функция K от ω_* для двумерных волн, построенная в [13], характеризуется при больших R острым максимумом. Предполагая наличие в окрестности $\beta_* = 0$ острого максимума K как функции β_*/α_{*m} и рассматривая энергонесущую часть спектра в заданном сечении R , будем следить за усилением узкого пакета волн: $|\omega_* - \omega_{*m}|/\omega_{*m} \ll 1$, $|\beta_*|/\alpha_{*m} \ll 1$ (ω_{*m} и α_{*m} — частота и волновое число двумерной волны с максимальным усилением). В пределах этого пакета можно принять спектр x -компоненты скорости равным $u^+ = -(1/\alpha) \partial v^+ / \partial y$. Используя нормировку φ вида $\max |\alpha_N^{-1} d\varphi/d\eta| = 1$, получим из (1.4), (1.5) следующее выражение для интенсивности u -пульсаций индуцированного поля в их максимуме на профиле волны

$$\max \langle u^2 \rangle = 2I_m \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\beta K^2 \quad (2.1)$$

где $I_m = I_e$ при $\omega_* = \omega_{*m}$, $\beta_* = 0$. Формула (2.1) написана в предположении, что I_e мало меняется в пределах рассматриваемого пакета.

Коэффициент усиления трехмерных волн будем искать, используя результаты квазипараллельной теории нарастания малых возмущений во времени [5]. Пусть α_N и $\text{Im } \omega_N$ — волновое число и мнимая часть частоты трехмерной волны, найденные как собственные значения краевой задачи (1.3) при заданных R , $\beta_N = \beta_* R$ и $\text{Re } \omega_N = R\omega_*$. Тогда инкремент пространственного нарастания волны с частотой ω_* и с поперечным волновым числом β_* можно найти по формуле [13] $\gamma_N = \text{Im } \omega_N / v_g$, где $v_g = \partial \text{Re } \omega_N / \partial \alpha_N$ — групповая скорость волны. Учитывая узость пакета, представим $\ln K$ в виде

$$\ln K = p_0 + p_1 \varepsilon^2 + p_2 \lambda^2, \quad \varepsilon = \frac{\omega_* - \omega_{*m}}{\omega_{*m}}, \quad \lambda = \frac{\beta_*}{\alpha_{*c}} \quad (2.2)$$

где $p_{0,1,2}(R)$ — коэффициенты, α_{*c} — волновое число двумерной волны с частотой ω_{*m} в нейтральной точке на нижней ветви нейтральной кривой. Численные расчеты показывают, что на линии $\omega_* = \text{const}$ внутри петли нейтральной кривой двумерных волн α_{*c} мало отличается от α_{*m} . Коэффициенты в формуле (2.2) можно найти, построив при заданном R зависимости $\ln K$ от ω_* при $\beta_* = 0$ и $\ln K$ от β_* при $\omega_* = \omega_{*m}$. Используя (1.8), (2.1) и (2.2), получим для среднеквадратичной амплитуды продольной скорости в индуцированной волне выражение вида

$$\frac{\sqrt{\max \langle u^2 \rangle}}{u_\infty} = D(R) \left(\frac{T u_\infty}{v^3 \rho} \right)^{1/2}, \quad D = \frac{K_m}{|g|} \left(\frac{\omega_{*m} \alpha_{*c}^3 e}{C} \right)^{1/2} (2\pi \mu p_1 p_2)^{-1/4} \quad (2.3)$$

где $K_m = \exp p_0$ — максимальный коэффициент усиления в сечении R . Коэффициент D зависит от R в силу изменения K_m , ω_{*m} и ширины пика частотно-волновой зависимости K .

Численные расчеты проводились для сечения $R = 3800$, в котором наблюдался переход к турбулентности в [7]. Уравнение Орра — Зоммерфельда решалось методом Рунге — Кутты с использованием процедуры ортогонализации. Для частоты ω_{*m} и для $\ln K_m$ были получены значения, близкие к найденным в [13]: $\omega_{*m} = 2 \cdot 10^{-5}$, $\ln K_m = p_0 = 11,8$. Двумерная волна с частотой ω_{*m} на нижней ветви нейтральной кривой имеет параметры $R_c = 1785$, $\alpha_{*c} = 7,17 \cdot 10^{-5}$, $v_g = 0,345$; коэффициенты в формулах (2.2) и (2.3) равны $p_1 = -48$, $p_2 = -14$, $D = 0,2$. Полуширина пиков частотной и волновой зависимостей спектра на уровне $1/2$ по интенсивности составляет в параметрах ε и λ соответственно 0,08 и 0,16, что оправдывает приближение узкого пакета. В частности, для пограничного слоя в воздухе при $T = 300$ К и $u_\infty = 15$ м/с получим среднеквадратичную амплитуду $\sqrt{\langle u^2 \rangle} / u_\infty = 7,1 \cdot 10^{-4}$.

Для того чтобы монохроматическая волна вызвала переход к турбулентному течению, ее амплитуда должна превзойти определенный поро-

говый уровень. В экспериментах [14] для перехода в околоскритической области, вызванного волной с $\omega_* = 6 \cdot 10^{-5}$, на границе интервала линейного усиления было получено пороговое значение амплитуды u -пульсаций, равное 1,3% от u_∞ . Эта величина согласуется с теоретической оценкой [10]. Точка $\omega_* = 2 \cdot 10^{-5}$, $R = 3800$ также находится в околоскритической области (лежит вблизи от верхней ветви нейтральной кривой [13]). Если предположить, что пороговое значение для волны с частотой $\omega_* = 2 \cdot 10^{-5}$ близко к измеренному в [14], амплитуда волны, индуцированной тепловым движением в [7], оказывается приблизительно в 20 раз меньше пороговой. Следует, однако, иметь в виду, что в непараллельном течении коэффициент усиления K может в несколько раз превышать найденный из квазипараллельной теории [1] (формально это связано с поправкой к волновому числу при учете непараллельности [11]). В экспериментах [1] отмечалось увеличение коэффициента усиления в 2–2,5 раза. Поэтому полученная выше оценка дает заниженное значение амплитуды индуцированной волны. Интересен также вопрос о принципиальной возможности тепловой стимуляции перехода в пограничном слое. Для ответа на него необходимо вычислить коэффициент усиления с учетом непараллельности течения и найти зависимость порогового уровня от ω_* .

В заключение отметим, что в приближении несжимаемой жидкости не учитывается возбуждение волн Толлмина — Шлихтинга флуктуациями плотности, возникающими под действием случайных потоков тепла [9]. Можно показать, что учет этого процесса дает относительную поправку к найденному выше I_e , которая по порядку величины равна $(T/c_p Pr) \beta_T^2 u_\infty^2$ (c_p — теплоемкость в расчете на единицу массы, Pr — постоянная Прандтля, β_T — коэффициент теплового расширения). Для рассмотренных выше параметров пограничного слоя в воздухе эта поправка составит $3 \cdot 10^{-3}$, что позволяет не учитывать флуктуации плотности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левченко В. Я., Козлов В. В. Возникновение и развитие возмущений в пограничном слое.— В кн.: Модели в мех. сплош. среды. Новосибирск, 1979, с. 5–46.
2. Гиневский А. С., Власов Е. В., Колесников А. В. Аэроакустические взаимодействия. М.: Машиностроение, 1978, 177 с.
3. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Генерация и развитие возмущений малой амплитуды в ламинарном пограничном слое при наличии акустического поля.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1975, вып. 3, № 13, с. 18–26.
4. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я., Максимов В. П. Преобразование внешних возмущений в волны пограничного слоя.— Численные методы в механике сплошной среды, 1978, т. 9, № 2, с. 49–59.
5. Бетхов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971, 350 с.
6. Поляков Н. Ф. Ламинарный пограничный слой в условиях «естественного» перехода к турбулентному течению.— В кн.: Развитие возмущений в пограничном слое. Новосибирск, 1979, с. 23–67.
7. Wells C. S. Effects of freestream turbulence on boundary-layer transition.— AIAA Journal, 1967, v. 5, № 1, p. 172–174.
8. Schubauer G. B., Skramstad H. K. Laminar boundary-layer oscillations and stability of laminar flow.— J. Aeronaut. Sci., 1947, v. 14, № 2, p. 112–121.
9. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. Ч. 2. М.: Наука, 1978, 448 с.
10. Nakaya C. Growth of two-dimensional waves in the boundary layer on a flat plate.— J. Phys. Soc. Japan, 1977, v. 43, № 3, p. 1074–1083.
11. Šaric W. S., Nayfeh A. H. Nonparallel stability of boundary-layer flows.— Phys. Fluids, 1975, v. 18, № 2, p. 945–950.
12. Craik A. D. D. Non-linear resonant instability in boundary layers.— J. Fluid Mech., 1971, v. 50, № 2, p. 393–413.
13. Jaffe N. A., Okamura T. T., Smith A. M. O. Determination of spatial amplification factors and their application to predicting transition.— AIAA Journal, 1970, v. 8, № 2, p. 301–308.
14. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M. The three-dimensional nature of boundary-layer instability.— J. Fluid Mech., 1962, v. 12, № 1, p. 1–34.