

УДК 519.34+532.54

## ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ В ПОЛОСТЯХ ВРАЩЕНИЯ

ШЕТУХИН В. Л., ШМАКОВ В. П.

Задача о собственных колебаниях жидкости в осесимметричных полостях вращения достаточно полно изучена в [1-5], где для ее решения в общем случае используется вариационный метод. Анализ численных результатов с использованием вариационного метода показывает, что для достижения приемлемой точности приходится удерживать значительное число координатных функций, что связано с решением матричной задачи на собственные значения высокого порядка, особенно это относится к случаю, когда необходимо определить несколько собственных частот и форм колебаний.

В настоящей статье развивается метод работы [6], в котором искомый потенциал скорости ищется в виде суммы двух потенциалов. Первый потенциал (базовый) является решением задачи о собственных колебаниях жидкости в полости, свободная поверхность которой совпадает со свободной поверхностью исходной полости, а второй (корректирующий) — выбирается в виде системы гармонических функций, которая полна и ортогональна на смоченной поверхности полости.

В качестве примера анализируются полости вращения, подробное исследование численных результатов приводится для сферической полости. Как показывает численный анализ, достаточно точный результат при определении какой-либо частоты получается при удержании одного члена базовой задачи, а уточнение производится только корректирующим потенциалом, что позволяет ограничиться решением алгебраического уравнения первой степени относительно квадрата частоты.

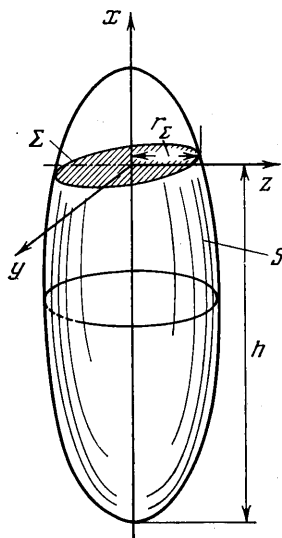
**1. Постановка задачи.** Рассмотрим сосуд, образованный поверхностью вращения с осью симметрии  $x$ , коллинеарной градиенту поля массовых сил. Начало координат поместим в центре свободной поверхности жидкости (см. фиг. 1). Обозначим через  $S$  смоченную поверхность сосуда, через  $\Sigma$  — свободную поверхность жидкости с радиусом  $r_\Sigma$ , через  $Q$  — область занятую жидкостью;  $R_m$  — радиус миделевого сечения полости;  $h_1$  — высота базовой полости;  $h$  — глубина жидкости.

Собственные колебания жидкости описываются следующей системой уравнений [3]:

$$\Delta\Phi=0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\Big|_s=0;$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\Big|_\Sigma=\lambda\Phi; \quad \lambda=\frac{\omega_n^2}{j} \quad (1.1)$$

Здесь  $\nu$  — орт внешней нормали к поверхности  $S+\Sigma$ ;  $\omega_n$  — частота собственных колебаний жидкости;  $j$  — составляющая градиента поля массовых сил;  $\Phi$  — скалярная



Фиг. 1

функция, определяющая потенциал скорости или смещений жидкости в исходной полости.

Решение задачи будем искать в виде [6]

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \psi_m \quad (1.2)$$

Здесь  $A_n$  и  $B_m$  — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Пусть  $\{\varphi_n\}$  — система собственных функций базовой задачи, за которую примем систему собственных функций, описывающих колебания жидкости в полости, радиус которой равен радиусу свободной поверхности  $r_\Sigma$ . В частности, за базовую систему функций можно выбрать систему собственных функций для цилиндра конечной глубины. Система функций  $\{\varphi_n\}$  является гармонической и удовлетворяет условиям [5]

$$\left. \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \right|_{r=r_\Sigma} = 0; \quad \left. \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \right|_{\Sigma} = \kappa_n \varphi_n; \quad \int_{\Sigma} \varphi_n \varphi_k dS = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ a_n, & n = k \end{cases} \quad (1.3)$$

где  $\kappa_n$  — собственные значения задачи (1.3).

Относительно системы гармонических функций  $\{\psi_m\}$  потребуем, чтобы ее нормальные производные были линейно независимы, полны и ортогональны на смоченной поверхности

$$\int_S \frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} \frac{\partial \psi_l}{\partial \nu} dS = \begin{cases} 0, & m \neq l \\ b_m, & m = l \end{cases} \quad (1.4)$$

Подставим разложение (1.2) в граничные условия на свободной и смоченной поверхностях (1.1), умножим полученные уравнения на  $\varphi_k$  и  $\partial \psi_l / \partial \nu$  и проинтегрируем по  $\Sigma$  и  $S$  соответственно. В результате с учетом условий (1.3) и (1.4) для определения  $A_n$  и  $B_m$  получим

$$A_n (\kappa_n - \lambda) a_n + \sum_{m=1}^{\infty} B_m (F^{mn} - \lambda F_1^{mn}) = 0 \quad (1.5)$$

$$B_m b_m + \sum_{n=1}^{\infty} A_n F_s^{mn} = 0$$

$$F^{mn} = \int_{\Sigma} \frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} \varphi_n dS, \quad F_1^{mn} = \int_{\Sigma} \psi_m \varphi_n dS, \quad F_s^{mn} = \int_S \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \cdot \frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} dS$$

Если ограничиться конечным числом членов, то решение системы (1.5) не представляет затруднений. Оно сводится к описанию собственных значений матрицы. С этой целью исключим  $B_m$  из второго уравнения системы (1.5) и подставим в первое. В результате этого придем к уравнению

$$\sum_{n=1}^N (\alpha_{nk} - \lambda \beta_{nk}) A_n = 0 \quad (1.6)$$

$$\alpha_{nk} = a_n \kappa_n - \sum_{m=1}^M \frac{F_s^{mn} F^{mk}}{b_m}; \quad \beta_{nk} = a_n - \sum_{m=1}^M \frac{F_s^{mn} F_1^{mk}}{b_m}$$

Здесь в отличие от [6] на систему  $\{\psi_m\}$  не накладывается никаких дополнительных условий, кроме тех, которые были перечислены выше.

2. Связь вышеприведенной методики с вариационным методом Ритца-Грефтца. Систему алгебраических уравнений, аналогичную (1.5), можно получить из вариаци-

ционной формулировки задачи. Как будет показано ниже, эти системы тождественно совпадут, если на координатные функции базовой и корректирующей задачи наложить ряд дополнительных условий. Сформулируем вариационную задачу о колебаниях жидкости в полостях вращения.

Рассмотрим тело, образованное вращением контура  $\Gamma=L_x+L_s$  вокруг оси  $x$ , где  $L_x$  — контур, совпадающий с частью контура меридионального сечения полости, проходящего через смоченную поверхность полости. Предположим, что контур  $\Gamma$  области  $G$  является кусочно-гладким. Допустимыми функциями будем считать всякие функции, непрерывные вместе со своими производными первого порядка в области  $G$ , включая и контур  $\Gamma$ , и удовлетворяющие граничному условию

$$\varphi_n(x, r)|_{r=0} < \infty; \quad \psi_m(x, r)|_{r=0} < \infty$$

Среди такого рода функций будем искать ту, которая дает минимальное значение функционалу [5]

$$I(\varphi) = \int_G \left[ r(\varphi_x^2 + \varphi_r^2) + \frac{1}{r} \varphi^2 \right] dx dr - \lambda \int_{L_x} r \varphi^2 dS \quad (2.1)$$

где  $dS$  — элемент дуги контура  $L_x$ . Используя идею Трейтца, решение  $\Phi(x, r)$  представим в виде семейства функций, зависящих от нескольких параметров

$$\Phi = \Phi(x, r, A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_m) \quad (2.2)$$

таких, что при всех значениях параметров удовлетворяется уравнение Лапласа. Класс допустимых функций ограничивается теперь функциями семейства (2.2), и среди них находится та, которая дает минимум функционалу  $I(\Phi)$ . Это условие приводит к двум системам однородных алгебраических уравнений относительно параметров  $A_k$  и  $B_l$

$$\frac{\partial I(\Phi)}{\partial A_k} = 0; \quad \frac{\partial I(\Phi)}{\partial B_l} = 0, \quad k=1, 2, \dots, n; \quad l=1, 2, \dots, m \quad (2.3)$$

Решение представим в виде (1.2)

$$\Phi(x, r) = \sum_{n=1}^N A_n \varphi_n + \sum_{m=1}^M B_m \psi_m \quad (2.4)$$

Для определения коэффициентов  $A_n$  и  $B_m$  подставим (2.4) в (2.1) и после преобразований окончательно получим

$$\sum_{n=1}^N A_n [F_S^0 + (\kappa_n - \lambda) a_n] + \sum_{m=1}^M B_m [F_S + F_Z^{mn} - \lambda F_1^{mn}] = 0 \quad (2.5)$$

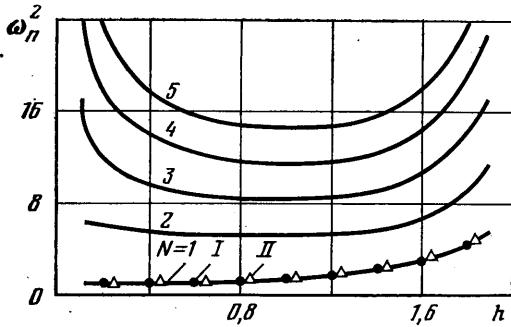
$$\sum_{n=1}^N A_n [F_S^{mn} + (\kappa_n - \lambda) F_Z^1] + \sum_{m=1}^M B_m [b_m + F_Z^2 - \lambda F_Z^3] = 0$$

$$\begin{aligned} F_S^0 &= \int_S \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} \varphi_k dS; & a_n &= \int_Z r \varphi_n \varphi_k dr; & F_S^1 &= \int_S \frac{\partial \psi_m}{\partial v} \varphi_k dS \\ F_Z^{mn} &= \int_Z r \frac{\partial \psi_m}{\partial v} \varphi_k dr; & F_1^{mn} &= \int_Z r \psi_m \varphi_n dr; & F_S^{mn} &= \int_S \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} \psi_l dS \\ F_Z^1 &= \int_Z r \varphi_n \psi_l dr; & b_m &= \int_S \frac{\partial \psi_m}{\partial v} \psi_l dS; & F_Z^2 &= \int_Z r \frac{\partial \psi_m}{\partial v} \psi_l dS \end{aligned} \quad (2.6)$$

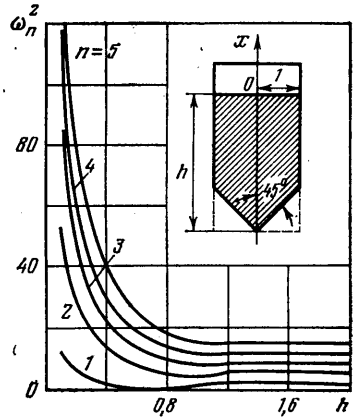
Таким образом, найденная вариационным методом система однородных алгебраических уравнений (2.6) будет тождественно совпадать с системой (1.5), если интегралы  $F_S^0, F_S^1, F_Z^1, F_Z^2, F_Z^3$  из (2.6) будут равны нулю, а это возможно в случае, если на системы базовых и корректирующих функций наложить условия (1.3), (1.4) и

$$\psi_l|_Z = 0; \quad \varphi_n|_S = 0; \quad \psi_m = \frac{\partial \psi_m}{\partial v} \Big|_S \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.6), получаем систему уравнений, эквивалентную (1.5).



Фиг. 2



Фиг. 3

**3. Некоторые численные результаты.** В качестве примеров, иллюстрирующих возможности данного метода, рассмотрим решение задачи о колебаниях жидкости в сферической полости и в цилиндрической полости с коническим днищем с углом полураствора  $45^\circ$ .

Для удовлетворения условий (1.3) выберем систему базовых и корректирующих функций в виде [5]

$$\varphi_n = \frac{r_x \operatorname{ch}[\xi_n(x+h)]}{\xi_n \operatorname{sh}(\xi_n h_1)} \frac{J_1(\xi_n r)}{J_1(\xi_n)} \cos \theta \quad (3.1)$$

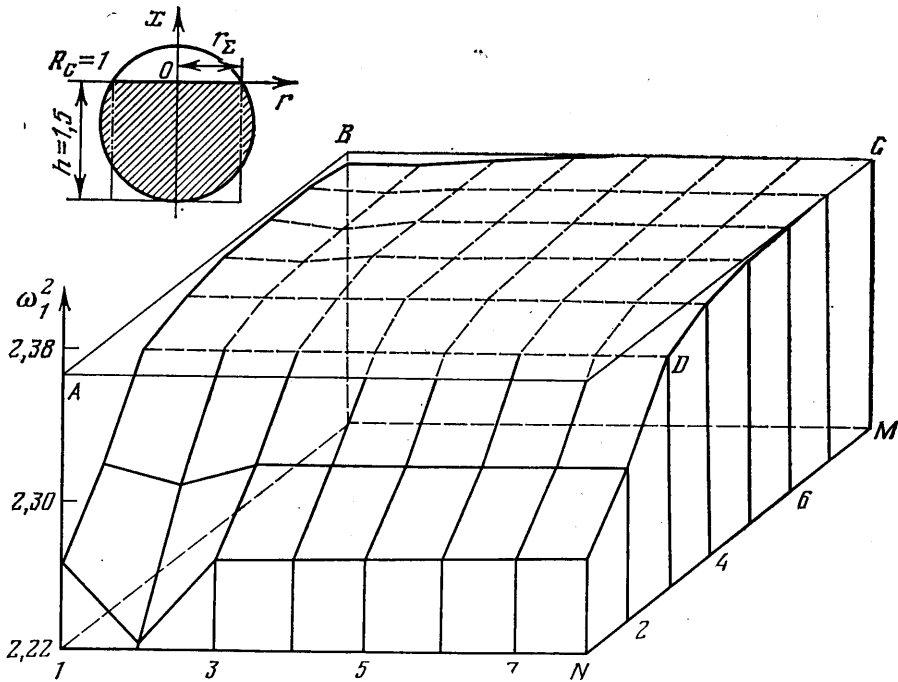
$$W_m(x, r) = \frac{2(m-1)!}{(m+1)!} R^m P_m; \quad R = \sqrt{x^2 + r^2}$$

Здесь  $\xi_n$  — корни уравнения  $J_1'(\xi_n) = 0$ ;  $x, r, \theta$  — цилиндрические координаты;  $P_m$  — присоединенные полиномы Лежандра первого рода, первого порядка. Переменные  $x, r, h$  в базовом потенциале  $\varphi_n$  отнесены к радиусу свободной поверхности  $r_0$ .

Для удовлетворения условию (1.4) систему корректирующих функций (3.1) предварительно необходимо проортгонализовать. Система базовых функций (3.1) удовлетворяет условию (1.3).

На фиг. 2 приведены значения пяти собственных частот колебаний жидкости  $\omega_n^2$  в сферической полости в зависимости от безразмерной глубины жидкости  $h_1$  при условии, что высота базового цилиндра  $h_1 = h$ . Сплошной линией показаны значения, полученные настоящим методом.

M N	$\omega_1^2$		$\omega_2^2$		$\omega_3^2$	
	I	II	I	II	I	II
1	2,141	8,000	—	—	—	—
2	2,267	3,763	6,155	—	—	—
3	2,338	2,778	6,197	866,4	—	—
4	2,355	2,475	6,269	103,3	9,885	—
5	2,360	2,385	6,323	29,63	9,873	$0,79 \cdot 10^5$
6	2,361	2,365	6,352	13,94	9,920	4233,6
7	2,362	2,364	6,364	9,910	9,975	591,39
8	2,363	2,364	6,364	7,352	10,00	141,86
9	2,363	2,363	6,364	6,692	10,04	50,735
10	2,363	2,363	6,364	6,459	10,04	25,136



Фиг. 4

Значения 1 получены вариационным методом [4], а значения 2 — экспериментально [2]. На фиг. 3 приведены значения пяти собственных частот колебаний  $\omega_n^2$  в зависимости от глубины жидкости  $h$  в цилиндрической полости с коническим дном с углом полураствора  $\theta = 45^\circ$ . Как указывалось выше, развитый в работе метод обладает хорошей устойчивостью счета и позволяет получить решение задачи о свободных колебаниях жидкости, например, для случая, когда свободная поверхность жидкости мала по сравнению со смоченной, а также в случае полостей большого удлинения.

В таблице приведены значения трех собственных частот  $\omega_1^2$ ,  $\omega_2^2$  и  $\omega_3^2$ , полученные настоящим методом I в зависимости от числа  $M$  корректирующих функций ( $N=5$ ), при глубине  $h=1,5$ . Рядом (II) показаны значения, полученные методом Ритца — Трефтца в зависимости от числа приближений  $N$ , рассчитанные по программе Е. М. Стажкова.

Анализ численных результатов показал следующее: в случае, когда смоченная поверхность полости развита сильно, то на сходимость последовательностей частот  $\omega_n^2$  в большей мере влияет число корректирующих функций, а в случае, когда смоченная поверхность не сильно развита, то число базовых функций —  $N$ .

Для полостей, у которых площадь свободной поверхности уменьшается с увеличением относительной глубины жидкости, настоящий метод дает последовательности собственных значений, стремящихся к своим пределам снизу. На фиг. 4 приведена сходимость первого тона колебаний жидкости в случае сферической полости при  $h=1,5$  в зависимости от числа базовых и корректирующих  $N$  и  $M$  соответственно. Как видно из фиг. 4, на сходимость в большей мере влияет число корректирующих функций  $M$ .

В случае выбора в качестве базового потенциала выражения (3.1) собственные значения, получаемые уже из первых 2–3 приближений, отличаются от точного решения (плоскость  $ABCD$  на фиг. 4) примерно на 5%.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Богоряд И. Б.* К решению задачи о колебаниях жидкости, частично заполняющей полость, вариационным методом. — ПММ, 1962, т. 26, № 6, с. 1122–1127.
2. *Микишев Г. Н., Рабинович Б. И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 532 с.
3. *Моисеев Н. Н., Петров А. А.* Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1966. 269 с.
4. *Стажков Е. М.* Алгоритмы численного решения задачи по определению частот и присоединенных масс жидкости при расчете колебаний конструкций с жестким резервуаром. — В кн.: Исслед. по теории сооруж. Вып. 20. М.: Стройиздат, 1974, с. 62–73.
5. *Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. Киев: Наук. думка, 1969. 250 с.
6. *Шмаков В. П.* К вычислению собственных колебаний жидкости в неподвижных сосудах. — В кн.: Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1978, с. 157–162.

Москва

Поступила в редакцию  
20.IV.1982