В заключение следует отметить, что описанный здесь метод пригоден для расчета осесимметричных каверн за телами с произвольной формой меридионального сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузевский Л. Г., Зуйкова В. И.* Кавитационные течения в продольном поле силы тяжести.– В кн.: Пристенные течения со свободными поверхностями. Новосибирск, 1980, с. 18–30.
2. *Болотин А. Ф., Дианов Д. И.* Экспериментальное исследование искусственных каверн за дисками при различных углах наклона набегающего потока к горизонтали.– В кн.: Экспериментальная гидромеханика судна. Л.: Судостроение, 1975, с. 63–70.
3. *Гульнев С. И., Капанкин Е. Н.* Об особенностях кавитационного обтекания тел вертикальным потоком жидкости.– Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 2, с. 56–62.
4. *Биркгоф Г., Сарантонелло Э.* Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964. 466 с.
5. *Карликов В. П., Шоломович Г. И.* Метод приближенного учета влияния стенок при кавитационном обтекании тел в гидродинамических трубах.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 4, с. 89–93.
6. *Эпштейн Л. А., Лапин В. М.* Приближенный расчет влияния границ потока на длину каверны в плоской задаче и за осесимметричным телом.– Тр. ЦАГИ, 1980, вып. 2060, с. 3–24.
7. *Brennen C.* A numerical solution of axisymmetric cavity flows.– J. Fluid. Mech., 1969, v. 37, № 4, p. 671–688.
8. *Амромин Э. Л., Иванов А. Н.* Осесимметричное кавитационное обтекание тела в трубе.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 4, с. 50–55.
9. *Гузевский Л. Г.* Влияние стенок на плоские и осесимметричные кавитационные течения.– В кн.: Пристенные течения со свободными поверхностями. Новосибирск, 1980, с. 5–30.
10. *Street R. L.* A review of numerical methods for solution of three dimensional cavity flow problems.– In: Proc. Sec. Intern. Conf. Numer. Ship Hydrodynamics, Berkley, 1977, p. 237.
11. *Иванов А. Н.* Гидродинамика развитых кавитационных течений. Л.: Судостроение, 1980. 238 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 25.V.1982

УДК 532.546

КОНЦЕВОЙ ЭФФЕКТ КАПИЛЛЯРНОГО ЗАПИРАНИЯ ВЫТЕСНЯЕМОЙ ФАЗЫ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

ПЕНЬКОВСКИЙ В. И.

Получены частные решения двух задач установившейся фильтрации несмешивающихся жидкостей. Решения указывают на существование концевого эффекта капиллярного запирания вытесняемой фазы, приводящего к значительному уменьшению расхода вытесняющей фазы.

Одномерное движение двух несмешивающихся жидкостей в гидрофильной пористой среде может быть описано, как известно [1], системой уравнений

$$\sigma\frac{\partial s}{\partial t}=k\frac{\partial}{\partial x}\left[f(s)\frac{\partial p}{\partial x}\right]$$
$$-\sigma\frac{\partial s}{\partial t}=k_1\frac{\partial}{\partial x}\left[f_1(s)\frac{\partial p_1}{\partial x}\right],\qquad p=p_1+p_k(s) \tag{0.1}$$

Здесь k, k_1 – отнесенные к вязкостям проницаемости среды при однородном течении (полном насыщении пор данной жидкостью), $f(s)$, $f_1(s)$ – относительные фазовые проницаемости, s – насыщенность пор несмачивающей фазой (нефтью), σ – полная пористость среды, p, p_1 – давления в несмачивающей и смачивающей (воде) фазах соответственно, $p_k(s)\geqslant 0$ – скачок давления на границе фаз.

Обрабатываемые, согласно имеющейся методике [2], опытные данные показывают, что безразмерные функции $f(s)$ и $f_1(s)$ зависят от критерия $\pi=\alpha/(k_0|\operatorname{grad}P|)$, где k_0 – проницаемость среды, α – поверхностное натяжение, P – некоторое среднее давление в смеси. Кроме того, считается общепринятым [1, 3] предположение о существовании остаточных насыщенностей s_0 и s^0 таких, что $f(s_0)=f_1(s^0)=0$, и отмечается гистерезис кривых относительных проницаемостей в зависимости от того, какая из фаз является вытесняющей.

Существование остаточной водонасыщенности $1-s^0$ может быть объяснено, на-пример, наличием воды, «прочно связанной» со скелетом гидрофильной среды (в особенности горных пород, содержащих глинистые частицы). В то же время убедительных доказательств существования остаточной нефтенасыщенности $s_0>0$ не имеется. По понятным из дальнейшего причинам будем считать, что $s_0=0$ и нефтенасыщенность s отнесена к величине $s^0\leqslant 1$.

Примем, следуя Л. С. Лейбензону [4, стр. 112–113], что при двухфазной фильтрации справедлива формула Слихтера – Козени для проницаемости $k=a\sigma_e^n$, где a – постоянная, зависящая от размеров частиц пористой среды, $n\approx 3{,}5$ – некоторый показатель, σ_e – эффективная пористость (часть физического пространства, занятого движущейся фазой). Тогда, полагая для подвижной нефти $\sigma_e=\sigma\cdot s$, а для воды $\sigma_e=\sigma(1-s)$ и учитывая, что при однородном течении $k_0=a\sigma^n$, для относительных фазовых проницаемостей получим формулы

$$f(s)=s^n,\quad f_1(s)=(1-s)^n \tag{0.2}$$

Капиллярное давление представим в виде $p_k(s)=p_k^0\varphi(s)$, где p_k^0 – максимальное капиллярное давление, соответствующее остаточной водонасыщенности ($s=1$), $\varphi(s)$ – функция, аналогичная функции Леверетта. При подходящем подборе параметров p_k^0, $m<1$ и $\varkappa=1/s^0>1$ хорошей аппроксимацией опытных данных может служить зависимость вида [5]

$$\varphi(s)=[s(\varkappa-1)/(\varkappa-s)]^m \tag{0.3}$$

Рассмотрим процесс установившейся фильтрации в образце пористой среды единичной длины в двух случаях: при вытеснении воды нефтью и при вытеснении нефти водой.

1. Вытеснение смачивающей фазы несмачивающей (воды нефтью).

Пусть в образец, первоначально заполненный водой с некоторым давлением p_c нагнетается нефть под давлением p_0 таким, что

$$\Delta p=p_0-p_c\leqslant p_k^0$$

Ввиду гидрофильности среды нефть, очевидно, вытеснит не всю воду, а лишь ее часть, находящуюся в относительно крупных порах. Пусть процесс вытеснения полностью закончен и движение установившееся. Тогда $\partial s/\partial t=0$ и система уравнений (0.1) принимает вид

$$f(s)\,dp/dx=C,\quad f_1(s)\,dp_1/dx=C_1,\quad p=p_1+p_k(s) \tag{1.1}$$

где C, C_1 – произвольные постоянные.

На правом конце, при $x=1$, где подается нефть, а расход воды равен нулю, имеем следующие краевые условия

$$x=1: p=p_0,\quad -k_1f_1(s)\,dp_1/dx=0 \tag{1.2}$$

На левом конце образца, при $x=0$, где происходит истечение в резервуар с заданным давлением жидкости (воды или нефти), краевые условия естественно задать в виде

$$x=0: p=p_c,\quad p_1=p \tag{1.3}$$

Последнее из условий эквивалентно тому, что $\lim p_k(s)=0$ или $\lim s(x)=0$ при $x\to 0$.

Из условия (1.2) отсутствия потока воды непосредственно следует $C_1=0$ и, поскольку $f_1(s)\neq 0$, то $dp_1/dx=0$. Отсюда, учитывая условия (1.3), получаем $p_1\equiv p_c$.

Таким образом, давление в смачивающей фазе сохраняется постоянным во всем образце. Пример такого течения был приведен в работе [6], однако из-за допущенной там неточности в записи третьего уравнения системы (1.1) интерпретация течения и некоторые из выводов [7] оказались неточными.

Относительная нефтенасыщенность s_1 во входном сечении образца определяется из третьего уравнения системы (1.1) с учетом зависимости (0.3) формулой

$$s_1=\varkappa\Delta p_0^{1/m}(\varkappa-1+\Delta p_0^{1/m})^{-1}\quad (\Delta p_0=\Delta p/p_k^0) \tag{1.4}$$

Интегрирование первого уравнения системы (1.1), записанного в виде $s^np_k^0\varphi' ds/dx=C$, при краевых условиях $s(0)=0$, $s(1)=s_1$ приводят к зависимостям

$$\begin{aligned} &C=mp_k^0\varkappa^n(\varkappa-1)^mB(s_1/\varkappa;\ m+n,\ -m)\\ &x=B(s/\varkappa;\ m+n,\ -m)/B(s_1/\varkappa;\ m+n,\ -m)\end{aligned} \tag{1.5}$$

где $B(x;p,q)=\int\limits_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$ – табулированная неполная бета-функция.

Формула (1.5) дает распределение нефтенасыщенности в образце при заданном перепаде давления Δp. Как видно из этой формулы, $\lim ds/dx\to\infty$ при $x\to 0$, т. е.

нефть как бы прорывается сквозь тонкую пленку воды, перекрывающую выходное сечение образца. При $n=3{,}5$, $m=0{,}5$ формула (1.5) выражается через элементарные функции. Аналогичное по характеру распределение нефтенасыщенности, полученное экспериментально, приводится в монографии [3], как иллюстрация существования «концевого эффекта», наблюдаемого в опытах многими исследователями.

В случае однородного течения нефти сквозь рассматриваемый образец первое уравнение системы (1.1) будет иметь вид $dp/dx=C^0=\Delta p=p_0-p_c$. Пусть $v_{\max}$ – скорость истечения нефти при однофазной фильтрации, v – скорость при фильтрации с капиллярно-запертой водой. Тогда относительную скорость $v^0=v/v_{\max}$ можно выразить отношением

$$v^0=C/C_0=m\Delta p_0^{-1}\varkappa^n(\varkappa-1)^m B(s_1/\varkappa;\ m+n,\ -m)$$

При указанных выше значениях параметров n и m задачи, а также $\Delta p_0=1$, $\varkappa=1{,}1$ получим $v^0\approx 0{,}44$. Таким образом, наличие капиллярно-запертой воды сокращает более чем в два раза расход нефти при одном и том же перепаде давления Δp.

Заметим, что в случае $\Delta p>p_k^0$ $(\Delta p^0>1)$ в образце возникает примыкающая к входному сечению зона однофазной фильтрации, где $s=1$ [8].

2. Вытеснение несмачивающей фазы смачивающей (нефти водой).

Пусть в образец, заполненный нефтью (и «прочно-связанной» водой), нагнетается вода с заданным перепадом давления $\Delta p=p_0-p_c\leqslant p_k^0$ и процесс вытеснения установился, так что имеет место система уравнений (1.1). В отличие от предыдущего случая при вытеснении нефти давления в фазах будут выравниваться на входе, где краевые условия запишутся в виде

$$x=1:\ p_1=p_0,\quad p=p_0,\quad -kf(s)\,dp/dx=0 \tag{2.1}$$

причем последнее условие отражает отсутствие потока нефти.

На выходе можно задать лишь давление в подвижной фазе

$$x=0:\ p_1=p_c. \tag{2.2}$$

Повторяя выкладки предыдущего пункта, получим

$$p=p_0,\quad s_1=s(1)=0$$

$$s_0=s(0)=\varkappa\Delta p_0^{1/m}[\varkappa-1+\Delta p_0^{1/m}]^{-1}\quad (\Delta p_0\leqslant 1)$$

Распределение насыщенности определится формулой

$$x=\frac{I(s)}{I(0)},\qquad I(s)=\int_s^{s_0}(1-t)^n(\varkappa-t)^{-(m+1)}t^{m-1}\,dt \tag{2.3}$$

Отношение $v_1^0=v_1/v_{1\max}$ расходов воды при фильтрации с капиллярно-запертой нефтью и при однородной фильтрации соответственно определится в виде ($v_1^0=m\varkappa(\varkappa-1)^m\Delta P_0^{-1}I(0)$).

При указанных выше значениях параметров $v_1^0\approx 0{,}156$. В случае $\Delta p_0>1$ у входного сечения появится расширяющаяся с ростом Δp зона однофазной фильтрации с $s=0$.

Полученные частные решения задач двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей типа нефть – вода показывают, что в условиях стандартного опыта существуют режимы установившейся фильтрации с капиллярным запиранием вытесняемой фазы. При этом распределения неподвижной фазы различны и зависят от характера вытеснения. Наличие неподвижной фазы, которую можно принять в определенном смысле за остаточную нефте- или водонасыщенность, обусловлено действием капиллярных сил, а не наличием предельных значений насыщенностей, при которых обращаются в нуль относительные фазовые проницаемости $f(s)$ и $f_1(s)$.

В этой связи представляется целесообразным, причисляя «прочно-связанную» воду к скелету среды, считать $s^0=1$, т. е. $\varkappa=1$ и вместо зависимости (0.3) для капиллярного давления принимать аппроксимацию вида $p_k(s)=p_1^0\varphi_1(s)$, где $p_1^0=p_k(1/2)$, $\varphi_1(s)=[s/(1-s)]^m$ $(m<1)$. При этом $p_k(s)\to\infty$ при $s\to 1$, что согласуется с экспериментальными данными [3, стр. 47].

Вычисления показывают, что в этом случае насыщенность s_i на входе или на выходе ($i=0$ или $i=1$ в зависимости от способа вытеснения) определится формулой

$$s_i=\Delta p_0^{1/m}[1+\Delta p_0^{1/m}]^{-1}\quad (\Delta p_0=\Delta p/p_1^0)$$

При вытеснении воды нефтью распределение нефтенасыщенности имеет вид $x(s)=B(s;\ m+n,\ -m)/B(s_1;\ m+n,\ -m)$ с относительной скоростью движения

$$v_1^0=m\Delta p_0^{-1}B(s_1;\ m+n,\ -m)$$

В случае вытеснения нефти водой получим

$$x(s)=1-B(s;\ m,\ n-m)/B(s_0;\ m,\ n-m)$$

$$v_1^0 = m\Delta p_0^{-1} B(s_0;\ m,\ n-m).$$

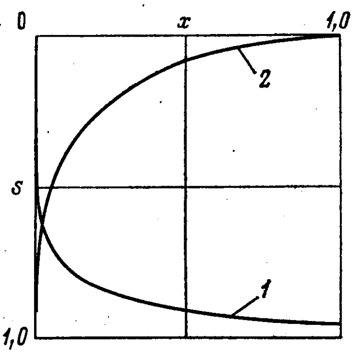
При $m=0{,}5$, $n=3{,}5$ неполные бета-функции выражаются в конечном виде

$$B(s;\ 4,\ -1/2)=0{,}4(1-s)^{-1/2}(16-8s-2s^2-s^3)-6{,}4$$

$$B(s;\ 1/2,\ 3)=2\sqrt{s}(3s^2-10s+15)/15$$

Вычисленные при этих параметрах и $\Delta p^0=\sqrt{19}$ ($s_i=0{,}95$) распределения нефтенасыщенностей представлены на фигуре. Кривая *1* соответствует вытеснению воды нефтью, кривая *2* – нефти водой.

Легко видеть, что с увеличением перепада давления Δp общее количество капиллярно-запертой воды стремится к нулю, поскольку $\lim B(s;\ 4,\ -1/2)\to\infty$ при $s\to 1$. Напротив, общее количество капиллярно-запертой нефти S в образце с ростом Δp становится неизменным и равным величине



$$S=\int_0^1 s(x)\,dx = s_1 - \int_{s_0}^{s_1} x(s)\,ds =$$

$$= \int_0^1 [1-B(s;\ 1/2,\ 3)/B(1;\ 1/2,\ 3)]\,ds \approx 0{,}143$$

Это количество «остаточной нефтенасыщенности» представляет собой «мертвый объем» нефти, не вытесняемый при любом темпе отбора и закачек (практически S не изменяется уж при $\Delta p^0 \geqslant 4{,}4$).

Разрабатываемые в настоящее время способы вибровоздействия на пласт с целью повышения темпов отбора нефти и нефтеотдачи пластов должны быть прежде всего направлены на устранение концевого эффекта капиллярного запирания призабойной зоны эксплуатационных скважин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие исследования по теории фильтрации в СССР (1917–1967). М.: Наука, 1969, 545 с.
2. *Эфрос Д. А.* Определение относительных проницаемостей и функций распределения при вытеснении нефти водой.– Докл. АН СССР, 1956, т. 110, № 5, с. 746–749.
3. *Коллинз Р.* Течения жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964. 350 с.
4. *Лейбензон Л. С.* Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.–Л.: Гостехиздат, 1947. 244 с.
5. *Gardner W. R.* Some steady-state solutions of the unsatupated moistupe flow equation with application to evaporation from a water table.– Soil Sci., 1958, v. 85, № 4, p. 228–232.
6. *Бузинов С. Н.* К вопросу об определении остаточной нефтенасыщенности.– Докл. АН СССР, 1957, т. 116, № 1, с. 28–31.
7. *Курбанов А. К., Куранов И. Ф.* К вопросу о влиянии капиллярных сил на процесс вытеснения нефти водой. ВНИИ, НТС по добыче нефти. М.: Недра, 1964, с. 43–76.
8. *Пеньковский В. И.* Модель процесса очистки газоносного пласта вибровоздействием.– В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 51. Новосибирск, 1981, с. 84–92.

Новосибирск

Поступила в редакцию 20.V.1982

УДК 532.546

О РАСТЕКАНИИ БУГРА ЖИДКОСТИ ПАРАБОЛОИДНОЙ ФОРМЫ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ ОСНОВАНИЮ

ЧЕРНОМАШЕНЦЕВ Г. М.

В литературе рассматривались задачи о растекании осесимметричного бугра грунтовых вод с сохранением начальной массы жидкости и при условии удержания части жидкости в ранее занимаемом объеме [1–4]. При этом использовалось уравнение Буссинеска с постоянным и разрывным (в точке, где $\partial h / \partial t=0$, если h – высота бугра) коэффициентом проницаемости среды соответственно. Если первая задача имеет точное аналитическое решение типа мгновенного источника, то решение второй задачи отыскивалось в виде автомодельного решения второго рода как асимптотической для соответствующей задачи Коши.