МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 · 1983

УДК 532.516

О НЕКОТОРЫХ РЕЖИМАХ ПЕРИСТАЛЬТИЧЕСКОГО ПРОКАЧИВАНИЯ

ЛЕВИНА Г. В.

Изучению перистальтического прокачивания посвящено значительное число исследований [1—8]. В большинстве работ деформации стенок канала задаются в форме бегущей синусоидальной волны постоянной амплитуды и предполагаются чисто поперечными. Смещения произвольной формы рассмотрены в [1, 2]. Общий подход к решению такого типа задач состоит в использовании асимптотических разложений по одному или сразу по двум малым параметрам (числу Рейнольдса, волновому числу, амплитуде волны). Обзор работ, выполненных к 1972 г., приведен в [3]; основное внимание уделено явлениям «захвата» и «обратного тока», интересным в связи с приложениями в физиологии. В работах [4–7] перистальтические течения исследуются с помощью численных методов.

В настоящей работе изучаются режимы течения при значительных волновых числах и амплитудах деформации стенки канала. На основе численного метода [7], дополненного расчетом давления по схеме типа предложенных в [9], определены границы применимости результатов работы [3]. Показано, что при достаточно больших волновых числах возможен качественно новый тип захвата, не связанный с отделением от оси нулевой линии тока.

1. Рассматривается плоское течение жидкости в бесконечном канале со стенками, деформируемыми по закону бегущей волны

$$Y=\pm\left[a+b\sin\frac{2\pi}{\lambda}(X-c\tau)\right] \tag{1.1}$$

где a — средняя полуширина канала, b — амплитуда волны, λ — длина волны, c — фазовая скорость волны, τ — время.

Безразмерные уравнения, описывающие плоское течение вязкой несжимаемой жидкости, в переменных функция тока — вихрь скорости (ψ, φ) имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\pm\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=\Delta\varphi\\ \Delta\psi=-\varphi,\quad \mathrm{Re}=\frac{ac}{\nu},\quad v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\end{gathered} \tag{1.2}$$

где Re — число Рейнольдса; в качестве единиц измерения длины, времени и скорости выбраны соответственно a, a^2/ν и c.

Для упрощения записи граничных условий перейдем к системе отсчета, движущейся вместе с волной. В этой системе отсчета форма границ неизменна, а величина ψ постоянна вдоль границы. При соблюдении определенных условий (кратность длины канала длине волны, постоянство перепада давлений между концами канала) течение в движущейся системе отсчета будет стационарным [3]. Разность значений ψ на стенке и на оси симметрии тогда равна расходу жидкости через поперечное сечение полуканала. Выражая эту величину через средний по времени расход жидкости Q в неподвижной системе отсчета [3] и принимая значение ψ на оси симметрии равным нулю, граничные условия запишем в виде

$$
\begin{gathered}
\psi=0, \quad \varphi=0 \quad (y=0) \\
\psi=Q-1, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=-1 \quad (y=1+\varepsilon\sin\alpha x) \\
\varepsilon=\frac{b}{a}, \quad \alpha=\frac{2\pi a}{\lambda}
\end{gathered} \tag{1.3}
$$

Второе из условий на стенке выражает факт прилипания жидкости к стенкам канала в неподвижной системе отсчета.

Все величины предполагаются периодическими по x и расчетная область ограничивается интервалом $0\leqslant x\leqslant 2\pi/\alpha$. Вводится преобразование координат, спрямляющее границы области и позволяющее использовать в конечно-разностных расчетах прямоугольную сетку

$$
\xi=x, \quad \eta=\frac{y}{1+\varepsilon\sin\alpha x} \tag{1.4}
$$

В преобразованном виде уравнения и граничные условия записываются в форме

$$
\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathrm{Re}\,a_2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+2a_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}+a_3\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+a_4\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \tag{1.5}
$$

$$
\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+2a_1\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial\eta}+a_3\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+a_4\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=-\varphi \tag{1.6}
$$

$$
a_1=\frac{\partial\eta}{\partial x}, \quad a_2=\frac{\partial\eta}{\partial y}, \quad a_3=\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2, \quad a_4=\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \tag{1.7}
$$

$$
\psi=0, \quad \varphi=0 \quad (\eta=0); \quad \psi=Q-1, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\eta}=-(1+\varepsilon\sin\alpha\xi)\,(\eta=1) \tag{1.8}
$$

2. Поставленная задача решалась методом конечных разностей. Применялись две разностные схемы: схема продольно-поперечной прогонки [7] и явная двухслойная схема. В обоих случаях пространственные производные аппроксимировались центральными разностями. Решение конечно-разностного аналога уравнения (1.6) осуществлялось методом последовательной верхней релаксации Янга – Франкела; параметр релаксации подбирался экспериментально. Граничное условие для вихря скорости на стенке канала задавалось по формуле, аналогичной формуле Тома [10]

$$
\varphi(\xi,1)=2a_1(\xi,1)\varepsilon\alpha\cos\alpha\xi-\frac{2a_3(\xi,1)}{h_2}\left[\frac{\psi(\xi,1-h_2)-\psi(\xi,1)}{h_2}-(1+\varepsilon\sin\alpha\xi)\right]+
$$
$$
+\,a_4(\xi,1)\,(1+\varepsilon\sin\alpha\xi)
$$

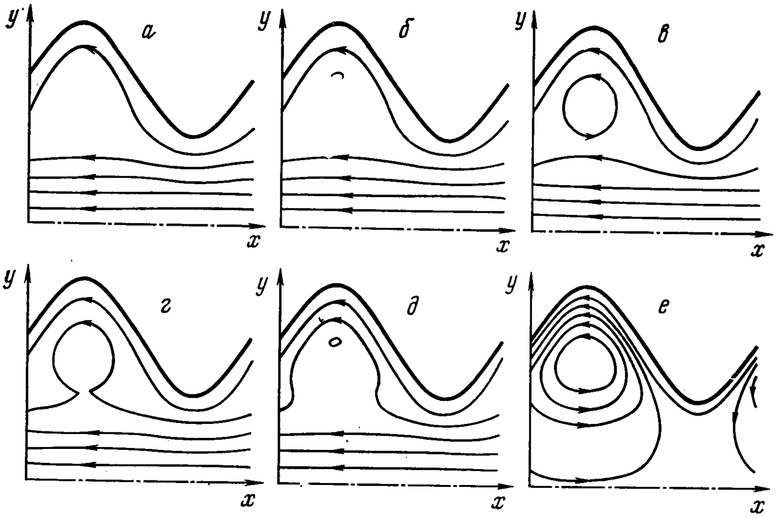
На боковых границах ставились условия периодичности. Стационарное решение уравнений (1.5), (1.6) получалось методом установления.

Важной характеристикой перистальтического прокачивания является перепад давлений на длине волны, поэтому наряду с определением поля функции тока производится расчет поля давления. В литературе по вычислительной гидродинамике описаны трудности, возникающие при расчете давления, особенно при значительных числах Рейнольдса [10].

В данной работе приводятся результаты, полученные с помощью маршевых схем расчета давления, разработанных автором на основе рекомендаций [9] и дающих однозначное распределение давления при наличии значительных сил инерции.

3. Решение задачи (1.2) – (1.3) определяется четырьмя безразмерными параметрами: относительной амплитудой модуляции ε, волновым числом α, числом Рейнольдса Re и величиной среднего расхода в неподвижной системе отсчета Q.

Рассмотрим сначала результаты, относящиеся к Re=0 (ползущее те-



Фиг. 1

чение), с малым волновым числом и допускающие сравнение с линейной теорией (Re=0, α=0) [3].

Для расходо-напорной характеристики в [3] получается формула

$$Q=\frac{3\varepsilon^2}{2+\varepsilon^2}-\frac{1}{3\pi}\frac{(1-\varepsilon^2)^{5/2}}{2+\varepsilon^2}\Delta p_\lambda,\quad \Delta p_\lambda=\Delta p\alpha$$

Здесь Δp — перепад давлений между входной и выходной границами, p — давление, обезразмеренное по величине $\rho c\nu/a$. При расчетах с волновым числом $\alpha\leqslant 0{,}1$ и амплитудой $\varepsilon\leqslant 0{,}4$ отличие перепада давлений, полученного на сетке 20×20, от вычисленного по этой формуле составляет менее 0,3%; при $\alpha=0{,}2$ отличие достигает 1%. Совпадение с результатами аналитической теории остается хорошим при больших амплитудах волны. При $\varepsilon=0{,}8$ и $\alpha=0{,}1$ отличие определенного численно перепада давлений от аналитической теории также не превышает долей процента.

Линейная теория [3] предсказывает возможность захвата частиц (расщепление центральной линии тока) при Re=0, $\alpha=0$ из анализа распределения функции тока в движущейся системе отсчета [8]

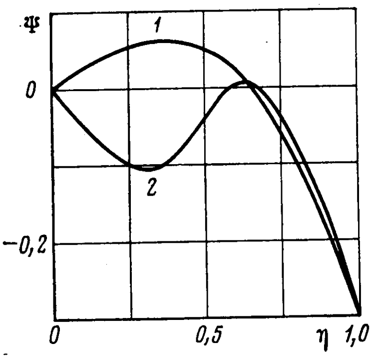
$$\psi_0=\frac{Q+\varepsilon\sin\alpha x}{2}\left[3\frac{y}{H}-\left(\frac{y}{H}\right)^3\right]-y,\quad H=1+\varepsilon\sin\alpha x \tag{3.1}$$

Из требования $\psi_0=0$ при $y\neq 0$ следует условие для величины расхода, при котором наблюдается расщепление центральной линии тока $Q>{}^1/_3(2-\varepsilon)$. Численные расчеты подтверждают как возможность расщепления центральной линии тока (см. по этому поводу также [4, 5]), так и полученное неравенство. При изменении значений Q с относительным шагом ~2% граница захвата по Q не противоречит значению, вычисленному по линейной теории. Например, при $\varepsilon=0{,}4$ захват отсутствовал при $Q=0{,}53$ и появлялся при $Q=0{,}54$; по линейной теории захват имеет место при $Q>0{,}533$.

Расщепление центральной линии тока может наблюдаться и при Re≠0 и $\alpha\neq 0$, как следует из анализа, выполненного на основе асимптотических разложений, которые справедливы при малых значениях Re и α [3], и из результатов численных расчетов, выполненных в данной работе. Это означает, по-видимому, что перистальтическое течение при не слишком больших Re и α сохраняет некоторые свойства локально пуазейлевского распределения (3.1), хотя, естественно, граница существования явления захвата уже не описывается неравенством $Q>{}^1/_3(2-\varepsilon)$, а оказывается зависящей также от Re и α.

4. Рассмотрим численные результаты, относящиеся к изучению явления захвата при значительных деформациях стенки канала. При определенных условиях появление замкнутых линий тока в движущейся вместе с волной системе отсчета может происходить не через расщепление центральной линии тока.

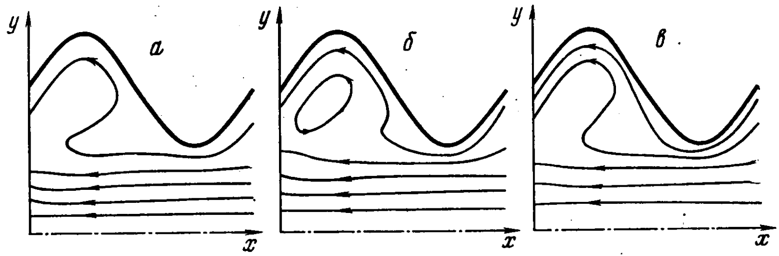
В качестве примера на фиг. 1, ($a-e$) показаны карты линий тока в движущейся системе отсчета для набора параметров Re=0, $\alpha=10$, $\varepsilon=0{,}4$, полученные при различных значениях расхода $Q=0$; 0,11; 0,25; 0,28; 0,4; 0,9. При захвате такого рода образование замкнутых линий тока происходит не вблизи оси канала; в структуре течения обращает на себя внимание факт существования встречных потоков.



Фиг. 2

Появление структур, показанных на фиг. 1, невозможно при локально пуазейлевском течении вида (3.1). Как легко видеть, структура типа, представленной на фиг. 1, *в* требует, чтобы величина $\partial\psi_0/\partial\eta$ в интервале значений η (0,1) обращалась в нуль в двух точках. Анализ выражения (3.1) показывает, что при Re=0 и $\alpha=0$ это условие выполниться не может. Вид зависимостей функции тока от вертикальной координаты, соответствующих двум различным типам захвата, приведен на фиг. 2 (линия *1* относится к случаю расщепления центральной линии тока, линия *2* — ко второму типу захвата).

Как видно из фиг. 1, при увеличении расхода Q область, в которой движется захваченная жидкость, расширяется и приближается к оси канала (следует иметь в виду, что линии тока на фиг. 1 проведены для зна-



Фиг. 3

чений $\psi=[\psi_m-(Q-1)]N/6$, где $N=1$, 2, 3, 4, 5, а ψ_m — максимальное значение функции тока в области). При $Q>0{,}85$ (см., например, фиг. 1, *е*) ядро захвата помещается в центре канала, а встречные потоки исчезают.

Увеличение амплитуды волны при фиксированном волновом числе приводит к тому, что область, в которой движется захваченная волной жидкость, занимает все большую долю объема канала. Поэтому при достаточно больших значениях ε, когда область захвата распространяется почти на весь объем канала, захват второго типа практически смыкается с захватом первого типа, приближаясь к «тривиальному» захвату, имеющему место при полном пережатии канала.

Расчеты показывают, что при Re=0 захват второго типа может наблюдаться лишь при достаточно больших значениях параметров волны α и ε. Например, при $\varepsilon=0{,}4$ область изменения α, в которой возможен захват второго типа, ограничена снизу значением $\alpha=5$; при $\alpha=10$ явление захвата ограничено по амплитуде и наблюдается в интервале $\varepsilon\geqslant0,2$.

Возможность появления нового типа захвата существует и при $\mathrm{Re}\neq0$. Для примера на фиг. 3, *а—в* показан вид линий тока в подвижной системе отсчета для $\mathrm{Re}=100$, $\alpha=10$, $\varepsilon=0,4$ и величины расхода $Q=0,1$; 0,4; 0,5.

Основные расчеты проводились на сетке 20×20. Проверочные расчеты на более мелких сетках 30×30 и 40×20 не привели к каким-либо существенным изменениям в структуре течения.

Автор благодарит Е. М. Жуховицкого и Г. И. Бурдэ за внимание к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Регирер С. А.* О движении вязкой жидкости в трубке с деформирующейся стенкой.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 4, с. 202–204.
2. *Регирер С. А., Скобелева И. М.* Течение вязкой жидкости в пористой трубке с деформирующейся стенкой.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 3, с. 118–131.
3. *Jaffrin M. Y., Shapiro A. H.* Peristaltic pumping.– Ann. Rev. Fluid Mech., 1971, v. 3, p. 13–36. (Рус. перев. *Джеффрин М., Шапиро А.* Перистальтическое прокачивание.– В кн.: Механика, 1972, № 5, с. 88–108).
4. *Tong P., Vawter D.* An analysis of peristaltic pumping.– J. Appl. Mech., 1972, v. 39, № 4, p. 857–862. (Рус. перев. *Дун, Ваутер.* Анализ перистальтического перекачивания.– Тр. Амер. об-ва инж.-мех. Сер. Е. Прикл. мех., 1972, № 4, с. 1–7).
5. *Brown T. D., Hung T. K.* Computational and experimental investigations of two-dimensional nonlinear peristaltic flows.– J. Fluid Mech., 1977, v. 83, № 2, p. 249–272.
6. *Заико В. М., Старобин И. М., Уткин А. В.* Численное моделирование движения вязкой жидкости (крови) в трубке с активно деформирующейся стенкой.– Механика композитных материалов, 1979, № 3, с. 515–523.
7. *Левина Г. В.* Численное исследование конечно-амплитудного перистальтического прокачивания.– В кн.: Конвективные течения. Вып. 1, Пермь, 1979, с. 100–105.
8. *Shapiro A. H., Jaffrin M. Y., Weinberg S. L.* Peristaltic pumping with long wavelengths at low Reynolds number.– J. Fluid Mech., 1969, v. 37, № 4, p. 799–825.
9. *Richards C. W., Crane C. M.* Pressure marching schemes that work.– Inter. J. Numer Meth. Eng., 1980, v. 15. № 4, p. 599–610.
10. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.

Пермь

Поступила в редакцию
29.IV.1982