МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 · 1983

УДК 532.526

О СВОБОДНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ВНЕШНИМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ТЕЧЕНИЕМ

МАНУЙЛОВИЧ С. В.

Выводятся асимптотические уравнения, описывающие процесс нестационарного свободного взаимодействия трехмерного пограничного слоя с внешним потоком. Порядки независимых переменных и возмущений параметров течения выбираются таким образом, что градиент давления, входящий в уравнения пристеночного слоя, оказывается обусловленным смещением линий тока, расположенных вблизи поверхности тела. Методом Фурье строится решение линеаризованной задачи. Указан класс возмущений, удовлетворяющих однородным граничным условиям на обтекаемой поверхности.

1. Асимптотические уравнения. Нелинейная теория пограничного слоя с самоиндуцированным давлением, развитая в [1, 2] применительно к двумерным стационарным течениям, сжимаемого газа для изучения структуры поля скоростей в окрестности точки отрыва, была затем распространена на случай двумерных нестационарных течений [3, 4]. В работах [5, 6] в рамках теории свободного взаимодействия были получены уравнения, описывающие нестационарные пространственные возмущения двумерного пограничного слоя. В настоящей работе рассматривается случай, когда невозмущенный пограничный слой имеет существенно трехмерный характер.

Будем изучать нестационарные возмущения течения газа в окрестности некоторой точки O обтекаемой поверхности. Относительно основного невозмущенного течения будем предполагать, что оно описывается классической теорией пограничного слоя Прандтля. Введем декартову систему координат $Oxyz$, в которой ось x совпадет по направлению с вектором скорости внешнего основного течения в точке O, а ось y перпендикулярна поверхности обтекаемого тела. Началом отсчета времени будем считать момент $t=0$.

Введем обозначения: v_x, v_y, v_z — составляющие вектора скорости, p — давление, ρ — плотность, w — удельная энтальпия, s — удельная энтропия, λ — первый коэффициент вязкости, k — коэффициент теплопроводности, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, L — характерный размер внешнего невозмущенного течения, $\mathrm{Re}=\rho_\infty U_\infty L/\lambda_\infty$ — число Рейнольдса, $\mathrm{Pr}=c_{p\infty}\lambda_\infty/k_\infty$ — число Прандтля (индексом ∞ здесь помечены параметры внешнего основного течения в точке O). Число Маха $M_\infty=U_\infty(\partial p/\partial\rho)_{s\infty}^{-1/2}$ будем считать отличным от 1, а все величины в дальнейшем — безразмерными, используя в качестве основных единиц ρ_∞, U_∞, L.

Введем малый параметр $\varepsilon=\mathrm{Re}^{-1/8}$ и рассмотрим три основные области течения, различающиеся масштабами по направлению y. Во внешней области I влиянием вязкости и теплопроводности можно пренебречь, течение в ней потенциальное и в первом приближении представляет собой равномерный поток. Введем новые переменные

$$t=\varepsilon^2 t_1,\quad x=\varepsilon^3 x_1,\quad y=\varepsilon^3 y_1,\quad z=\varepsilon^3 z_1$$

и представим искомые функции в виде разложений

$$v_x=1+\varepsilon^2 v_{x1}+\ldots,\quad v_y=\varepsilon^2 v_{y1}+\ldots,\quad v_z=\varepsilon^2 v_{z1}+\ldots \tag{1.1}$$

$$p=p_\infty+\varepsilon^2 p_1+\ldots,\quad \rho=1+\varepsilon^2\rho_1+\ldots$$

Подставляя (1.1) в систему уравнений Навье — Стокса, получим линейную систему уравнений для функций $q_1(t_1, x_1, y_1, z_1)$, $q=v_x$, v_y, v_z, p, ρ, которая сводится к одному уравнению для функции p_1

$$(1-M_\infty^2)\frac{\partial^2 p_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 p_1}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 p_1}{\partial z_1^2}=0 \tag{1.2}$$

Используя условие затухания возмущений вверх по потоку $x_1\to-\infty$ [1, 2], выразим через p_1 остальные искомые функции

$$v_{x1}=-p_1,\quad \rho_1=M_\infty^2 p_1 \tag{1.3}$$

$$v_{y1}=-\int\limits_{-\infty}^{x_1}\frac{\partial}{\partial y_1}p_1(t_1,\xi,y_1,z_1)\,d\xi$$

$$v_{z1}=-\int\limits_{-\infty}^{x_1}\frac{\partial}{\partial z_1}p_1(t_1,\xi,y_1,z_1)\,d\xi$$

Для возмущений параметров течения в области I должно быть также выполнено требование затухания при $y_1\to\infty$.

Внешние разложения (1.1) становятся непригодными в окрестности $y_1=0$, поэтому необходимо рассмотреть область II, занимающую основную толщу пограничного слоя. В этой области введем переменные

$$t_2=t_1,\quad x_2=x_1,\quad y=\varepsilon^4 y_2,\quad z_2=z_1$$

В отличие от [5, 6] будем считать невозмущенный пограничный слой существенно трехмерным. В этом случае предполагаются заданными не только профили продольной скорости $U_{x0}(y_2)$ и плотности $R_0(y_2)$, но также и профиль поперечной скорости $U_{z0}(y_2)$. Разложения параметров течения имеют вид

$$v_x=U_{x0}+\varepsilon v_{x2}+\ldots,\quad v_y=\varepsilon^2 v_{y2}+\ldots,\quad v_z=U_{z0}+\varepsilon v_{z2}+\ldots \tag{1.4}$$

$$p=p_\infty+\varepsilon^2 p_2+\ldots,\quad \rho=R_0+\varepsilon\rho_2+\ldots$$

Функции $q_2(t_2, x_2, y_2, z_2)$ удовлетворяют линейной системе уравнений

$$R_0\frac{\partial v_{x2}}{\partial x_2}+U_{x0}\frac{\partial\rho_2}{\partial x_2}+R_0\frac{\partial v_{y2}}{\partial y_2}+v_{y2}\frac{dR_0}{\partial y_2}+R_0\frac{\partial v_{z2}}{\partial z_2}+U_{z0}\frac{\partial\rho_2}{\partial z_2}=0$$

$$U_{x0}\frac{\partial v_{x2}}{\partial x_2}+v_{y2}\frac{dU_{x0}}{dy_2}+U_{z0}\frac{\partial v_{x2}}{\partial z_2}=0,\quad \frac{\partial p_2}{\partial y_2}=0$$

$$U_{x0}\frac{\partial v_{z2}}{\partial x_2}+v_{y2}\frac{dU_{z0}}{dy_2}+U_{z0}\frac{\partial v_{z2}}{\partial z_2}=0$$

$$U_{x0}\frac{\partial\rho_2}{\partial x_2}+v_{y2}\frac{dR_0}{dy_2}+U_{z0}\frac{\partial\rho_2}{\partial z_2}=0$$

Решение этой системы, стремящееся к 0 при $x_2\to-\infty$, имеет вид

$$v_{x2}=A(t_2,x_2,z_2)\frac{dU_{x0}}{dy_2},\quad v_{y2}=-\frac{\partial A}{\partial x_2}U_{x0}-\frac{\partial A}{\partial z_2}U_{z0} \tag{1.5}$$

$$v_{z2}=A\frac{dU_{z0}}{dy_2},\quad p_2=p_2(t_2,x_2,z_2),\quad \rho_2=A\frac{dR_0}{dy_2}$$

Произвольная функция A удовлетворяет условию $A \to 0$ при $x_2 \to -\infty$. Решение (1.5) описывает смещение линий тока невозмущенного пограничного слоя, отвечающее замене y_2 на $y_2+\varepsilon A$.

Анализ разложений (1.4) для функций v_x и v_z показывает, что они перестают быть справедливыми вблизи $y_2=0$ (главные члены стремятся к 0 при $y_2 \to 0$). Рассмотрим пристеночную область III с характерными переменными

$$t_3=t_1,\ x_3=x_1,\ y=\varepsilon^5 y_3,\ z_3=z_1$$

Параметры течения в этой области представим в виде разложений

$$\begin{gathered} v_x=\varepsilon v_{x3}+\ldots,\ v_y=\varepsilon^3 v_{y3}+\ldots,\ v_z=\varepsilon v_{z3}+\ldots \\ p=p_\infty+\varepsilon^2 p_3+\ldots,\quad \rho=\rho_3+\ldots \end{gathered} \tag{1.6}$$

Подстановка (1.6) в систему уравнений Навье — Стокса приводит к нелинейной системе уравнений пространственного пограничного слоя с самоиндуцированным давлением для функций $q_3(t_3, x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{gathered} \frac{\partial \rho_3}{\partial t_3}+\frac{\partial(\rho_3 v_{x3})}{\partial x_3}+\frac{\partial(\rho_3 v_{y3})}{\partial y_3}+\frac{\partial(\rho_3 v_{z3})}{\partial z_3}=0,\quad \frac{\partial p_3}{\partial y_3}=0 \\ \rho_3\left(\frac{\partial v_{x3}}{\partial t_3}+v_{x3}\frac{\partial v_{x3}}{\partial x_3}+v_{y3}\frac{\partial v_{x3}}{\partial y_3}+v_{z3}\frac{\partial v_{x3}}{\partial z_3}\right)+\frac{\partial p_3}{\partial x_3}=\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\lambda_3\frac{\partial v_{x3}}{\partial y_3}\right) \\ \rho_3\left(\frac{\partial v_{z3}}{\partial t_3}+v_{x3}\frac{\partial v_{z3}}{\partial x_3}+v_{y3}\frac{\partial v_{z3}}{\partial y_3}+v_{z3}\frac{\partial v_{z3}}{\partial z_3}\right)+\frac{\partial p_3}{\partial z_3}=\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\lambda_3\frac{\partial v_{z3}}{\partial y_3}\right) \\ \frac{\partial \rho_3}{\partial t_3}+v_{x3}\frac{\partial \rho_3}{\partial x_3}+v_{y3}\frac{\partial \rho_3}{\partial y_3}+v_{z3}\frac{\partial \rho_3}{\partial z_3}=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\varphi_3\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\chi_3\frac{\partial \rho_3}{\partial y_3}\right) \\ \lambda_3(\rho_3)=\varepsilon^{-8}\lambda(p_\infty,\rho_3),\quad \varphi_3(\rho_3)=\left[\rho_3\frac{dw(p_\infty,\rho_3)}{d\rho_3}\right]^{-1} \\ \chi_3(\rho_3)=\mathrm{Pr}\,\varepsilon^{-8}\frac{k(p_\infty,\rho_3)}{c_p(p_\infty,\rho_3)}\frac{dw(p_\infty,\rho_3)}{d\rho_3} \end{gathered} \tag{1.7}$$

Произведем сращивание асимптотических разложений (1.1), (1.4), (1.6). Для этого воспользуемся следующими свойствами функций U_{x0}, U_{z0}, R_0: $U_{x0} \to 1$, $U_{z0} \to 0$, $R_0 \to 1$ при $y_2 \to \infty$; $U_{x0}(0)=U_{z0}(0)=0$, $R_0(0)=\rho_0$; производные $\tau_x=dU_{x0}/dy_2$ и $\tau_z=dU_{z0}/dy_2$ конечны при $y_2=0$. Сращивание разложений в областях II и III дает предельные соотношения для искомых функций пристеночного слоя при $y_3 \to \infty$

$$v_{x3} \to \tau_x(y_3+A),\quad v_{z3} \to \tau_z(y_3+A),\quad \rho_3 \to \rho_0 \tag{1.8}$$

Сращивание решений в областях I и II позволяет связать функции p_3 и A с возмущениями внешнего течения

$$p_3=p_1(t_3, x_3, 0, z_3),\quad \frac{\partial A}{\partial x_3}=-v_{y1}(t_3, x_3, 0, z_3) \tag{1.9}$$

При $x_3 \to -\infty$ решение системы (1.7) должно переходить в решение, соответствующее невозмущенному пограничному слою Прандтля. Кроме того, течение в пристеночном слое должно удовлетворять обычным условиям, задаваемым на обтекаемой поверхности (например, условию прилипания и т. п.).

2. Линейное приближение. Рассмотрим случай, когда возмущения основного течения оказываются малыми не только в областях I и II, но также и в области III вплоть до обтекаемой поверхности. При изучении линеаризованной задачи о свободном взаимодействии удобно пользоваться числами Рейнольдса $\mathrm{Re}'=\mathrm{Re}\,\rho_0/\lambda_3(\rho_0)$ и Прандтля $\mathrm{Pr}'=\mathrm{Pr}\,\lambda_3(\rho_0)/$

$/\varphi_3(\rho_0)\chi_3(\rho_0)\rho_0$. Везде в дальнейшем будем предполагать, что параметр ε вычисляется по числу Re'.

Итак, будем считать, что пристеночный слой является слабо возмущенным классическим погранслоем

$$v_{x3}=\tau_x(y_3+v_x'),\ v_{y3}=v_y',\ v_{z3}=\tau_z(y_3+v_z')$$
$$p_3=p',\ \rho_3=\rho_0(1+\rho') \tag{2.1}$$

Решение системы (1.7), линеаризованной по возмущениям $q'\ll 1$, удобно искать с помощью преобразования Фурье

$$q^*(\omega,k_x,k_z,y_3)=\int q'(t_3,x_3,y_3,z_3)\exp(-\omega t_3-k_x x_3-k_z z_3)\,dt_3\,dx_3\,dz_3$$

где интеграл берется по всему пространству переменных t_3, x_3, z_3. С помощью этого преобразования задача сводится к решению линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций q^*

$$(\omega+y_3K)\rho^*+\tau_x k_x v_x^*+\frac{dv_y^*}{dy_3}+\tau_z k_z v_z^*=0$$
$$(\omega+y_3K)v_x^*+v_y^*+\frac{k_x}{\rho_0\tau_x}p^*=\frac{d^2v_x^*}{dy_3^2}+\Lambda\frac{d\rho^*}{dy_3} \tag{2.2}$$
$$(\omega+y_3K)v_z^*+v_y^*+\frac{k_z}{\rho_0\tau_z}p^*=\frac{d^2v_z^*}{dy_3^2}+\Lambda\frac{d\rho^*}{dy^3}$$
$$(\omega+y_3K)\rho^*=\frac{1}{\mathrm{Pr}'}\frac{d^2\rho^*}{dy_3^2},\quad K=\tau_x k_x+\tau_z k_z,\quad \Lambda=\frac{\rho_0}{\lambda_3(\rho_0)}\frac{d\lambda_3}{d\rho_3}(\rho_0)$$

Решение системы (2.2) кроме асимптотических условий при $y_3\to\infty$ должно удовлетворять граничным условиям на обтекаемой поверхности $q^*(\omega,k_x,k_z,0)=q_W{}^*$, где $q=v_x$, v_y, v_z, ρ.

Перейдем к интегрированию системы (2.2). Уравнение для функции плотности ρ^* отделяется от остальных уравнений системы и заменой переменного $Z=\omega K^{-2/3}+y_3K^{1/3}$ приводится к виду

$$\frac{d^2\rho^*}{dZ^2}-\mathrm{Pr}'Z\rho^*=0$$

Его решение, удовлетворяющее условию $\rho^*=\rho_W{}^*$ при $y_3=0$ $(Z=Z_0=\omega K^{-2/3})$, а также условию затухания при $y_3\to\infty$ $(|Z|\to\infty)$, дается формулой

$$\rho^*=c_0\,\mathrm{Ai}(\mathrm{Pr}'^{1/3}Z),\ c_0=\rho_W{}^*/\mathrm{Ai}(\mathrm{Pr}'^{1/3}Z_0) \tag{2.3}$$

где $\mathrm{Ai}(\xi)$ — функция Эйри [7].

Для интегрирования остальных уравнений системы (2.2) введем новые неизвестные функции $U=\tau_x k_x v_x^*+\tau_z k_z v_z^*$ и $V=v_x^*-v_z^*$. Продифференцируем сумму второго и третьего уравнений (2.2), умноженных на $\tau_x k_x$ и $\tau_z k_z$ соответственно, и вычтем из полученного равенства первое уравнение системы. В результате получим уравнение третьего порядка для функции U

$$\frac{d^3U}{dZ^3}-Z\frac{dU}{dZ}=-K^{2/3}(1+\Lambda\,\mathrm{Pr}')Z\rho^*$$

Это уравнение является неоднородным уравнением Эйри для производной функции U. В случае $\mathrm{Pr}'\neq 1$ ограниченное при $|Z|\to\infty$ решение имеет вид

$$\frac{dU}{dZ}=c_1\,\mathrm{Ai}(Z)+K^{2/3}\frac{1+\Lambda\,\mathrm{Pr}'}{1-\mathrm{Pr}'}\rho^* \tag{2.4}$$

Используя второе и третье уравнения системы (2.2), записанные в точке $y_3=0$, получим значение d^2U/dZ^2 при $Z=Z_0$ и с учетом этого выразим постоянную c_1 через неизвестную пока величину p^*

$$c_1=\left[Z_0\tau_x k_x v_{xw}{}^*+K^{1/3}v_{yw}{}^*+Z_0\tau_z k_z v_{zw}{}^*-\right.$$

$$\left.-K^{2/3}\frac{1+\Lambda}{1-\mathrm{Pr}'}\frac{dR}{dZ}(Z_0)\rho_w{}^*+\frac{k_x{}^2+k_z{}^2}{\rho_0 K^{2/3}}p^*\right]\Big/\mathrm{Ai}'(Z_0)$$

$$R(\mathrm{Z})=\frac{\rho^*}{\rho_w{}^*},\quad \mathrm{Ai}'(\mathrm{Z})=\frac{d\mathrm{Ai}}{dZ}(\mathrm{Z})$$

Функцию U можно вычислить интегрированием равенства (2.4) с учетом условия $U(Z_0)=\tau_x k_x v_{xw}{}^*+\tau_z k_z v_{zw}{}^*$.

Для того чтобы замкнуть задачу и определить функцию p^*, необходимо использовать асимптотическое условие $U\to A^*K$ при $|Z|\to\infty$, которое следует из (1.8) и (2.1). Применим преобразование Фурье к уравнению (1.2), описывающему течение в области I

$$\frac{d^2p_1{}^*}{dy_1{}^2}+[(1-M_\infty{}^2)k_x{}^2+k_z{}^2]p_1{}^*=0$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию затухания при $y_1\to\infty$ и условию сращивания (1.9), имеет вид

$$p_1{}^*=p^*\exp(k_y y_1),\quad k_y=[(M_\infty{}^2-1)k_x{}^2-k_z{}^2]^{1/2},\quad \mathrm{Real}\,k_y<0$$

В случае $\mathrm{Real}\,k_y=0$ (что возможно при $M_\infty>1$) условие затухания заменяется условием распространения возмущений вниз по течению $\mathrm{sign\,Imag}\,k_y=-\mathrm{sign\,Imag}\,k_x$. Преобразование Фурье, примененное к формулам (1.3), (1.9), дает соотношение $A^*=k_yp^*/k_x{}^2$, откуда следует асимптотическая связь функций U и p^*

$$U\to\frac{k_yK}{k_x{}^2}p^*,\quad |Z|\to\infty \tag{2.5}$$

Условие (2.5) позволяет определить функцию давления

$$p^*=(P_1\tau_x k_x v_{xw}{}^*+P_2K^{1/3}v_{yw}{}^*+P_3\tau_z k_z v_{zw}{}^*+P_4K^{2/3}\rho_w{}^*)/D \tag{2.6}$$

$$P_1=P_3=\mathrm{Ai}'(Z_0)+Z_0I(Z_0),\quad P_2=I(Z_0)$$

$$P_4=\frac{1+\Lambda\,\mathrm{Pr}'}{1-\mathrm{Pr}'}\mathrm{Ai}'(Z_0)\int_{Z_0}^{\infty}R(\mathrm{Z})\,dZ-\frac{1+\Lambda}{1-\mathrm{Pr}'}\frac{dR}{dZ}(Z_0)I(Z_0)$$

$$D=\frac{k_yK}{k_x{}^2}\mathrm{Ai}'(Z_0)-\frac{k_x{}^2+k_z{}^2}{\rho_0K^{2/3}}I(Z_0),\quad I(Z_0)=\int_{Z_0}^{\infty}\mathrm{Ai}(Z)\,dZ$$

Покажем, что функция p^* ограничена при $\mathrm{Pr}'\to1$. Для этого достаточно установить, что ограничена величина P_4 из (2.6), представляющая собой разность величин вида $(1+\Lambda\mathrm{Pr}')f_1(Z_0)/(1-\mathrm{Pr}')$ и $(1+\Lambda)f_2(Z_0)/(1-\mathrm{Pr}')$. Разложим функции f_1 и f_2 в ряд Тейлора по степеням $1-\mathrm{Pr}'$ до линейных членов: $f_1=f_0+(1-\mathrm{Pr}')f_{01}+\ldots$, $f_2=f_0+(1-\mathrm{Pr}')f_{02}+\ldots$. Поскольку эти разложения имеют одинаковые главные члены ($f_1=f_2$ при $\mathrm{Pr}'=1$), то разложение для P_4 начинается с постоянной $P_4=\Lambda(f_{01}-f_{02}-f_0)+\ldots$ и, следовательно, величина P_4 ограничена.

Остается вычислить функции V и $v_y{}^*$. Функция V удовлетворяет неоднородному уравнению Эйри

$$\frac{d^2V}{dZ^2}-ZV=\frac{1}{\rho_0K^{2/3}}\left(\frac{k_x}{\tau_x}-\frac{k_z}{\tau_z}\right)p^* \tag{2.7}$$

которое получается в результате вычитания третьего уравнения (2.2) из второго. Решение уравнения (2.7), удовлетворяющее условиям $V(Z_0)=$ $=v_{xw}{}^*-v_{zw}{}^*$ и $V\to 0$ при $|Z|\to\infty$, может быть получено методом вариации постоянных. Уравнение для функции $v_y{}^*$

$$\frac{dv_y{}^*}{dZ}=-K^{1/3}Z\rho^*-K^{-1/3}U$$

решается однократным интегрированием с использованием условия $v_y{}^*(Z_0)=v_{yw}{}^*$.

Окончательное решение исходной линейной задачи находится с помощью обратного преобразования

$$q'(t_3,x_3,y_3,z_3)=(2\pi i)^{-3}\int q^*(\omega,k_x,k_z,y_3)\exp(\omega t_3+k_xx_3+k_zz_3)\,d\omega\,dk_x\,dk_z$$

где интегрирование ведется по всему пространству чисто мнимых переменных ω, k_x, k_z. В случае функций $q_W{}^*$ произвольного вида обращение преобразования Фурье представляет собой сложную задачу, обычно решаемую численными методами [8, 9]. Эта задача сильно упрощается, если функции $q_W{}'(t_3, x_3, z_3)$ являются периодическими с периодами T, L_x, L_z по переменным t_3, x_3 и z_3 соответственно.

Итак, пусть функции $q_W{}'$ допускают представление рядами Фурье

$$q_W{}'=\sum q_{Wnml}\exp\left(\frac{2\pi in}{T}t_3+\frac{2\pi im}{L_x}x_3+\frac{2\pi il}{L_z}z_3\right)$$

где суммирование ведется по индексам n, m, $l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Соответствующие обобщенные фурье-образы даются формулами

$$q_W{}^*=(2\pi i)^3\sum q_{Wnml}\delta\left(\omega-\frac{2\pi in}{T}, k_x-\frac{2\pi im}{L_x}, k_z-\frac{2\pi il}{L_z}\right)$$

где δ — дельта-функция Дирака, и решение линейной задачи о свободном взаимодействии имеет вид тригонометрических рядов по переменным t_3, x_3, z_3

$$q'=\sum q^*\exp\left(\frac{2\pi in}{T}t_3+\frac{2\pi im}{L_x}x_3+\frac{2\pi il}{L_z}z_3\right)$$

Здесь использованы выражения для фурье-образов $q^*(\omega, k_x, k_z, y_3)$, в которых произведены замены $q_W{}^*$ на q_{Wnml} и подстановки $\omega=2\pi in/T$, $k_x=2\pi im/L_x$, $k_z=2\pi il/L_z$. Отметим, что здесь не рассматриваются резонансные значения T, L_x, L_z, когда вышеуказанные подстановки обращают в 0 величину D из (2.6) или знаменатель в выражении для постоянной c_0 (2.3).

Полученное выше решение является корректным несмотря на то, что периодические возмущения не удовлетворяют условию затухания при $x_3\to-\infty$. Действительно, формулы (1.3) и (1.5) могут описывать периодические решения задачи в областях I и II (последние два соотношения (1.3) должны быть переписаны в дифференциальной форме), поэтому постановка задачи и условия сращивания сохраняют свой прежний вид. Для обеспечения единственности решения можно сохранить требование затухания при $x_3\to-\infty$ и предположить, что граничные условия $q_W{}'$ являются периодическими функциями лишь для $x_0<x_3<\infty$. Тогда построенное ранее периодическое решение будет приближенно описывать течение в области $x_3-x_0\gg 1$.

В заключение рассмотрим вопрос о свободных возмущениях пространственного пограничного слоя. В этом случае решение линеаризованной системы удовлетворяет однородным граничным условиям $q_W{}'=0$. Если в рассматриваемом приближении обтекаемая поверхность теплоизолирована, уравнение для определения функции p^* (2.6) принимает вид $D(\omega, k_x, k_z)p^*=0$. В обобщенном смысле это уравнение имеет решения вида

$$p^*=(2\pi i)^3 a_p \delta(\omega-\omega', k_x-k_x', k_z-k_z') \tag{2.8}$$

где a_p — малая комплексная постоянная, а комплексные числа ω', k_x', k_z' удовлетворяют дисперсионному соотношению

$$\frac{\mathrm{Ai}'(Z_0')}{I(Z_0')}=\frac{k_x'^2(k_x'^2+k_z'^2)}{\rho_0 k_y' K'^{5/3}} \tag{2.9}$$

которое по форме аналогично соотношению, изученному в [10], и является его обобщением на случай $\tau_z\neq0$. Соотношение (2.9) представляет собой комплексное уравнение $\Phi(Z_0')=Q$, решение которого $Z_0'=\Phi^{-1}(Q)$ было изучено в работе [4]. Это решение определяет комплексную частоту свободных колебаний ω' как функцию от комплексных волновых чисел k_x' и k_z'

$$\omega'=K'^{2/3}\Phi^{-1}[Q(k_x', k_z')]$$

Формально примененное к (2.8) обратное преобразование Фурье показывает, что у линеаризованной задачи существуют решения вида

$$q'=q^* \exp(\omega' t_3+k_x' x_3+k_z' z_3)$$

где в выражениях для фурье-образов произведена замена p^* на a_p и подставлены значения $q_W{}^*=0$, $\omega=\omega'$, $k_x=k_x'$, $k_z=k_z'$. При этом, в частности, оказывается, что $\rho'\equiv0$, т. е. в рассматриваемом приближении потоки тепла от обтекаемой поверхности действительно отсутствуют.

Если отказаться от требования теплоизолированности поверхности, можно расширить класс свободных возмущений. В самом деле, уравнение для определения постоянной c_0 (2.3) $\mathrm{Ai}(\mathrm{Pr}'^{1/3} Z_0)c_0=0$ имеет обобщенные решения

$$c_0=(2\pi i)^3 a_\rho \delta(\omega-\omega'', k_x-k_x'', k_z-k_z'')$$

где a_ρ — малое комплексное число, а величины ω'', k_x'', k_z'' удовлетворяют соотношению

$$\omega''=K''^{2/3}\mathrm{Pr}'^{-1/3} Z_n.$$

Здесь Z_n — корни функции Эйри, лежащие на отрицательной части действительной оси [7]. Применение обратного преобразования Фурье дает следующие решения линеаризованной системы (1.7):

$$q'=q^* \exp(\omega'' t_3+k_x'' x_3+k_z'' z_3)$$

В этих формулах в выражениях для q^* произведена замена c_0 (2.3) на a_ρ и подставлены значения $\omega=\omega''$, $k_x=k_x''$, $k_z=k_z''$, $q_W{}^*=0$, где $q=v_x$, v_y, v_z. Хотя построенное решение удовлетворяет условию $\rho_W'=0$, тем не менее в отличие от предыдущего случая $d\rho'/dy_3\neq0$ при $y_3=0$, поэтому обтекаемая поверхность не является теплоизолированной.

Автор благодарит О. С. Рыжова и Е. Д. Терентьева за полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нейланд В. Я.* Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений.– Тр. ЦАГИ, 1974, вып. 1529. 125 с.
2. *Stewartson K.* Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies.– In: Advances in Appl. Mech. v. 14. N. Y.– San Francisco – L.: Acad. Press, 1974, p. 145–239.
3. *Schneider W.* Upstream propagation of unsteady disturbances in supersonic boundary layers.– J. Fluid Mech., 1974, v. 63, pt 3, p. 465–485.
4. *Рыжов О. С., Терентьев Е. Д.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением.– ПММ, 1977, т. 41, вып. 6, с. 1007–1023.
5. *Рыжов О. С.* О нестационарном пространственном пограничном слое, свободно взаимодействующем с внешним потоком.– ПММ, 1980, т. 44, вып. 6, с. 1035–1052.
6. *Липатов И. И.* К теории нестационарного пространственного свободного взаимодействия.– Уч. зап. ЦАГИ, 1981, т. 12, № 6, с. 34–41.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Ред. Абрамовиц М. и Стиган И. М.: Наука, 1979. 832 с.
8. *Терентьев Е. Д.* Расчет давления в линейной задаче о вибраторе в сверхзвуковом пограничном слое.– ПММ, 1979, т. 43, вып. 6, с. 1014–1028.
9. *Smith F. T., Sykes R. I., Brighton P. W. M.* A two-dimensional boundary layer encountering a three-dimensional hump.– J. Fluid Mech., 1977, v. 83, pt 1, p. 163–176.
10. *Жук В. И., Рыжов О. С.* Об устойчивости свободно взаимодействующего пограничного слоя.– ПММ, 1981, т. 45, вып. 3, с. 552–563.

Москва

Поступила в редакцию 2.VI.1982