

УДК 532.516

## ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СТАЦИОНАРНЫХ БЕГУЩИХ ВОЛНАХ В СЛОЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

ДЕМЕХИН Е. А.

Бегущие волны в стекающем слое вязкой жидкости при малых и умеренных числах Рейнольдса описываются обыкновенным дифференциальным уравнением относительно толщины слоя [1, 2]. Это уравнение при стремлении числа Рейнольдса к нулю переходит в уравнение 3-го порядка с квадратичной нелинейностью [3]. Периодические решения последнего уравнения, отвечающие от плоскопараллельного, исследовались в [3-6]. В настоящей работе рассматривается ответвление периодических решений от периодических: исследуются значения волнового числа, при котором периодическое решение не единственно; выводится уравнение разветвления, находится число ответвляющихся решений, рассматривается их поведение вблизи точки бифуркации; ответвляющиеся решения численно продолжают по параметру (волновому числу) от окрестностей точек ветвления.

1. В предельном случае при стремлении числа Рейнольдса к нулю бегущие стационарные волны в стекающей пленке жидкости описываются решением нелинейной краевой задачи [3]:

$$s^2 H''' + H' - cH + H^2 = Q \quad (1.1)$$

$$H(0) = H(2\pi), \quad H'(0) = H'(2\pi), \quad H''(0) = H''(2\pi), \quad \int_0^{2\pi} H dx = 0 \quad (1.2)$$

Здесь  $H = H(x)$  — толщина пленки;  $c$  — фазовая скорость;  $Q$  — нелинейное искажение расхода;  $s \in [0, 1]$  — волновое число.

В точках  $s = 1, 1/2, \dots, 1/n, \dots$  от плоскопараллельного течения  $H(x) = 0, Q = 0$  в сторону меньших  $s$  ответвляются соответственно  $2\pi, \pi, 2\pi/3, \dots, 2\pi/n$ -периодические решения:

$$ns = 1 - \mu^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$H \sim \pm 2\sqrt{6} \mu \left(1 - \frac{37}{24} \mu^2\right) \sin nx + \left(-2\mu^2 + \frac{7}{6} \mu^4\right) \sin 2nx \pm \frac{\sqrt{6}}{6} \mu^3 \sin 3nx \quad (1.3)$$

$$c = 0, \quad Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H^2 dx$$

Решения (1.3) получаются из  $2\pi$ -периодического путем замены  $x \rightarrow nx$ ,  $s \rightarrow ns$  и по сути дела представляют собой одно решение. Решение  $c = 0$  существует в интервале  $ns \in (1, s_0)$   $s_0 \approx 0,497$  и было впервые получено в [3]. От этого решения в точке  $ns \approx 0,58$  в сторону меньших  $ns$  ответвляется решение  $c \neq 0$  [5]; при  $ns \rightarrow 0$  решение  $c \neq 0$  переходит в солитонное [6].

Решение (1.3) иногда будет удобно рассматривать как выродившееся  $2\pi$ -периодическое решение, у которого амплитуды гармоник, не крат-

ные  $n$ , равны нулю:

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} H_k \sin kx, \quad H_k = 0 \quad (k \neq n, 2n, 3n, \dots)$$

При таком рассмотрении возникает вопрос, не может ли ответвляться от  $2\pi/n$  — периодического решения  $2\pi$ -периодическое решение, у которого амплитуды гармоник, не кратные  $n$ , не равны нулю. Этот вопрос связан с единственностью решений (1.3).

Пусть известно семейство решений  $c=0$  при  $ns \in (1, s_0)$ , т. е.  $H = H(x, s)$ ,  $Q = Q(s)$  считаем заданными функциями. Их можно взять, скажем, из [3] или [6]. Условимся называть это семейство 1-м семейством. Наложим на решение малое возмущение  $H \rightarrow H + f$ , тогда линеаризованное уравнение (1.1) примет вид

$$s^2 f'' + f' + 2Hf = 0 \quad (1.4)$$

(Члены, порождаемые  $Q$ , как легко показать, имеют второй порядок малости и не входят в (1.4).) Уравнение (1.4) является линейным уравнением с  $2\pi/n$ -периодическими коэффициентами. Необходимым условием ответвления от порождающего уравнения (1.1)  $2\pi$ -периодического решения является существование такого решения у возмущенного уравнения (1.4). При исследовании (1.4) удобно сделать замену  $ns \rightarrow s$ ,  $nx \rightarrow x$ . Тогда (1.4) сохранит прежний вид, но теперь является уравнением с  $2\pi$ -периодическими коэффициентами и ставится задача о существовании у (1.4)  $2\pi n$ -периодических решений. Применим к (1.4) общую теорию линейных уравнений с периодическими коэффициентами [7].

Пусть  $A(x)$  — нормированная фундаментальная матрица решений уравнения (1.4):

$$A(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & \varphi_3'' \end{vmatrix}, \quad A(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Матрица  $A(2\pi)$  называется матрицей монодромии. (Эта матрица для рассматриваемого случая искалась численным интегрированием (1.4) при заданных  $s$ ,  $H(s, x)$  с начальным условием  $A(0) = E$ .) Собственные значения матрицы монодромии  $\rho_k \det \|A(2\pi) - \rho E\| = 0$  являются мультипликаторами (1.4), а  $\lambda_k = (\ln |\rho_k| + i \arg \rho_k) / 2\pi$  ( $k=1, 2, 3$ ) являются характеристическими числами (1.4);  $\lambda_k$  определены с точностью до слагаемого  $ni$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Тогда по теореме Флоке имеется по крайней мере одно решение (1.4), такое, что

$$f(x+2\pi) = \rho_k f(x), \quad f(x) = F(x) e^{2\pi \lambda_k}$$

где  $F(x)$  —  $2\pi$ -периодическая функция. В частности, при  $\rho_1 \neq \rho_2 \neq \rho_3$  таких решений три  $f_1, f_2, f_3$ , соответствующих мультипликаторам  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ .

Заметим, что  $f_3 = H'(x)$  является  $2\pi$ -периодическим решением (1.4), т. е.  $\rho_3 = 1$  — мультипликатор (1.4). Кроме того, в (1.4) отсутствует член с производной 2-го порядка, следовательно  $\rho_1 \rho_2 \rho_3 = 1$  или  $\rho_1 \rho_2 = 1$ ,  $\rho_3 = 1$ . Так как коэффициенты (1.4) действительны, то либо мультипликаторы — комплексно-сопряженные числа, лежащие на единичной окружности  $\rho_{1,2} = e^{\pm i\theta}$  — тот случай, который требуется для ветвления; либо  $\rho_1, \rho_2$  — чисто действительные числа  $\rho_2 = 1/\rho_1$ , и тогда (1.4) не имеет ограниченных при  $x \rightarrow \pm\infty$  решений. Численное решение вышеуказанной задачи показало следующее поведение мультипликаторов (фиг. 1): при увеличении  $\mu$  от нуля ( $s = 1 - \mu^2$ ) из точки  $a(1, 0)$  комплексной плоскости выходит пара мультипликаторов  $\rho_{1,2} = e^{\pm i\theta}$ , проходящих соответственно снизу и сверху единичный круг и при  $\mu = \mu_1$  ( $\mu_1 \approx 0,065$ ,  $s_1 \approx 0,9957$ ) сливающихся в точке  $(-1, 0)$ . При дальнейшем увеличении  $\mu$  двойной корень распадается на два, но теперь  $\rho_{1,2}$  — отрицательные числа, лежащие на действительной оси — справа и слева от точки  $(-1, 0)$ . При  $\mu = \mu_2$  ( $\mu_2 \approx 0,3976$ ,  $s_2 \approx 0,842$ ) мультипликаторы возвращаются в точку  $(-1, 0)$ , сливаясь в один корень, и при дальнейшем увеличении  $\mu$  перемещаются по единичному кругу, а при  $\mu = \mu_3$  ( $\mu_3 \approx 0,4034$ ,  $s_3 \approx 0,837$ ) корни сливаются в точке  $(1, 0)$ .

При  $\mu > \mu_3$  мультипликаторы выходили на действительную положительную ось и оставались на ней при дальнейшем увеличении  $\mu$ .

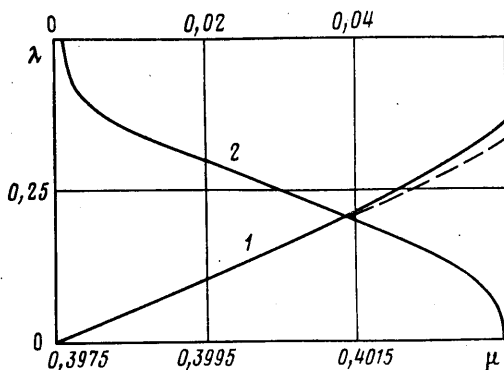
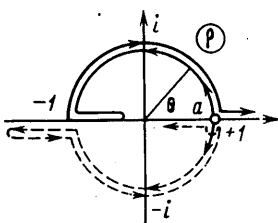
Поведение чисто мнимых характеристических чисел  $\lambda = i\lambda_i$  при  $\mu \in [0, \mu_1]$  изо-

бражено внизу на фиг. 1 кривой 1, а при  $\mu \in [\mu_2, \mu_3]$  кривой 2 (цифры сверху чертежа относятся к кривой 1, внизу — к кривой 2). Кривые симметричны относительно осей  $\lambda_i$  и  $\mu$ . Функции  $\mu = \mu(\lambda_i)$  являются периодическими с периодом 1. На графике показано полпериода функций. Кривая 1 линейно выходит из начала координат и при  $\mu = \mu_1$ ,  $\lambda_i = 1/2$  уходит в действительную область;  $\lambda_i$  при этом непрерывно пробегает значения от 0 до  $1/2$ . В точке  $\mu = \mu_2$  опять становится мнимой, причем начинается с  $\lambda_i = 1/2$  и затем уменьшается до нуля, уходя в действительную область при  $\mu > \mu_3$ .

Резюмируем полученный результат. При  $\mu \in [0, \mu_1] \cup [\mu_2, \mu_3]$  решения (1.4), соответствующие  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ , имеют вид

$$f_1 = F(x)e^{2\pi i \lambda_i x}, \quad f_2 = F^*(x)e^{-2\pi i \lambda_i x}, \quad f_3 = H'(x),$$

где  $F(x)$  —  $2\pi$ -периодическая функция, \* — комплексно-сопряженная величина. В общем случае  $f_{1,2}$  являются почти периодическими функциями.



Фиг. 1

Однако при  $\lambda_i = 1/2, 1/3, \dots, 1/m, \dots$   $f$  имеет периоды соответственно  $4\pi, 6\pi, \dots, 2\pi m, \dots$ , т. е. в точках  $\mu = \mu^{(2)}, \mu^{(3)}, \dots, \mu^{(m)}, \dots$ , соответствующих  $\lambda_i = 1/2, 1/3, \dots, 1/m, \dots$ , выполняется необходимое условие ответвления  $4\pi, 6\pi, \dots, 2\pi m, \dots$  — периодических решений порождающего уравнения (1.1). Для дальнейшего анализа существенно, что интервалов, где возможно ветвление, — два. Вопрос о почти периодических решениях, могущих ответвляться при иррациональных  $\lambda_i$ , в данной статье не рассматривается, как и случай, когда  $\lambda_i = m/n$ , где  $m, n$  — целые числа.

В интервале  $\mu \in [0, \mu_1]$  можно построить аналитическое решение (1.4). Возьмем окрестность  $s = 1 - \mu^2$ , где решение (1.1) описывается (1.3). Ищем решение в виде асимптотических разложений:

$$f = Fe^{ivx}, \quad F \sim F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \mu^3 F_3, \quad v \sim \mu \chi_1 + \mu^3 \chi_3 \quad (1.5)$$

Подставляя (1.5) в (1.4), получим

$$F_0''' + F_0' = 0$$

$$F_1''' + F_1' = -3i\chi_1 F_0'' - i\chi_1 F_0' \mp 4\sqrt{6} F_0 \sin x$$

$$F_2''' + F_2' = -3i\kappa_1 F_1'' + 3\kappa_1^2 F_0' + 2F_0''' - i\kappa_1 F_1 \mp 4\sqrt{6} F_1 \sin x + 4F_0 \sin 2x$$

$$F_3''' + F_3' = -3i\kappa_1 F_2'' + 3\kappa_1^2 F_1' + 2F_1''' - 3i\kappa_3 F_0'' + 6i\kappa_1 F_0'' - i\kappa_1 F_2 \mp 4\sqrt{6} F_2 \sin x + 4F_1 \sin 2x + F_0 \left( i\kappa_1^3 - i\kappa_3 - \frac{\sqrt{6}}{3} \sin 3x + \frac{37\sqrt{6}}{6} \sin x \right)$$

Решение первого уравнения  $F_0 = M_0 \cos x + N_0 \sin x + L_0$ . Тогда в правых частях уравнений будут появляться члены, пропорциональные  $\cos x$ ,  $\sin x$ , 1, дающие резонансные решения вида  $x \cos x$ ,  $x \sin x$ ,  $x$ . Накладывая условие отсутствия резонансных членов, находим собственные функции и собственные значения

$$\lambda_i \sim \pm 2\sqrt{6} \mu \left( 1 + \frac{871}{24} \mu^2 \right), \quad F_0 = 1 \mp i \sin x$$

$$F_1 = \frac{\sqrt{6}}{3} \left( \frac{19}{2} \cos x \pm i \sin 2x \right), \quad F_2 = -13 \cos 2x \mp \frac{1}{4} i \sin 3x$$

Штриховая кривая на фиг. 1 соответствует аналитическому решению, хорошо совпадающему с численным, исключая небольшую окрестность  $\mu = \mu_1$ .

2. Перейдем к выводу уравнения разветвления, к рассмотрению поведения решений вблизи точек бифуркации и вдали от них. Будем искать решение в виде  $H = H_1 \sin x + \dots + H_N \sin Nx$ , ограничиваясь  $N$  гармониками. Тогда, подставляя разложение в (1.1), получим систему нелинейных уравнений относительно

$$F_k(H) = k(k^2 s^2 - 1) H_k - \sum_m (H_m H_{m+k} - H_m H_{k-m}) = 0 \quad (2.1)$$

Нелинейное искажение расхода может быть найдено после решения (2.1)  $Q = 0,5 (H_1^2 + \dots + H_N^2)$ . Вблизи точек  $s = 1/n$ ,  $n \geq 1$  (2.1) имеет  $2\pi/n$ -периодические решения, ответвляющиеся при  $s = 1/n$  от тривиального решения  $H(x) = 0$ :

$$H = H_n \sin nx + H_{2n} \sin 2nx + \dots \quad (2.2)$$

При  $ns \in [0,75; 1]$  в ряде (2.2) достаточно ограничиться двумя членами; при этом, скажем, среднеквадратичные амплитуды у двухчленного разложения и у ряда из 10 членов отличаются только на 3-й значащей цифре ( $ns = 0,75$ ;  $\langle H \rangle = 1,567$  для 10 членов,  $\langle H \rangle = 1,542$  для 2 членов). Итак, при  $ns \in [0,75; 1]$  считаем  $N = 2n$ . Тогда (2.1) дает для  $2\pi/n$ -периодического решения приближенные аналитические выражения

$$H_n = \pm 2n(1 - n^2 s^2)^{1/2} (4n^2 s^2 - 1)^{1/2}, \quad H_{2n} = n(n^2 s^2 - 1), \quad H_k = 0 \quad (k \neq n, 2n) \quad (2.3)$$

Предыдущий анализ показал, что для любого  $n \geq 2$  существуют два значения  $s_{1,2}$  такие, что в точках  $s_{1,2} = (1 - \mu^2)/n$  выполняется необходимое условие ответвления от  $2\pi/n$ -периодического решения  $2\pi$ -периодического  $H_1 \neq 0$ . Причем бифуркации происходят в точках  $ns \in [0,996; 0,837]$ , где хорошим приближением  $2\pi/n$ -периодического решения служит (2.3). Этим обстоятельством воспользовались, чтобы получить аналитически уравнения разветвления и решения в малой окрестности точек бифуркации. С точки зрения галеркинской постановки такими точками являются точки обращения в нуль якобиана  $|\partial F_k / \partial H_m|$  системы (2.1). Применим к исследованию общую теорию ветвления решений нелинейных уравнений [8, 9].

Пусть при некотором значении  $s$  якобиан (2.1) равен нулю. Путем следующей замены сведем задачу к нахождению решений, ответвляющихся от нулевого

$$s^2 \rightarrow s^2 + \lambda, \quad H_n \rightarrow H_n + y_n, \quad H_{2n} \rightarrow H_{2n} + y_{2n}, \quad H_k \rightarrow y_k \quad (k \neq n, 2n) \quad (2.4)$$

$$F_k(y_1, y_2, \dots, y_{2n}; \lambda) = 0, \quad k=1, 2, \dots, N=2n$$

Разделим все члены в (2.5) на линейные и нелинейные по  $y_k$ ;  $y_k$  и  $\lambda$  входят в (2.5) только в линейном или квадратичном виде. Тогда (2.5) переходит в

$$B_{km}y_m = l_k\lambda + A_{kmp}y_my_p + C_{km}y_m\lambda; \quad k, m, p=1, 2, \dots, N \quad (2.6)$$

Здесь предполагается суммирование по повторяющимся индексам,  $|B_{km}|$  является якобианом  $|\partial F_k/\partial H_m|$ , который в рассматриваемом случае нулевой. Можно показать, что минор матрицы  $B_{km}$ , стоящий в правом нижнем углу, отличен от нуля и ранг матрицы  $B_{km}$  равен  $r=N-1$ . Перенесем члены с  $y_i = \xi$  в правую часть (2.6); возьмем уравнения (2.6) при  $k=2, 3, \dots, N$ , считая  $\xi$  параметром. Так как подматрица в левой части получившейся системы  $B_{km}$  ( $k, m=2, 3, \dots, N$ ) обратима и функции от  $\lambda$  и  $\xi$  в правой части системы — аналитические, то в некоторой окрестности нуля решение подсистемы имеет вид

$$y_k = \lambda A_k^{(1)} + \xi A_k^{(2)} + A_k^{(3)}\lambda^2 + A_k^{(4)}\lambda\xi + A_k^{(5)}\xi^2 + \dots \quad (2.7)$$

причем в достаточно малой окрестности нуля ряды сходятся [8, 9]. Коэффициенты  $A_k^{(i)}$  находятся постановкой (2.7) в подсистему и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях  $\lambda$  и  $\xi$ . После нахождения  $A_k^{(i)}$  (2.7) подставлялось в пока не использованное первое уравнение системы (2.6); получалось уравнение разветвления

$$F(\xi, \lambda) = \sum_{r=0}^p F_r(\lambda)\xi^r \quad (2.8)$$

Для решения (2.8) использовалась диаграмма Ньютона [8].

Перейдем к конкретным результатам.

Для  $n=2$  условие  $|\partial F_k/\partial H_m|=0$  дает значения  $s$ , при которых происходит ветвление

$$1872217s^8 - 1082452s^6 + 212478s^4 - 16420s^2 + 433 = 0 \quad (2.9)$$

Подходящие корни  $ns \in [1; 0,75]$  (ср. с полученными по теории Флоке):  $s_1=0,4979$ ,  $s_2=0,4352$ . Уравнения разветвления для  $z=s_1$ ,  $s=s_2$  соответственно:

$$\xi(-197,3\lambda + 12,61\xi^2 - 17579\lambda^2 + \dots) = 0$$

$$\xi(-61,58\lambda - 2,259\xi^2 + 647,6\lambda^2 + \dots) = 0$$

имеют решение  $\xi=0$ , что приводит опять к известному  $2\pi/n$ -периодическому решению (2.2). Приравнивая выражения в скобках нулю, найдем решения, ответвляющиеся в сторону  $\lambda>0$  и  $\lambda<0$  соответственно:

$$H_1 = \pm 3,956\lambda^{1/2} \pm 176,2\lambda^{3/2} + \dots; \quad H_2 = -0,6390 + 0,160\lambda - 83130\lambda^2 + \dots$$

$$H_3 = \pm 0,6663\lambda^{1/2} \pm 24,51\lambda^{3/2} + \dots; \quad H_4 = -0,01721 - 0,121\lambda - 3540\lambda^2 + \dots$$

$$H_1 = \pm 5,221\epsilon^{1/2} \pm 27,45\epsilon^{3/2} + \dots; \quad H_2 = 2,807 - 30,61\epsilon - 309,8\epsilon^2 + \dots$$

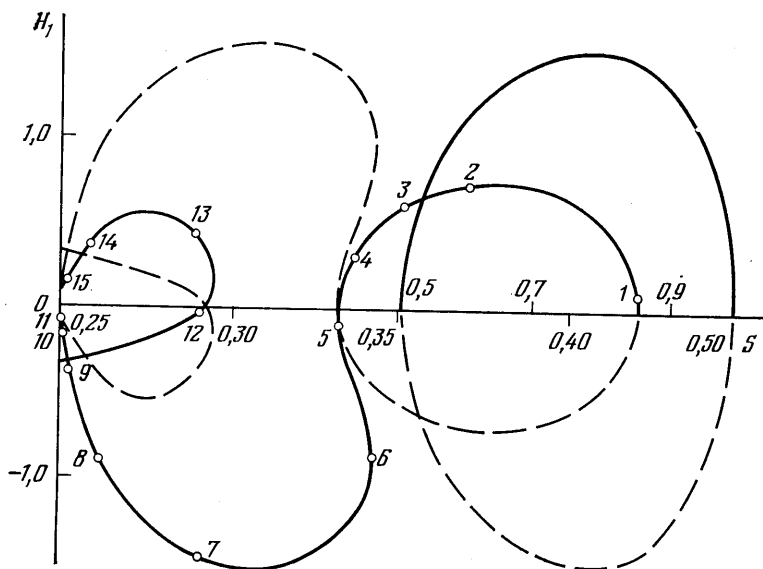
$$H_3 = \pm 8,136\epsilon^{1/2} \pm 41,48\epsilon^{3/2} + \dots; \quad H_4 = -0,4852 + 11,99\epsilon + 410,0\epsilon^2 + \dots \quad (2.10)$$

Здесь  $\epsilon = -\lambda$ .

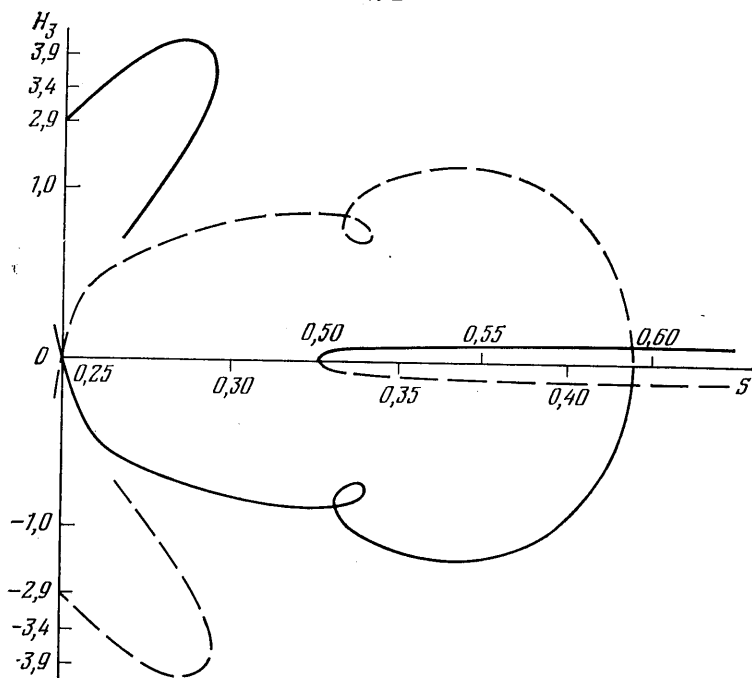
Для  $n=3$  аналогично находим точки ветвления  $s_1=0,3323$ ,  $s_2=0,2923$ . Уравнения разветвления для  $s_1$  и  $s_2$  дают решение  $\xi=0$ , приводящее к (2.2), и решения, соответственно для  $s_1$ ,  $s_2$ :

$$H_1 = 1905\lambda + \dots; \quad H_2 = -1528\lambda + \dots; \quad H_3 = 0,8297 + 27\lambda + \dots$$

$$H_4 = -50\lambda + \dots; \quad H_5 = 140\lambda + \dots; \quad H_6 = -0,01929 - 575\lambda + \dots$$



Фиг. 2



Фиг. 3

$$\begin{aligned}
 H_1 &= 42,27\lambda + \dots; & H_2 &= 169,8\lambda + \dots; & H_3 &= 4,156 + 27\lambda + \dots \\
 H_4 &= -200\lambda + \dots; & H_5 &= -129,4\lambda + \dots; & H_6 &= 0,693 - 44,87\lambda + \dots
 \end{aligned}
 \quad (2.11)$$

Весь изложенный анализ поведения ответвившихся решений вблизи точек бифуркации для  $n=2, 3$  был сделан аналитически, и для конкретных вычислений потребовался лишь калькулятор.

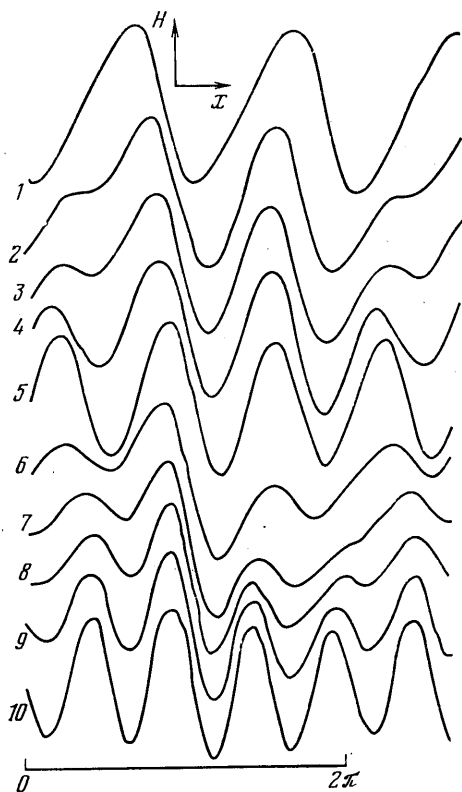
Проанализируем некоторые свойства (2.10)–(2.11). При исследовании ответвления решений от  $2\pi/n$ -периодического решения следует учесть, что

в (2.3) записаны два решения с разными знаками  $H_n$ , и  $2\pi$ -периодическое решение может ответвляться от каждого из них.

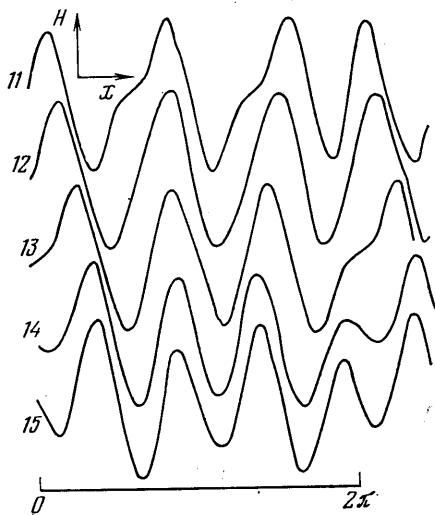
Конкретные вычисления показывают, что при  $n=2$ ,  $s=s_1$  решение ответвляется только для  $H_n < 0$ , при  $n=2$ ,  $s=s_2$  — только для  $H_n > 0$ . При  $n=3$ ,  $s=s_1$ ,  $s_2$  решения ответвляются для обоих знаков  $H_n$ . При замене  $H_3 \rightarrow -H_3$  в формулах (2.11) у нечетных гармоник лишь меняются знаки, а у четных остаются прежними. Таким образом, при  $n=3$  через  $s_1$ ,  $s_2$  должно проходить по паре решений.

Далее, для  $n=2$  уравнения разветвления имеют вещественные корни либо при  $\lambda > 0$ , либо при  $\lambda < 0$ ; т. е. (2.10) определены в некоторой окрестности нуля. Решения для  $n=2$  раскладываются в ряды по дробным степеням  $\lambda$  с общим знаменателем 2. В случае же  $n=3$  решения в окрестностях точек бифуркации раскладываются по целым степеням  $\lambda$ , что несколько необычно для ветвления, где, как правило, встречаются дробные степени с четным общим знаменателем, определяя решение либо в правой, либо в левой полукрестности нуля. Ответвляющееся же при  $n=3$  решение определено как для положительных, так и для отрицательных  $\lambda$ . Можно показать, что для  $n > 2$  уравнения разветвления имеют вид  $A\xi^2 + B\xi\lambda + \dots = 0$ , аналогичный случаю  $n=3$ . То есть  $2\pi$ -периодическое решение не выходит из комплексной плоскости, как при  $n=2$ , а как бы пересекает  $2\pi/n$ -периодическое решение, существуя и справа и слева от него.

Продолжим решения по параметру  $s$  от малых решений вблизи точек бифуркации. Решения (2.1) строились численно с помощью итераций. За начальное прибли-



Фиг. 4



Фиг. 5

жение принималось решение на предыдущем  $s$ . В начале расчета решение задавалось одной из формул (2.10), (2.11). Наиболее трудными местами расчета были начальные участки около точек ветвления и участки загибов кривых. Для преодоления сложностей расчета на указанных этапах применялся следующий прием:  $H_1$  считалось параметром, а  $s$  — неизвестной.

На фиг. 2, 3 изображены зависимости первой и третьей гармоники от  $s$ . Решение, выходящее из точки  $s=0,4979$ , разветвляется в сторону больших  $s$ . Продолжая решение по  $s$ , приходим к точке  $s=1$ , где периодическое решение ответвляется от плоскопараллельного  $H(x) \equiv 0$ . Полученное решение является решением (2.2) при  $n=1$ . Цифры над осью  $s$  относятся к этому решению.

Из точки  $s=0,4352$  в сторону меньших  $s$  ответвляется пара решений (2.11). К этому решению относятся цифры под осью  $s$ . На фиг. 4, 5 показано изменение формы волны  $H=H(x)$  при изменении  $s$ . Точки 1, ..., 15 на фиг. 2 соответствуют номерам волн на фиг. 4, 5. Вблизи  $s=0,4352$  волну можно рассматривать как волну периода  $\pi$  с амплитудой и фазой, модулированными с периодом  $2\pi$  (точка 1). При уменьшении  $s$  появляется точка, где  $H=H'=H''=0$  (2). При дальнейшем уменьшении  $s$  из указанной точки формируются максимум и минимум, которые затем образуют еще один период (3, 4) и при  $s=0,3323$   $2\pi$ -периодическое семейство пересекает  $2\pi/3$ -периодическое. В окрестности точки ветвления  $s=0,3323$  решение линейно зависит от  $s$ ; пара прямых  $H_1 = \pm 1905\lambda$  весьма круто пересекает точку бифуркации. Линейное поведение справедливо в очень узкой окрестности нуля  $\lambda=0$  ( $1/1905$ ) и не улавливается графически. (На фиг. 2 поведение  $H_1$  вблизи  $s=0,3323$  скорее похоже на поведение  $f = \pm A\lambda^{1/2}$ .) При численном нахождении решения это обстоятельство вызывало затруднения. В окрестности  $s=0,3323$  волна может рассматриваться как волна периода  $2\pi/3$ , модулированная с периодом  $2\pi$  (точки 4, 5). Вскоре после точки бифуркации решение имеет загиб в сторону больших  $s$ , после чего следует уменьшение  $s=s(H_1)$ .

В точках 6, 7, 8 волна по форме напоминает букву  $N$ . Такой формы волна образовывалась при решении нестационарной задачи: столкновения двух сигналов, положительного и отрицательного [10]. Отметим, что  $N$ -волна в нестационарной задаче существовала длительное время, почти не меняясь, и, следовательно, была близка к стационарному решению. Укажем также, что решение, близкое по форме к изображенному на фиг. 4, 5, получается и при других  $s$ .

На фиг. 5 показана последовательная деформация волны и переход к  $\pi/2$ -периодической волне, модулированной  $2\pi$ -периодической в окрестности  $s=0,2494$ . Точка  $s=0,2923$  является точкой ответвления еще одного семейства волн, показанного на фиг. 2, 3. (Цифры с правой стороны фиг. 3 относятся к этому семейству.) Вблизи  $s=0,2923$ — $2\pi/3$ -периодическая волна, модулированная  $2\pi$ -периодической. Вблизи  $s=0,2494$ — $\pi/2$ -периодическая волна с модуляцией  $2\pi$ .

Были исследованы также волновые решения при больших  $n$ . Основные особенности те же, что и для  $n=2, 3, 4$ ; вблизи точек бифуркации  $2\pi/n$ -периодическая волна с  $2\pi$ -периодической модуляцией: образование нового периода происходит через образование точки  $H=H'=H''=0$ ; на переходе от  $n$  к  $n+1$  имеется волна, напоминающая букву  $N$ , причем при увеличении  $n$  увеличивается длина гладкого участка на заднем и переднем фронте и уменьшается амплитуда  $N$ -волны (поэтому в пределе  $n \rightarrow \infty$  из  $N$ -волны не получается солитона). Предсказываемый теорией тип  $N$ -волны было бы интересно получить на эксперименте столкновением положительного и отрицательного сигналов [11].

Автор благодарит В. Я. Шкадова за руководство работой и В. И. Арнольда за ряд ценных замечаний и внимание к работе.



## ЛИТЕРАТУРА

1. *Шкадов В. Я.* Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 1, с. 43–51.
2. *Шкадов В. Я.* К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 2, с. 20–25.
3. *Непомнящий А. А.* Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 3, с. 28–34.
4. *Непомнящий А. А.* Устойчивость волновых режимов в пленке жидкости относительно трехмерных возмущений.— В кн.: Гидродинамика. Пермь: Уч. зап. Перм. ун-та, 1974, в. 5, с. 91–104.
5. *Непомнящий А. А.* Устойчивость волновых движений в слое вязкой жидкости на наклонной плоскости.— В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск, 1977, с. 181–190.
6. *Цвелодуб О. Ю.* Стационарные бегущие волны на пленке, стекающей по наклонной плоскости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 4, с. 142–146.
7. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с.
8. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 528 с.
9. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
10. *Демехин Е. А., Шкадов В. Я.* О нестационарных волнах в слое вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 3, с. 151–154.
11. *Алексеев С. В., Накоряков В. А., Покусаев Б. Г.* Волны на поверхности вертикально стекающей пленки жидкости. Новосибирск, 1979. 52 с. (Препринт ИТФ СО АН СССР, № 36–79).

Краснодар

Поступила в редакцию  
23.II.1982