МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1983

УДК 532.51.011

К ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ МАЛОГО ТЕЛА В ВОЗМУЩЕННОМ ПОТОКЕ

ЯКИМОВ Ю. Л.

Классическая задача о гидродинамических реакциях, действующих на тело произвольной формы, движущееся в покоящейся жидкости [1], обобщена на случай ускоренного поступательного потока в [2]. При этом в выражениях для гидродинамических реакций форма тела представлена только коэффициентами присоединенных масс λ_{ij} и объемом тела Ω. В общем случае движения тела в непоступательном потоке при определении гидродинамических реакций форма тела не может быть представлена конечным набором коэффициентов. Существенное упрощение возникает в постановке малого тела, которая снова приводит к выражениям для силы и момента, аналогичным классическим. Задача о движении малого тела в возмущенном непоступательном потоке поставлена в [3], а с учетом деформации тела – в [4]. Обзор последующих работ, содержащих эту постановку, приведен в [5].

Целью настоящей работы является уточнение постановки задачи о движении малого тела. Порядок малости членов в указанных работах оценивался только в зависимости от степени малого параметра – размера тела. В статье показано, что если дополнительно потребовать, чтобы в окончательное выражение для реакций входили только главные члены, содержащие компоненты поступательной и угловой скоростей v_i и ω_i, а также члены, описывающие структуру потока, то для гидродинамической реакции оказывается справедливым выражение, приведенное в [3]. Оценка членов выполнена на основе анализа размерностей. Эти соображения уже привлекались автором для частных примеров [6, 7].

Рассмотрим тело с характерным размером d и сферу радиуса L, охватывающую тело. Пусть потенциал течения между телом и сферой является гармонической функцией. Тогда все особенности течения могут быть расположены только внутри тела и вне указанной сферы. Абсолютный потенциал течения Φ в системе координат, связанной с телом, может быть представлен в виде

$$\Phi=\varphi_0+W,\qquad \operatorname{grad}\varphi_0\to 0\quad (|x_i|\to\infty)$$

где x_i – подвижные координаты, φ_0 – потенциал от особенностей внутри или на поверхности тела, например потенциал простого и двойного слоя, если воспользоваться формулой Грина, а W – потенциал, не имеющий особенностей внутри сферы радиуса L.

При $W=0$ получим классическую постановку задачи о движении тела в безграничной покоящейся жидкости. Движение тела при $W\neq 0$ назовем движением в возмущенном потоке. Это возмущение может быть связано с особенностями, расположенными далеко от тела, и движением других тел, расположенных вне указанной сферы, или связано, например, с наличием вблизи тела плоской границы, влияние которой может быть учтено введением зеркально расположенных особенностей.

Рассмотрим ряд Тейлора для потенциала W в системе координат, связанной с телом. При этом в общем случае вследствие движения системы координат, даже если W не зависит от времени, коэффициенты разложения его в ряд Тейлора будут функциями времени.

$$W=W_0(t)+u_i(t)x_i+a_{ij}(t)x_ix_j+b_{\alpha\beta\gamma}(t)x_1^{\alpha}x_2^{\beta}x_3^{\gamma}\tag{1}$$

Здесь и ниже используется запись суммирования по дважды повторяющимся индексам, пробегающим значения $i, j=1, 2, 3$; $\alpha, \beta, \gamma=0, 1, 2, 3, \ldots$; $\alpha+\beta+\gamma>2$.

В качестве характерного размера L потока с потенциалом W возьмем радиус сходимости ряда (1). Пусть точка потока $x_i=0$ не является исключительной, так что имеют место следующие соотношения:

$$L^2|a_{ij}|\geqslant L^{\alpha+\beta+\gamma}|b_{\alpha\beta\gamma}|; \qquad L^2|\dot{a}_{ij}|\geqslant L^{\alpha+\beta+\gamma}|\dot{b}_{\alpha\beta\gamma}| \tag{2}$$

Введем $\varepsilon=d/L$ и $\delta_1=D/L$, $\delta_2=d/D$. Предположим, что размер тела $d\ll L$. Тогда можно выбрать D таким, чтобы $\delta_1\ll 1$ и $\delta_2\ll 1$ (например, положив $D^2=dL$). Постановка малого тела заключается в том, что если рассмотреть последовательность течений, в которых $\varepsilon\to 0$, $\delta_1\to 0$ и $\delta_2\to 0$, то можно ограничиться конечным отрезком ряда (1).

Для твердого тела условие непротекания на его поверхности имеет вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=(\mathbf{vn})+(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}) \tag{3}$$

где $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ — соответственно абсолютные скорость и угловая скорость тела с компонентами $v_i(t)$ и $\omega_i(t)$ в связанной с телом системе координат, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности тела с компонентами n_i ($i=1, 2, 3$). Подставив (1), (2) в (3), получим граничное условие для φ_0 в виде

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}=(v_i-u_i)n_i+\omega_i(x_{i+1}n_{i+2}-x_{i+2}n_{i+1})-a_{ij}\frac{\partial}{\partial n}x_ix_j-$$
$$-b_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial n}x_1^{\alpha}x_2^{\beta}x_3^{\gamma} \tag{4}$$

где $x_{3+i}=x_i$, $n_{3+i}=n_i$.

Так как в системе координат, связанной с телом, множители при $v_i(t)$, $u_i(t)$, $\omega_i(t)$, $a_{ij}(t)$, $b_{\alpha\beta\gamma}(t)$ в (4) не зависят от времени, можно ввести систему функций φ_i, φ_{i+3}, φ_{ij} $\varphi_{\alpha\beta\gamma}$, являющихся функциями только этих координат и удовлетворяющих условиям

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}=n_i, \qquad \frac{\partial\varphi_{i+3}}{\partial n}=x_{i+1}n_{i+2}-x_{i+2}n_{i+1}$$
$$\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial n}=-a_{ij}x_ix_j, \qquad \frac{\partial\varphi_{\alpha\beta\gamma}}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial n}x_1^{\alpha}x_2^{\beta}x_3^{\gamma}$$
$$\operatorname{grad}\varphi_i\to 0, \qquad \operatorname{grad}\varphi_{i+3}\to 0, \qquad \operatorname{grad}\varphi_{ij}\to 0$$
$$\operatorname{grad}\varphi_{\alpha\beta\gamma}\to 0 \qquad (|x_i|\to\infty) \tag{5}$$

Суммарный потенциал течения примет вид суммы одночленов с разделенными переменными

$$\Phi=[v_i(t)-u_i(t)]\varphi_i(x_1, x_2, x_3)+\omega_i(t)\varphi_{i+3}(x_1, x_2, x_3)+$$
$$+u_i(t)x_i+a_{ij}(t)(\varphi_{ij}+x_ix_j)+b_{\alpha\beta\gamma}(t)[\varphi_{\alpha\beta\gamma}(x_1, x_2, x_3)+x_1^{\alpha}x_2^{\beta}x_3^{\gamma}] \tag{6}$$

Аналогичное представление будет иметь место при движении тела (не обязательно малого) в потоке с особенностями переменной интенсивности, расположенными в фиксированных точках в системе координат, связанной с телом.

Для вычисления давления на поверхности тела воспользуемся интегралом Коши — Лагранжа в подвижной системе координат [2], записав его в виде

$$p=\rho\left[-\frac{\partial\Phi}{\partial t}+(\mathbf{v}-\mathbf{u}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\operatorname{grad}\Phi+\mathbf{u}\operatorname{grad}\Phi-\frac{1}{2}(\operatorname{grad}\Phi)^2\right]+f(t) \tag{7}$$

Подставив (6) в (7), получим давление в виде линейного выражения от $\dot{u}_i$, $\dot{v}_i-\dot{u}_i$, $\dot{\omega}_i$, $\dot{a}_{ij}$, $\dot{b}_{\alpha\beta\gamma}$ и квадратичной формы от параметров u_i, v_i-u_i, ω_i, a_{ij}, $b_{\alpha\beta\gamma}$ с коэффициентами, зависящими только от координат. Аналогичные выражения, но с постоянными коэффициентами, зависящими только от формы тела, будут иметь место для суммарной силы $\mathbf{F}$ и момента $\mathbf{M}$

$$\mathbf{F}=\int\limits_{s} p\mathbf{n}ds, \qquad \mathbf{M}=\int\limits_{s} p(\mathbf{r}\times\mathbf{n})\,ds \tag{8}$$

Действительно, множители, зависящие от времени в выражении для p, могут быть вынесены из под знака интегралов (8). Интегрируя затем подынтегральные выражения, не зависящие от времени, получим постоянные коэффициенты.

Таким образом, только из математической формулировки задачи следует возможность представления силы и момента, действующих на малое тело в возмущенном потоке, в виде суммы конечного числа членов (для конечного отрезка ряда Тейлора), коэффициенты которых зависят только от геометрии тела. Однако прямая реализация рассмотренного пути для получения $\mathbf{F}$ и $\mathbf{M}$ приводит к труднообозримым выражениям. Так, если рассмотреть только градиенты скоростей возмущенного потока, когда $b_{\alpha\beta\gamma}=0$, учитывая гармоничность функции W, получим помимо 6 компонент v_i-u_i, ω_i еще 5 коэффициентов a_{ij}, так что только квадратичная форма будет содержать $(6+5)^2=121$ коэффициент.

Отсюда ясно, что выражения для гидродинамических реакций, например в виде дифференциалов функции Лагранжа [8], еще результата не содержат. Результатом может быть максимально простое выражение, не содержащее несущественных членов.

В рамках этой постановки можно указать два подхода. Первый подход связан с представлением гидродинамических реакций в виде рядов по степеням малого параметра ε. С этим подходом связаны все опубликованные работы. Второй подход предлагается здесь и состоит в том, что в окончательных выражениях для реакций сохраняются только члены низшего порядка малости по ε при каждом из кинематических параметров и их комбинаций. При этом множители при различных кинематических параметрах могут иметь разный порядок малости по ε. Этот подход представляется более целесообразным, так как позволяет получить максимально простые выражения, содержащие главные члены при любых значениях кинематических параметров.

В качестве абсолютной системы координат удобно ввести систему координат ξ_i, перемещающуюся поступательно со скоростью $\mathbf{u}_0(t)$, такой, что в данный момент t_0 $\mathbf{u}_0(t_0)=\mathbf{u}(t_0)$, а $\dot{\mathbf{u}}_0$ выражается через производные относительно неподвижной системы координат в виде $\dot{u}_{0i}=\partial u_i/\partial t+\mathbf{V}\,\mathrm{grad}\,u_i$, где значения $\mathbf{u}(t)$, $\partial\mathbf{u}/\partial t$, $\partial u_i/\partial x_i$ берутся в точке, которая будет соответствовать при $t=t_0$ началу связанной с телом системы координат. Введем потенциалы течения φ и w относительно этой системы координат. С потенциалами Φ, W они связаны соотношениями $\Phi=\varphi+u_i\xi_i$, $W=w+u_i\xi_i$, при этом $\mathrm{grad}\,\Phi=\mathrm{grad}\,\varphi+\mathbf{u}$. Для частной производной по времени относительно неподвижной системы координат имеем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}\bigg|_{\xi_i=\mathrm{const}}+\mathbf{u}_0\,\mathrm{grad}\,\Phi=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\xi_i\dot{u}_{0i}+\mathbf{u}\,\mathrm{grad}\,\varphi+\mathbf{u}^2 \tag{9}$$

Интеграл Коши — Лагранжа в системе координат ξ_i с учетом (9) запишется в виде

$$\frac{p}{\rho}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\Phi)^2+f_1(t)=\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{\xi_i=\mathrm{const}}-\frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\varphi)^2+$$
$$+\xi_i\dot{u}_{0i}+f_2(t) \tag{10}$$

Граничное условие (3) на поверхности тела, движущегося относительно системы координат ξ_i со скоростями $\mathbf{v}-\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\omega}$, будет иметь вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=(\mathbf{v}-\mathbf{u})\mathbf{n}+(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}) \tag{11}$$

Из (10) и (11) видно, что выражение для давления и граничное условие в системе координат ξ_i аналогично соответствующим выражениям для неподвижной системы координат. Отличие состоит в том, что в выражении для давления имеется дополнительный член $\xi_i\ddot{u}_{0i}$, а в граничном условии вместо абсолютной скорости $\mathbf{v}$ стоит относительная скорость $\mathbf{v}-\mathbf{u}$. Следовательно, для силы и момента в связанной с телом системе координат можно формально воспользоваться соответствующими выражениями из [1], подствив в них $\mathbf{v}-\mathbf{u}$ вместо v и учтя еще дополнительную силу, аналогичную силе Архимеда, которая является результатом интегрирования по поверхности тела слагающей давления $\xi_i\ddot{u}_{0i}$:

$$\mathbf{F}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{B}+\rho\int_s\left[\frac{(\operatorname{grad}\varphi)^2}{2}\mathbf{n}-\operatorname{grad}\varphi(\operatorname{grad}\varphi\cdot\mathbf{n})\right]dS-\rho\Omega\dot{\mathbf{u}}_0 \tag{12}$$

$$\mathbf{M}=-\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t}-\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}-(\mathbf{v}-\mathbf{u})\times\mathbf{B}-\rho\int_s\mathbf{r}\times[\operatorname{grad}\varphi(\operatorname{grad}\varphi\cdot\mathbf{n})]dS+M_{0m}\rho\Omega\dot{\mathbf{u}}_0 \tag{13}$$

$$\mathbf{B}=-\rho\int_s\varphi\mathbf{n}ds,\quad \mathbf{J}=-\rho\int_s\varphi(\mathbf{r}\times\mathbf{n})ds$$

где s — поверхность тела, S — поверхность сферы диаметра D. Так как в ряде Тейлора для $w(\xi_i,t)=W-\xi_iu_i$ отсутствует линейный член разложения, то, учитывая (11), аналогично (6) имеем

$$\varphi=(v_i-u_i)\varphi_i+\omega_i\varphi_{i+3}+a_{ij}(\varphi_{ij}+x_ix_j)+b_{\alpha\beta\gamma}[\varphi_{\alpha\beta\gamma}+x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma] \tag{14}$$

Таким образом, введение промежуточной системы координат ξ_i и выделение в выражениях гидродинамических реакций силы типа Архимеда позволило получить выражение для потенциала φ, содержащее явно параметр $\mathbf{u}$ только в виде разности $\mathbf{v}-\mathbf{u}$. Кроме этой разности поток с потенциалом W представлен в (12), (13) только коэффициентами a_{ij} и $b_{\alpha\beta\gamma}$.

Интегралы по поверхности тела s в (12), (13) дают коэффициенты присоединенных масс [1], а вычисление интегралов по S оказывается возможным в связи с $\delta_2\to0$, так что достаточно воспользоваться разложением φ_i, φ_{i+3}, φ_{ij} в ряды по степеням $1/r$ [9, 10].

Априорная оценка членов может быть выполнена на основе анализа размерностей. Действительно, параметры в (14) имеют размерности

$$[v_i-u_i]=\frac{L}{T};\quad[\omega_i]=\frac{1}{T};\quad[a_{ij}]=\frac{1}{T};\quad[b_{\alpha\beta\gamma}]=\frac{1}{TL^{\alpha+\beta+\gamma-2}}$$

Поэтому заранее можно судить о размерности геометрических коэффициентов, стоящих при их производных по времени или при их парных производных в (12), (13). Но геометрические коэффициенты определяются только формой тела и, следовательно, зависят только от характерного размера d. Степень d в каждом коэффициенте дает порядок малости члена и однозначно определяется размерностью коэффициента. Так, например, порядок малости членов, содержащих $\omega_ib_{\alpha\beta\gamma}$, более высокий, нежели члена с ω_ia_{ij}, а так как имеет место (2), то первым можно пренебречь. Можно показать, что произведение $b_{\alpha\beta\gamma}$ на любой из остальных параметров будет давать пренебрежимо малый член. Аналогично выражения, содержащие $\dot{b}_{\alpha\beta\gamma}$ в $\partial\mathbf{B}/\partial t$ и $\partial\mathbf{J}/\partial t$, несущественны по сравнению с членами, содержащими a_{ij}.

Таким образом, достаточно рассмотреть задачу с линейным распределением скоростей в потоке, положив $b_{\alpha\beta\gamma}=0$. Выражение для силы в линейном потоке получено в [9] [1].

$$\mathbf{F}=-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}-\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{B}-\rho\Omega\dot{\mathbf{u}}_0-(\mathbf{B}\,\mathrm{grad})\,\mathbf{u}$$

$$B_i=\lambda_{ij}(v_j-u_j)+\lambda_{i,j+3}\omega_j \qquad (15)$$

Если учесть разницу в системах координат, можно видеть, что (15) отличается от выражения для силы, полученного в [3], только членами, содержащими $\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{grad}\,u_j$. Покажем, что эти члены несущественны, если рассматривать движение вне малых окрестностей точек с $\mathbf{u}=0$. Действительно, вне этих окрестностей $|\mathbf{u}|\sim L|\mathrm{grad}\,u_j|$. Тогда при $|\boldsymbol{\omega}|\lessgtr|\mathrm{grad}\,u_j|$ имеем оценку

$$\Omega|\dot{u}_j|\sim\Omega|\mathbf{u}\,\mathrm{grad}\,u_j|\sim d^3L(\mathrm{grad}\,u_j)^2\gtrsim$$

$$\gtrsim d^3L|\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{grad}\,u_j|\gg d^4|\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{grad}\,u_j|$$

а при $|\boldsymbol{\omega}|\gg|\mathrm{grad}\,u_j|$

$$d^4|\omega_i\omega_j|\gg d^4|\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{grad}\,u_j|$$

Таким образом, либо третий член, либо некоторые слагаемые, содержащиеся во втором члене выражения (15), имеют существенно бо́льшую величину по сравнению с рассматриваемым.

Отметим, что для сферы $\boldsymbol{\omega}$ вообще несущественно и (15) совпадает с [3, 8, 9, 12]. Выражение для момента в линейном потоке приводится в [8, 13]. Однако в [8] оно содержит не все члены $\sim d^5$, соответствующие потоку с линейными распределениями скоростей.

Выражение для момента в [13] существенно сложнее по сравнению с выражением для силы (15), так как оно помимо известных λ_{ij} содержит еще 45 коэффициентов присоединенных масс. Но если относительная скорость не очень мала $v_i-u_i\gtrsim u_i$, то члены, содержащие $a_{ij}(v_k-u_k)$, $\omega_k a_{ij}$, a_{ij}, будут несущественны по сравнению с членами вида $(v_i-u_i)(v_j-u_j)$, $\omega_k(v_i-u_i)$, $\dot{v}_i-\dot{u}_i$, так как из соображений размерности следует, что при последних стоят множители более низкого порядка по d. При этом справедливо выражение для момента, полученное в [3], содержащее только обычные коэффициенты присоединенных масс:

$$\mathbf{M}=-\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}-\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}-(\mathbf{v}-\mathbf{u})\times\mathbf{B}+M_{0m}\rho\Omega\dot{\mathbf{u}}_0$$

$$J_i=\lambda_{i+3,\,j}(v_j-u_j)+\lambda_{i+3,\,j+3}\omega_j \qquad (16)$$

Из (15) и (16) следует, что учет неравномерности потока $\mathrm{grad}\,u_i\neq0$ по сравнению со случаем ускоренного поступательного потока [2] приводит только к уточнению смысла производных.

Таким образом, гидродинамические реакции, действующие на малое тело, движущееся в возмущенном потоке, могут быть определены по формулам (15), (16), содержащим главные члены, связанные с неоднородностью потока. Эти выражения не требуют никаких характеристик формы тела, кроме известных коэффициентов присоединенных масс и объема тела. Сравнение с [9, 13] показывает, что эти формулы справедливы и для деформируемого тела. Следует только дополнительно учесть зависимость λ_{ij} от t.

Автор признателен С. Д. Вильховченко за обсуждение результатов работы.

[1] Это выражение появилось практически одновременно в [8, 10, 11] со ссылками на автора настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1963, с. 387.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976, с. 209.
3. *Григорян С. С., Якимов Ю. Л.* Движение тела малых размеров в воде при наличии «внешнего потока» – Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 4, с. 76–80.
4. *Якимов Ю. Л.* Уравнения движения тонкого тела в возмущенном потоке несжимаемой жидкости.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 1, с. 129–134.
5. *Вильховченко С. Д., Якимов Ю. Л.* Гидродинамические реакции, действующие на малое тело с деформирующейся поверхностью в пространственном потенциальном и плоском однородно завихренном потоках идеальной несжимаемой жидкости.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 2, с. 46–52.
6. *Якимов Ю. Л.* Движение цилиндра в произвольном плоском потоке идеальной несжимаемой жидкости.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 2, с. 202–204.
7. *Якимов Ю. Л.* Силы, действующие на малую сферу в произвольном потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости.– Научн. тр. Ин-та мех. МГУ, 1971, № 9, с. 53–56.
8. *Воинов В. В., Воинов О. В., Петров А. Г.* Гидродинамическое взаимодействие тел в идеальной несжимаемой жидкости и их движение в неоднородных потоках.– ПММ, 1973, т. 37, № 4, с. 680–689.
9. *Якимов Ю. Л.* Силы, действующие на малое тело в произвольном потоке несжимаемой жидкости, и уравнения движения двухфазной среды.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 3, с. 84–92.
10. *Бармина Л. А.* Сила, действующая на деформируемый контур, движущийся в произвольном потоке жидкости.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 1, с. 4–8.
11. *Бондаренко Л. А., Якимов Ю. Л.* Сила, действующая со стороны потока жидкости на плоское изогнутое тело кругового поперечного сечения.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 1, с. 9–12.
12. *Воинов О. В., Петров А. Г.* Функция Лагранжа газового пузырька в неоднородном потоке.– Докл. АН СССР. 1973, т. 210, № 5, с. 1036–1039.
13. *Вильховченко С. Д.* Гидродинамический момент, действующий со стороны линейного потенциального потока идеальной несжимаемой жидкости на движущееся деформирующееся тело.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 5, с. 88–93.

Москва

Поступила в редакцию
1.VI.1982