$$v_1^0 = m\Delta p_0^{-1} B(s_0;\ m,\ n-m).$$

При $m=0{,}5$, $n=3{,}5$ неполные бета-функции выражаются в конечном виде

$$B(s;\ 4,\ -1/2) = 0{,}4(1-s)^{-1/2}(16-8s-2s^2-s^3)-6{,}4$$

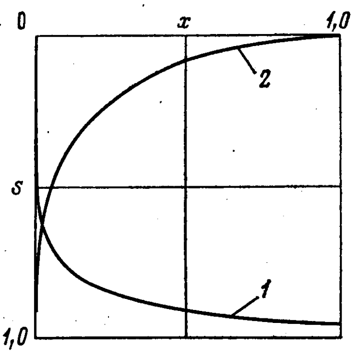
$$B(s;\ 1/2,\ 3) = 2\sqrt{s}(3s^2-10s+15)/15$$

Вычисленные при этих параметрах и $\Delta p^0=\sqrt{19}$ ($s_i=0{,}95$) распределения нефтенасыщенностей представлены на фигуре. Кривая *1* соответствует вытеснению воды нефтью, кривая *2* – нефти водой.

Легко видеть, что с увеличением перепада давления Δp общее количество капиллярно-запертой воды стремится к нулю, поскольку $\lim B(s;\ 4,\ -1/2)\to\infty$ при $s\to 1$. Напротив, общее количество капиллярно-запертой нефти S в образце с ростом Δp становится неизменным и равным величине

$$S=\int\limits_0^1 s(x)\,dx = s_1 - \int\limits_{s_0}^{s_1} x(s)\,ds =$$

$$= \int\limits_0^1 [1-B(s;\ 1/2, 3)/B(1;\ 1/2, 3)]\,ds \approx 0{,}143$$



Это количество «остаточной нефтенасыщенности» представляет собой «мертвый объем» нефти, не вытесняемый при любом темпе отбора и закачек (практически S не изменяется уж при $\Delta p^0 \geqslant 4{,}4$).

Разрабатываемые в настоящее время способы вибровоздействия на пласт с целью повышения темпов отбора нефти и нефтеотдачи пластов должны быть прежде всего направлены на устранение концевого эффекта капиллярного запирания призабойной зоны эксплуатационных скважин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие исследования по теории фильтрации в СССР (1917–1967). М.: Наука, 1969, 545 с.
2. *Эфрос Д. А.* Определение относительных проницаемостей и функций распределения при вытеснении нефти водой.– Докл. АН СССР, 1956, т. 110, № 5, с. 746–749.
3. *Коллинз Р.* Течения жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964. 350 с.
4. *Лейбензон Л. С.* Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.–Л.: Гостехиздат, 1947. 244 с.
5. *Gardner W. R.* Some steady-state solutions of the unsatupated moistupe flow equation with application to evaporation from a water table.– Soil Sci., 1958, v. 85, № 4, p. 228–232.
6. *Бузинов С. Н.* К вопросу об определении остаточной нефтенасыщенности.– Докл. АН СССР, 1957, т. 116, № 1, с. 28–31.
7. *Курбанов А. К., Куранов И. Ф.* К вопросу о влиянии капиллярных сил на процесс вытеснения нефти водой. ВНИИ, НТС по добыче нефти. М.: Недра, 1964, с. 43–76.
8. *Пеньковский В. И.* Модель процесса очистки газоносного пласта вибровоздействием.– В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 51. Новосибирск, 1981, с. 84–92.

Новосибирск

Поступила в редакцию 20.V.1982

УДК 532.546

О РАСТЕКАНИИ БУГРА ЖИДКОСТИ ПАРАБОЛОИДНОЙ ФОРМЫ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ ОСНОВАНИЮ

ЧЕРНОМАШЕНЦЕВ Г. М.

В литературе рассматривались задачи о растекании осесимметричного бугра грунтовых вод с сохранением начальной массы жидкости и при условии удержания части жидкости в ранее занимаемом объеме [1–4]. При этом использовалось уравнение Буссинеска с постоянным и разрывным (в точке, где $\partial h/\partial t=0$, если h – высота бугра) коэффициентом проницаемости среды соответственно. Если первая задача имеет точное аналитическое решение типа мгновенного источника, то решение второй задачи отыскивалось в виде автомодельного решения второго рода как асимптотической для соответствующей задачи Коши.

В данной заметке получено обобщение решения задачи о растекании осесимметричного бугра жидкости по горизонтальному основанию на случай бугра, имеющего форму эллиптического параболоида.

Пусть в пористой среде на непроницаемом горизонтальном основании в начальный момент имеется тяжелая жидкость в связном объеме, имеющем форму эллиптического параболоида. Предпосылки гидравлической теории безнапорной фильтрации [1] о возможности пренебрежения вертикальной компонентой скорости движения и об изменении давления по высоте по закону гидростатики ($p=p_0+\rho gh$, p_0 — давление в газовом пласте, ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, h – напор) приводят [1] к уравнению Буссинеска, которое в декартовых координатах имеет вид

$$\partial h / \partial\theta=\partial^2 h^2 / \partial x^2+\partial^2 h^2 / \partial y^2, \qquad \theta=k\cdot t / 2\mu \tag{1}$$

где μ, k – постоянные коэффициенты пористости и фильтрации, x, y – пространственные координаты, t — время.

Начальную форму бугра зададим в виде

$$h(x,\ y,\ 0)=\alpha_0-\beta_0 x^2-\gamma_0 y^2 \tag{2}$$

где α_0, β_0, γ_0 – произвольная тройка положительных вещественных чисел.

Положим $h=\alpha-\beta x^2-\gamma\cdot y^2$, где $\alpha=\alpha(\theta)$, $\beta=\beta(\theta)$, $\gamma=\gamma(\theta)$ – неотрицательные вещественные функции.

Учитывая (1), искомые α, β, γ должны подчиняться следующей системе уравнений:

$$d\alpha / d\theta=-4\alpha(\beta+\gamma), \qquad d\beta / d\theta=-4\beta(3\beta+\gamma), \qquad d\gamma / d\theta=-4\gamma(3\gamma+\beta) \tag{3}$$

Очевидно, что предположение $\beta\equiv\gamma$ упрощает систему и ее решение при условии (2) имеет вид

$$\alpha=\alpha_0\cdot c^{-1/2}, \qquad \beta\equiv\gamma=\gamma_0\cdot c^{-1}=\beta_0 c^{-1}, \qquad c=1+16\beta_0\theta$$

Следовательно,

$$h=\alpha_0\cdot c^{-1/2}-\beta_0\cdot c^{-1}(x^2+y^2) \tag{4}$$

Этот случай отвечает схеме растекания осесимметричного бугра жидкости постоянного объема по горизонтальному основанию [1, 3, 4].

Рассмотрим автономную подсистему системы (3)

$$d\beta / d\theta=-4\beta(3\beta+\gamma), \qquad d\gamma / d\theta=-4\gamma(3\gamma+\beta) \tag{5}$$

при произвольных начальных условиях $\beta(0)=\beta_0>0$, $\gamma(0)=\gamma_0>0$. На основании известной теоремы [5], в окрестности точки (β_0, γ_0) фазовой плоскости (β, γ) эта подсистема имеет единственное решение. Из (5) следует:

$$\gamma d^2\gamma / d\theta^2-4(d\gamma / d\theta)^2-56\gamma^2\cdot d\gamma / d\theta-384\gamma^4=0$$

Понизив порядок и выполнив отображение $p\gamma^{-2}=-\tau$, получим после первого интегрирования

$$C_1\gamma^2\cdot(\tau-12)^3=(\tau-16)^4$$

где $p=d\gamma / d\theta$, C_1 – произвольная постоянная.

Решение подсистемы (5) ищем в параметрической форме

$$\gamma=\gamma(\tau), \qquad \beta=\beta(\tau)$$

Если

$$C_*(\tau-16)^2\cdot(\tau-12)^{-3/2}=\gamma \qquad (C_*=C_1^{-1/2}) \tag{6}$$

то

$$\frac{d\gamma}{d\theta}=\frac{d\gamma}{d\tau}\frac{d\tau}{d\theta}=C_*\frac{\tau}{2}(\tau-16)(\tau-12)^{-5/2}\frac{d\tau}{d\theta}=-C_*^2\tau(\tau-16)^4(\tau-12)^{-3}$$

Отсюда после интегрирования имеем

$$\theta=\frac{1}{32C_*}\left\{\frac{(\tau-12)^{1/2}(\tau-8)}{(\tau-16)^2}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{(\tau-12)^{1/2}-2}{(\tau-12)^{1/2}+2}\right|\right\}+C_2 \qquad (C_2=\text{const}) \tag{7}$$

При этом $16>\tau>12$. По смыслу функции $\theta(t)>0$ следует положить $C_*>0$, что также отвечает необходимости $\gamma(\theta)>0$.

Из второго уравнения подсистемы (5) получим

$$\beta=\beta(\tau)=C_* 4^{-1}(\tau-16)^2(\tau-12)^{-1/2} \tag{8}$$

Из первого уравнения системы (3) находим

$$\alpha=\alpha(\tau)=C_3(16-\tau)(\tau-12)^{-1/2} \qquad (C_3=\text{const}) \tag{9}$$

i	τ_i	θ_i	γ_i	β_i	$\Delta_i=\beta_i/\gamma_i$	α_i
1	15	0,307	0,192	0,145	0,756	0,575
2	15,5	1,68	0,038	0,034	0,890	0,268
3	15,7	5,05	0,0126	0,0117	0,930	0,150

Частный случай $\beta\equiv\gamma$ уже рассмотрен (см. (4)), а ранее был описан в [1, 3, 4].

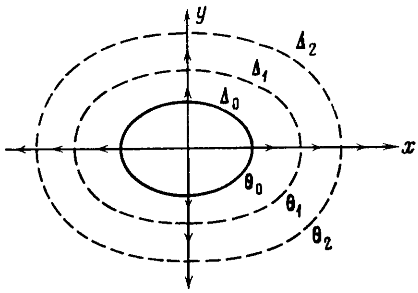
Исследуем полученное решение. Прежде всего следует заметить, что функция $\theta(\tau)$ определена в левой окрестности точки $\tau=16$, и так как

$$\lim_{x\to 0} x^2 \ln x=0$$

то определяющим по вкладу для $\theta(\tau)$ будет первое слагаемое в скобках (7), а при $\tau\to 16$ $\theta\to\infty$. Кроме того, $\gamma\to 0$, $\beta\to 0$, $\alpha\to 0$, $\alpha\gamma^{-1}\to\infty$, $\alpha\beta^{-1}\to\infty$, $\beta\cdot\gamma^{-1}=\Delta\to 1$ при $\tau\to 16$. Все это достаточно полно отражает характер эволюции начальной формы купола жидкости.

На приведенной фигуре схематически показаны положения линии нулевого напора (на водоупоре) на различные моменты времени ($\Delta_0<\Delta_1<\Delta_2$, $0=\theta_0<\theta_1<\theta_2$).

Возможное отношение полуосей эллипсов эллиптического параболоида во времени определяется выражением $0{,}5\cdot(\tau-12)^{1/2}$. Чтобы убедиться в том, что найденное решение действительно описывает растекание бугра грунтовых вод с сохранением массы жидкости (при постоянной плотности жидкости и сохранения объема), достаточно проверить, что объем параболоида с параметрами $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$, $\gamma(\tau)$ от τ не зависит. Но это дает непосредственное вычисление двойного интеграла, которое здесь не приводится.



В заключение рассмотрим пример. Пусть начальное отношение осей эллипса (сечение параболоида плоскостью $h=0$) равно $(0{,}5)^{1/2}$, т. е. $\tau_0=14$, и, принимая при этом $\theta_0=0$, найдем C_*, C_2 и C_3, считая также, что $\alpha_0=\sqrt{2}\simeq 1{,}41$, $\beta_0=1/\sqrt{2}\simeq 0{,}705$, $\gamma_0=\sqrt{2}\simeq 1{,}41$. На основании (6)–(9) имеем: $C_*=1$; $C_2\simeq -0{,}05$; $C_3=1$.

Результаты дальнейших вычислений приведены в таблице.

В качестве естественного обобщения найденного решения можно рассмотреть переменную во времени проницаемость среды. Тогда к уравнению (1) приводит известная подстановка

$$\theta(t)=0{,}5\mu^{-1}\int_0^t k(\tau)\,d\tau$$

а так как подынтегральная функция не отрицательная, то существование обратной функции $t(\theta)$ обеспечивается непрерывностью $\theta(t)$.

Приведенный в заметке результат может быть использован при анализе характера растекания бугра грунтовых вод, сформировавшегося от площадного полива.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
2. *Кочина И. Н., Михайлов Н. Н., Филинов М. В.* Влияние остаточной насыщенности на растекание бугра жидкости в газовом пласте.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 6, с. 48–52.
3. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
4. *Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С.* Физико-математические основы фильтрации воды. М.: Мир, 1971. 452 с.
5. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения. М.: Гостехиздат, 1957. 272 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
22.II.1982