7. *Гаврилова М. К.* Метеорологические наблюдения в наледной долине Улахан-Тарын (Центральная Якутия).– В кн.: Наледи Сибири, М.: Наука, 1969, с. 90–106.
8. *Алексеев В. Р., Фурман М. Ш.* Наледи и сток. Новосибирск: Наука, 1976, 115 с.

Воронеж

Поступила в редакцию
21.IV.1982

УДК 532.5.013.4+532.65

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ЩЕЛИ

БОРИСОВ И. Д.

Исследуется устойчивость осесимметричных форм равновесия капиллярной жидкости, заключенной между двумя горизонтальными пластинами. Показано, что устойчивость теряется относительно осесимметричных возмущений. Проведены расчеты границы области устойчивости в случае одинаковых углов смачивания на нижней и верхней пластинах.

1. Пусть конечный объем жидкости с плотностью ρ, ограниченный свободной поверхностью Γ и двумя горизонтальными пластинами (фиг. 1), находится в равновесии под действием гравитационного поля и капиллярных сил (сил поверхностного натяжения). Будем рассматривать осесимметричные равновесные поверхности Γ, считая, что в цилиндрической системе координат r, ϑ, z равновесная линия – образующая поверхности Γ – задана уравнениями $r=r(\tau)$, $z=z(\tau)$, где τ – длина дуги этой линии, отсчитываемая от нижнего конца.

Равновесная поверхность Γ является стационарной точкой функционала потенциальной энергии [1]

$$U(\Gamma)=\sigma\left(|\Gamma|-\cos\alpha_0|S_0|-\cos\alpha_1|S_1|+b\int\limits_\Omega z\,d\Omega\right),\qquad b=\rho g/\sigma$$

Здесь σ – коэффициент поверхностного натяжения на Γ; α_0 (α_1) – угол смачивания на нижней (верхней) пластине; $S_0(S_1)$ – поверхность нижней (верхней) пластины, смоченная жидкостью; Ω – область, занимаемая жидкостью; g – интенсивность гравитационного поля; символ $|A|$ означает площадь поверхности A.

Условия стационарности функционала U при фиксированном объеме v жидкости – $\delta U=0$, $v=\mathrm{const}$ – приводят к следующей задаче [1]:

$$r''=z'\left(bz-c+\frac{z'}{r}\right),\quad z''=-r'\left(bz-c+\frac{z'}{r}\right)\quad\left('=\frac{d}{d\tau}\right)\tag{1.1}$$

$$r'(0)=-\cos\alpha_0,\quad z'(0)=\sin\alpha_0,\quad r'(t)=\cos\alpha_1,\ z'(t)=\sin\alpha_1\tag{1.2}$$

$$z(0)=0,\qquad z(t)=h,\quad \pi\int\limits_0^t r^2(\tau)z'(\tau)\,d\tau=v$$

Здесь h – расстояние между пластинами; параметр c и длина t равновесной линии – заранее не известные величины, подлежащие определению наряду с функциями $r(\tau)$, $z(\tau)$.

Решение данной задачи имеет физический смысл лишь в том случае, если $0<z(\tau)<h\,\forall\tau\in]0,\ t[$ и, кроме того, интегральная кривая системы (1.1) при $\tau\in]0,\ t[$ не имеет точек самопересечения. Можно показать, что эти дополнительные требования эквивалентны следующему:

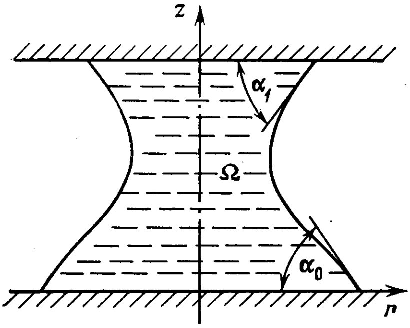
$$z'(\tau)>0\quad\forall\tau\in]0,\ t[\tag{1.3}$$

В дальнейшем условие (1.3) предполагается выполненным.

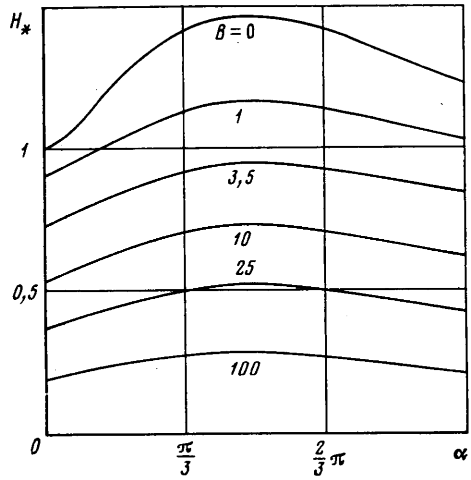
2. Вопрос об устойчивости положения равновесия капиллярной жидкости сводится к исследованию знака второй вариации потенциальной энергии [1, 2]: положение равновесия капиллярной жидкости устойчиво, если вторая вариация потенциальной энергии положительна для всех допустимых возмущений свободной поверхности, и неустойчиво, если вторая вариация может принимать отрицательные значения.

Будем считать, что $0<\alpha_i<\pi\,(i=0,\ 1)$, так что в силу (1.2), (1.3) $z'(\tau)>0\ \forall\tau\in[0,\ t]$. Выражение для второй вариации в этом случае запишем в виде [1]

$$\frac{1}{\sigma}\delta^2U(\Gamma;N)=\int\limits_\Gamma\left[\left(\frac{\partial N}{\partial\tau}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial N}{\partial\vartheta}\right)^2+aN^2\right]d\Gamma+\int\limits_{\gamma_0}\frac{z''}{z'}N^2\,d\gamma-\int\limits_{\gamma_1}\frac{z''}{z'}N^2\,d\gamma$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$a(\tau) \equiv -br' - \left(\frac{r''}{z'}\right)^2 - \left(\frac{z'}{r}\right)^2 \tag{2.1}$$

Здесь $N(\tau, \vartheta)$ – отклонение возмущенной свободной поверхности от равновесной поверхности Г, отсчитываемое по нормали к Г; γ_0 (γ_1) – контур пересечения поверхности Г с плоскостью нижней (верхней) пластины.

Возмущения $N(\tau, \vartheta)$ должны удовлетворять условию сохранения объема жидкости; кроме того, исключим возмущения, сдвигающие центр масс жидкости в горизонтальных направлениях

$$\int_\Gamma N\,d\Gamma = 0; \qquad \int_\Gamma r \sin\vartheta N\,d\Gamma = \int_\Gamma r\cos\vartheta N\,d\Gamma = 0 \tag{2.2}$$

Представим $N(\tau, \vartheta)$ в виде суммы осесимметричного и неосесимметричного слагаемых

$$N(\tau,\vartheta) = N_0(\tau) + N_1(\tau,\vartheta), \qquad N_0(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(\tau,\vartheta)\,d\vartheta \tag{2.3}$$

Из (2.3) легко следует

$$\int_0^{2\pi} N_1(\tau,\vartheta)\,d\vartheta = 0 \tag{2.4}$$

Учитывая (1.1), (2.3), (2.4), выражение для $\delta^2 U$ преобразуем к виду

$$\frac{1}{\sigma}\delta^2 U(\Gamma; N) = 2\pi\left[\int_0^t r(N_0'^2 + aN_0^2)\,d\tau - \left(\frac{rz''}{z'}N_0^2\right)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t}\right] + \int_\Gamma \left[z'\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{N_1}{z'}\right)\right]^2 d\Gamma + \int_\Gamma \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial N_1}{\partial\vartheta}\right)^2 - N_1^2\right] d\Gamma \tag{2.5}$$

В силу неравенства Виртингера [3] последнее слагаемое в правой части (2.5) неотрицательно для всех $N_1(\tau, \vartheta)$, удовлетворяющих условию (2.4), причем равенство нулю возможно лишь когда $N_1(\tau, \vartheta) = \varphi(\tau)\sin\vartheta + \psi(\tau)\cos\vartheta$. На функциях такого вида предпоследнее слагаемое строго больше нуля при $N_1(\tau,\vartheta) \neq 0$, так как случай $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau) = \mathrm{const}\, z'(\tau)$ недопустим вторым условием (2.2).

Предположим, что $\delta^2 U(\Gamma; N_0) > 0$ на всех осесимметричных возмущениях $N_0 \neq 0$; тогда, очевидно, $\delta^2 U(\Gamma; N) > 0$ на всех возмущениях $N \neq 0$ общего вида. Предположим теперь, что существует возмущение N такое, что $\delta^2 U(\Gamma; N) > 0$; тогда тем более существует возмущение N_0, на котором $\delta^2 U(\Gamma; N_0) < 0$. Учитывая это, заключаем, что при анализе устойчивости равновесия достаточно ограничиться рассмотрением осесимметричных возмущений.

Функции $N_0(\tau)$ будем считать квадратично суммируемыми на $[0, t]$ вместе со своими производными первого порядка и удовлетворяющими первому условию (2.2); второе условие (2.2) для $N_0(\tau)$ выполняется автоматически. Множество всех таких функций обозначим через G.

Определим $u_1(\tau)$, $u_2(\tau)$ как решения задач

$$Lu_1(\tau)=0 \quad (0<\tau<t), \quad u_1(0)=z'(0), \quad u_1'(0)=z''(0)$$
$$Lu_2(\tau)+1=0 \quad (0<\tau<t), \quad u_2(0)=u_2'(0)=0 \tag{2.6}$$
$$L\equiv -\frac{d^2}{d\tau^2}-\frac{r'}{r}\frac{d}{d\tau}+a(\tau)$$

Введем функции $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$, $f(\tau)$

$$f_i(\tau)=u_i'(\tau)z'(\tau)-u_i(\tau)z''(\tau) \quad (i=1,\ 2)$$
$$f(\tau)=f_1(\tau)\int_0^\tau r(\xi)u_2(\xi)\,d\xi-f_2(\tau)\int_0^\tau r(\xi)u_1(\xi)\,d\xi$$

Имеет место следующая теорема:

Пусть $0<\alpha_i<\pi$ $(i=0,\ 1)$. Тогда а) при $f_1(\tau)<0$ $\forall\tau\in]0,\ t[$, если $f(t)<0$, то $\delta^2U(\Gamma;\ N_0)>0$ $\forall N_0(\neq 0)\in G$, если $f(t)=0$, то $\delta^2U(\Gamma;\ N_0)\geqslant 0$ $\forall N_0\in G$, причем существует функция $N_0\neq 0$ такая, что $\delta^2U(\Gamma;\ N_0)=0$; б) если $f_1(\tau)$ обращается в нуль хотя бы в одной точке интервала $]0,\ t[$ или $f(t)>0$, то существует функция $N_0\in G$ такая, что $\delta^2U(\Gamma;\ N_0)<0$.

Для доказательства заметим, что в случае $f_1(\tau)<0$ $\forall\tau\in]0,\ t[$ функция $u_1(\tau)$ может иметь на $]0,\ t[$ не более одной точки перемены знака τ_0. Утверждение а) нетрудно получить, преобразовав вторую вариацию к виду

$$\frac{1}{2\pi\sigma}\delta^2U(\Gamma;\ N_0)=\int_0^t rz'^2\left[\left(\frac{N_0-w}{z'}\right)'-\frac{f_1}{z'^2u_1}(N_0-w)\right]^2d\tau+$$
$$+\left[\frac{rf_1}{z'u_1}(N_0-w)^2\right]_{\tau=t}+\beta^2f_1(t)f(t)$$
$$w(\tau)=\beta[u_1(\tau)f_2(t)-u_2(\tau)f_1(t)]$$

Постоянная β подбирается из условия $(N_0-w)_{\tau=\tau_0}=0$ при $\tau_0\in[0,\ t]$ или из условия $(N_0-w)_{\tau=t}=0$ при $u_1(\tau)>0$ $\forall\tau\in[0,\ t]$.

Для доказательства утверждения б) в случае $f_1(\tau)<0$ $\forall\tau\in]0,\ t[$ достаточно положить

$$N_0(\tau)=u_1(\tau)\int_0^t ru_2\,d\tau-u_2(\tau)\int_0^t ru_1\,d\tau$$

если $f_1(\tau)$ обращается в нуль в точке $\tau_1\in]0,\ t[$, то полагаем $N_0(\tau)=u_1(\tau)+\eta$ $(\tau\in[0,\tau_1])$, $u_1(\tau_1)+\eta$ $(\tau\in]\tau_1,\ t])$, где постоянная η выбирается из первого условия (2.2).

Приведенная теорема дает достаточно эффективные условия устойчивости равновесных состояний жидкости, проверка которых легко реализуется на ЭВМ.

3. В рассматриваемом случае равновесное состояние с точностью до геометрического подобия характеризуется совокупностью четырех безразмерных параметров: α_0, α_1, $B=bv^{2/3}$ (число Бонда), $H=hv^{-1/3}$. Отметим, что фиксированным α_0, α_1, B, H могут отвечать несколько различных равновесных состояний, не сводящихся к геометрическому подобию форм поверхности Г.

Рассмотрим интегральную кривую системы (1.1), удовлетворяющую начальным условиям

$$r(0)=r_0, \quad r'(0)=-\cos\alpha, \quad z(0)=0, \quad z'(0)=\sin\alpha \tag{3.1}$$

Участки $0\leqslant\tau\leqslant t$ этой кривой при любых t, для которых выполняется условие (1.3), определяют равновесные формы, соответствующие значениям α_0, α_1, B, H, вычисляемым согласно (1.2). Обозначим через t_* точку перемены знака функции $f(\tau)$ такую, что $f_1(\tau)<0$ $\forall\tau\in]0,\ t_*[$ (на рассматриваемых участках $f(\tau)$ может иметь одну или несколько таких точек или не иметь ни одной). В силу доказанной теоремы переход t через значение t_* означает переход из области устойчивых (неустойчивых) в область неустойчивых (устойчивых) равновесных состояний. Для критического состояния равновесия, отвечающего значению $t=t_*$, имеем

$$\alpha_0=\alpha, \quad \alpha_1=\arccos r'(t_*), \quad B=bv_*^{2/3}, \quad H_*=z(t_*)U_*^{-1/3}, \quad v_*=\pi\int_0^{t_*} r^2z'\,d\tau$$

Интегрируя численно уравнения (2.6) совместно с системой (1.1) при начальных условиях (3.1) для различных значений α, r_0, c, можно построить зависимость $H_*(\alpha_0, \alpha_1, B)$ критического безразмерного расстояния между пластинами от углов смачивания и числа Бонда. Параметр b при этом достаточно считать равным 0 (случай полной невесомости) или 1, так как различным значениям $b>0$ отвечают геометрически подобные семейства интегральных кривых системы (1.1).

В случае одинаковых углов смачивания – $\alpha_i=\alpha$ ($i=0$, 1) – зависимость H_* от α для различных чисел Бонда представлена на фиг. 2. Как показали вычисления, при $H<H_*$ существует устойчивое состояние равновесия, а при $H>H_*$ все равновесные состояния, отвечающие заданным α, B, H, неустойчивы и, следовательно, физически не реализуемы.

Автор выражает благодарность М. А. Свечкарёвой за помощь при проведении вычислений и А. Д. Тюпцову за обсуждение результатов и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
2. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
3. *Беккенбах Э. Ф., Беллман Р.* Неравенства. М.: Мир, 1965. 276 с.

Харьков

Поступила в редакцию
4.V.1982

УДК 532.516.5:529.2

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ЭФФЕКТОВ ТРЕХМЕРНОСТИ НА РАЗВИТИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КОНЦЕНТРАЦИОННОЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

КОРОЛЕВА И. Н., НИКУЛИН Д. А., СТРЕЛЕЦ М. Х.

Задача о расчете нестационарной концентрационной естественной конвекции бинарной смеси газов с произвольным конечным отношением плотностей в замкнутой прямоугольной теплоизолированной области в рамках двумерной постановки рассмотрена в [1]. Данная работа, являющаяся продолжением [1], посвящена анализу влияния на характеристики рассматриваемого течения эффектов трехмерности, связанных с конечностью размеров области.

1. Постановка задачи. Пусть замкнутая теплоизолированная область, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, разделена вертикальной перегородкой, расположенной параллельно грани $AILD$ (фиг. 1). Слева и справа от перегородки покоятся газы с молекулярными массами M_1 и M_2 (для определенности $M_2>M_1$) при температуре T_0. Требуется рассчитать характеристики естественно-конвективного течения, возникающего в объеме, после того, как в начальный момент времени перегородка $MNOR$ мгновенно убирается.

Для описания рассматриваемого течения используется система уравнений, представляющая собой предельную форму полной системы уравнений Навье – Стокса при малых значениях параметра гидростатической сжимаемости $\varepsilon=gLM_0/(RT_0)$ [2]

$$\frac{\partial M}{\partial t}+v_i\frac{\partial M}{\partial x_i}+M\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0 \tag{1.1}$$

$$M\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p_*}{\partial x_i}-\frac{\delta_{i,3}}{\varepsilon_1}\Delta\rho+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ar}}}\Phi_i \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j}=\frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1C_0+1)}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ar}}\,\mathrm{Sc}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(M\frac{\partial c}{\partial x_j}\right),\qquad M=\frac{\varepsilon_1C_0+1}{\varepsilon_1C+1} \tag{1.3}$$

$$\Phi_i=\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\mu\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\lambda}\delta_{i,j}\right]\right\} \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_1=\frac{M_2}{M_1}-1,\quad \Delta\rho=\rho-1,\quad \mathrm{Sc}=\frac{\mu_0}{\rho_0D_0},\quad \mathrm{Ar}=\frac{\rho_0^2L^3g\varepsilon_1}{\mu_0^2} \tag{1.5}$$

Здесь p_* – избыточное (динамическое) давление, M – молекулярная масса смеси, C – массовая концентрация легкого газа в смеси, $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера; индекс 0 относится к величинам, принятым за масштабы, в качестве которых