

потока, можно показать, что при $Fo=Fo_*$ условие отсутствия течения $|\tau| \leq 1$ приводит к соотношениям

$$\tau|_{r=1} = -1, \quad \tau|_{r=r_0} = 1, \quad \left. \frac{\partial \tau}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0$$

Полученных равенств достаточно для определения времени начала конвекции Fo_* , а также всех неизвестных величин в уравнении (1) в этот момент времени. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательные формулы для определения Fo_* и r_0

$$\frac{1}{2\gamma} = \frac{1}{2} \theta_0 r_0 - \frac{1}{r_0} \int_0^{r_0} r \theta dr \quad (6)$$

$$2\theta_0 r_0 (1+r_0) - 2Fo_* r_0 - (1+2r_0) \frac{2}{r_0} \int_0^{r_0} r \theta dr = 0$$

Здесь $\theta_0 = \theta(r_0)$. Отметим, что правая часть первого из этих равенств (обозначим ее через φ) является функцией только числа Фурье.

При бесконечно большом времени прогрева распределение температуры принимает вид [6] $\theta = 1/2 r^2 + 2Fo - 1/4$. При этом функция φ достигает максимального значения $\varphi_\infty = 1/8$. Это значит, что первое из равенств (6) может быть выполнено только в том случае, когда $\gamma > 1/(2\varphi_\infty) = \gamma_*$. Если же величина параметра γ меньше порогового значения $\gamma_* = 32$, то конвекция возникнуть не может, независимо от времени прогрева.

На фиг. 2 показана зависимость функции φ от числа Фурье. Эта зависимость была получена из численного решения уравнений (6). При этом уравнение теплопроводности решалось методом сеток с использованием неявной разностной схемы. Основные расчеты проведены на равномерной сетке с шагом по пространству $\Delta r = 0,002$ и шагом по времени $\Delta Fo = 0,001$. Используя полученную зависимость $\varphi(Fo)$, легко определить время начала конвекции из уравнения $\varphi(Fo_*) = 1/2\gamma$.

Результаты данной работы получены в предположении, что в поле течения, возникающего за порогом равновесия, имеются две квазитвердые зоны, а также три (в случае кольцевой прослойки) или две (в случае трубы) зоны вязкопластического течения. В действительности это предположение не ограничивает общности полученных результатов, так как подробный анализ показывает, что вблизи порога равновесия указанная структура конвективного течения является единственно возможной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Янг Веней, Е. Сучень. Свободная конвекция пластика Бингама между двумя вертикальными пластинами.— Тр. Амер. об-ва инж.-механ. Сер. С. Теплопередача, 1965, т. 87, № 2, с. 189–190.
2. Черкасов С. Г. О комбинированной конвекции вязкопластической жидкости в плоском вертикальном слое.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 6, с. 111–113.
3. Любимова Т. П., Любимов Д. В. Стационарная конвекция вязкопластической жидкости в вертикальном слое.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 2, с. 118–123.
4. Черкасов С. Г. О возникновении естественной конвекции при нестационарном прогреве вязкопластической жидкости в плоском вертикальном слое.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 4, с. 148–150.
5. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
6. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.V.1982

УДК 532.5

К ВОПРОСУ О РОСТЕ НАЛЕДЕЙ

ДЕМЕНТЬЕВА О. В.

Наледями называются массивы льда, образующиеся в результате вытекания на поверхность речных или подземных вод, их растекания и послойного замерзания. Процесс излияния воды обусловлен промерзанием того водоносного тракта, по которому циркулируют поверхностные и подземные воды. Наледи образуются зимой при промерзании живого сечения реки или водоносного слоя грунта. Если в основании водотока неглубоко залегают водоупор в виде скальных пород или многолетнемерзлых грунтов, то при промерзании в потоке возрастает напор, под действием которого вода выходит на поверхность.

Форма и размеры наледей, изменяясь в процессе их формирования, зависят от климатических, геологических, морфологических и мерзлотно-гидрогеологических условий наледного участка, а также от режима наледообразующего источника.

В статье [1] рассмотрен вопрос об определении наледообразующих расходов. В настоящей работе на конкретных примерах исследуется рост наледей.

При формировании наледи происходит процесс, аналогичный намыву плотин [2]. Из щели во льду или в грунте вытекает наледная вода с расходом $Q_0 = \text{const}$. Растекаясь, она переходит в твердую фазу. Обозначим $Q(x, t)$ — расход наледного потока в сечении x в момент времени t . Чем дальше от источника, тем меньше $Q(x, t)$, и в конце наледи $Q(x, t) = 0$. Около щели $Q(0, t) = Q_0$.

Пусть $y = f(x, t)$ — уравнение поверхности наледи. Уравнение баланса расхода имеет вид

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = - \frac{\partial y}{\partial t} \quad (1)$$

В некоторых случаях на основании опытных данных можно принять, что

$$Q = \frac{\alpha}{\gamma} I^n, \quad I(x, t) = - \frac{\partial y}{\partial x} \quad (2)$$

Здесь γ — плотность наледной воды, $I(x, t)$ — уклон свободной поверхности, α, n зависят от минерализации наледной воды, ее загрязненности, температуры, рельефа местности, геологических и метеорологических условий.

Положим α постоянным, а $n=2$. После преобразований уравнение (1), граничные и начальные условия принимают вид

$$\frac{\partial^2 I^2}{\partial x^2} = \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\partial I}{\partial t} \quad (3)$$

$$I(0, t) = I_0 = \sqrt{\frac{Q_0 \gamma}{\alpha}}, \quad I(\infty, t) = 0, \quad I(x, 0) = 0 \quad (4)$$

Следующая замена приводит задачу (3), (4) к автомодельной

$$\xi = x \sqrt{\frac{\gamma}{4\alpha I_0 t}}, \quad I = I_0 u(\xi) \quad (5)$$

$$uu'' + (u')^2 + \xi u' = 0 \quad (6)$$

$$u'(0) = 1, \quad u(\infty) = 0$$

Решение этой задачи было найдено в [3], приближенно его можно взять в виде

$$u = 1 - 0,628\xi - 0,217\xi^2, \quad \xi \leq c \approx 1,143, \quad u = 0 \quad (\xi \geq c) \quad (7)$$

Таким образом, точке $\xi = c$ отвечает конец наледи, для координаты которого x_0 , согласно (5), имеем

$$x_0 = 2,286 \sqrt{\alpha I_0 t / \gamma} \quad (8)$$

Высота наледи определяется формулой [2]

$$y(0, t) = B\sqrt{t}, \quad B = 1,256 I_0 \sqrt{I_0 \alpha / \gamma} = 1,256 \sqrt{Q_0 I_0} \quad (9)$$

Для вычисления коэффициента B воспользуемся данными натуральных наблюдений о росте четырех наледей на реках: I Наминги [4]; II Анмангында [5]; III Улахан-Тарын [6, 7] и IV Большой Ингамакитской наледи [8].

Зная B , легко найти α по формуле (9)

$$\alpha = \frac{B^2 \gamma}{1,5775 I_0^3}$$

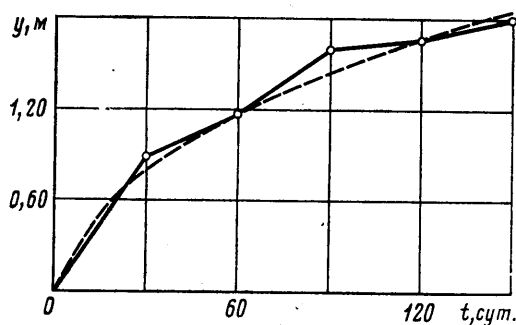
Коэффициент B найдем методом наименьших квадратов. Результаты вычисления приведены в таблице, в которой также даны значения средних параметров наледей по натуральным наблюдениям.

На фигуре сплошной линией показан график роста мощности Большой Ингамакитской наледи зимой 1965/66 г. Пунктиром показан график аппроксимирующей функции. На графиках видно, что значения аппроксимирующей функции близки к натуральным данным. Разница в коэффициенте B в разные годы для одной и той же недели незначительна и, по-видимому, объясняется различными метеорологическими условиями. Более заметной является разница в коэффициентах B для разных

L_1 , км	b , м	H , м	$Q_1 \cdot 10^{-3}$, м ³	Q_0 , м ² /сут	$I_1 \cdot 10^3$	B	$I_2 \cdot 10^3$	L_2 , км
I								
4,00	500	2,16	3344	34,1	1,08	0,266	1,32	4,94
4,00	500	2,20	3688	37,6	1,10	0,316	1,69	4,18
4,00	500	2,10	3255	33,2	1,05	0,307	1,80	3,80
II								
7,00	870	1,55	9566	53,1	0,22	0,103	0,13	6,63
7,00	750	1,47	9128	46,9	0,20	0,099	0,13	6,26
III								
3,00	500	2,36	1324	33,1	0,79	0,266	1,35	3,20
3,00	500	2,02	1446	26,3	0,67	0,179	0,77	4,44
3,00	500	3,02	1636	27,3	1,01	0,248	1,40	3,50
IV								
2,14	1022	1,94	4353	21,6	0,91	0,138	0,63	3,65
5,07	723	1,81	6588	55,6	0,36	0,154	0,27	12,7
4,75	756	2,04	6945	46,7	0,42	0,153	0,31	11,7
4,75	812	2,12	6998	43,1	0,49	0,160	0,38	10,4

наледей. Эта разница объясняется различиями в минерализации и температуре источников, загрязненности наледной воды, рельефе местности, геологических и метеорологических условиях.

Зная объем льда наледи Q_1 и ее ширину b , вычислим дебит наледной воды на единицу ширины Q_0 . Формула (9) дает возможность по известным B и Q_0 найти уклон наледи I_1 .



Для сравнения в таблице приведены уклоны, вычисленные на основании натуральных данных по формуле $I_2 = H/L_1$, где H — средняя мощность наледи, L_1 — длина или полудлина наледи в зависимости от места расположения наиболее высокой части наледи.

Сравнение значений I_1 и I_2 показывает, что уклоны почти везде имеют один и тот же порядок. Кроме уклонов в таблице помещены значения длины наледей L_2 , найденные по формуле (8). Таким образом, по формулам (8), (9) можно приближенно находить параметры наледей и рассчитывать их рост.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дементьева О. В. О некоторых модельных задачах, связанных с теорией наледей. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 5, с. 162–165.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. К теории намыва плотин. — Инж. сб., 1953, т. 16, с. 193–202.
3. Полубаринова-Кочина П. Я. О перемещении языка грунтовых вод при фильтрации из канала. — Докл. АН СССР, 1952, т. 32, № 6.
4. Некрасов И. А. Наледи восточной части Станового нагорья. — В кн.: Наледи Сибири. М.: Наука, 1969, с. 16–30.
5. Букаев Н. А. Основные закономерности режима гигантских наледей в верховьях р. Колымы (на примере Анмангындинской наледи). — В кн.: Наледи Сибири. М.: Наука, 1969, с. 62–78.
6. Арз Ф. Э. Механизм развития и деградации наледи источников Улахан-Тарын. — В кн.: Наледи Сибири. М.: Наука, 1969, с. 107–116.

7. Гаврилова М. К. Метеорологические наблюдения в наледной долине Улахан-Тарын (Центральная Якутия). — В кн.: Наледи Сибири, М.: Наука, 1969, с. 90–106.
 8. Алексеев В. Р., Фурман М. Ш. Наледи и сток. Новосибирск: Наука, 1976, 115 с.

Воронеж

Поступила в редакцию
21.IV.1982

УДК 532.5.013.4+532.65

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ЩЕЛИ

БОРИСОВ И. Д.

Исследуется устойчивость осесимметричных форм равновесия капиллярной жидкости, заключенной между двумя горизонтальными пластинами. Показано, что устойчивость теряется относительно осесимметричных возмущений. Проведены расчеты границы области устойчивости в случае одинаковых углов смачивания на нижней и верхней пластинах.

1. Пусть конечный объем жидкости с плотностью ρ , ограниченный свободной поверхностью Γ и двумя горизонтальными пластинами (фиг. 1), находится в равновесии под действием гравитационного поля и капиллярных сил (сил поверхностного натяжения). Будем рассматривать осесимметричные равновесные поверхности Γ , считая, что в цилиндрической системе координат r, ϕ, z равновесная линия — образующая поверхности Γ — задана уравнениями $r=r(\tau)$, $z=z(\tau)$, где τ — длина дуги этой линии, отсчитываемая от нижнего конца.

Равновесная поверхность Γ является стационарной точкой функционала потенциальной энергии [1]

$$U(\Gamma) = \sigma \left(|\Gamma| - \cos \alpha_0 |S_0| - \cos \alpha_1 |S_1| + b \int_{\Omega} z \, d\Omega \right), \quad b = \rho g / \sigma$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения на Γ ; α_0 (α_1) — угол смачивания на нижней (верхней) пластине; S_0 (S_1) — поверхность нижней (верхней) пластины, смоченная жидкостью; Ω — область, занимаемая жидкостью; g — интенсивность гравитационного поля; символ $|A|$ означает площадь поверхности A .

Условия стационарности функционала U при фиксированном объеме v жидкости — $\delta U = 0$, $v = \text{const}$ — приводят к следующей задаче [1]:

$$r'' = z' \left(bz - c + \frac{z'}{r} \right), \quad z'' = -r' \left(bz - c + \frac{z'}{r} \right) \quad \left(' = \frac{d}{d\tau} \right) \quad (1.1)$$

$$r'(0) = -\cos \alpha_0, \quad z'(0) = \sin \alpha_0, \quad r'(t) = \cos \alpha_1, \quad z'(t) = \sin \alpha_1 \quad (1.2)$$

$$z(0) = 0, \quad z(t) = h, \quad \pi \int_0^t r^2(\tau) z'(\tau) \, d\tau = v$$

Здесь h — расстояние между пластинами; параметр c и длина t равновесной линии — заранее не известные величины, подлежащие определению наряду с функциями $r(\tau)$, $z(\tau)$.

Решение данной задачи имеет физический смысл лишь в том случае, если $0 < z(\tau) < h \, \forall \tau \in]0, t[$ и, кроме того, интегральная кривая системы (1.1) при $\tau \in]0, t[$ не имеет точек самопересечения. Можно показать, что эти дополнительные требования эквивалентны следующему:

$$z'(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in]0, t[\quad (1.3)$$

В дальнейшем условии (1.3) предполагается выполненным.

2. Вопрос об устойчивости положения равновесия капиллярной жидкости сводится к исследованию знака второй вариации потенциальной энергии [1, 2]: положение равновесия капиллярной жидкости устойчиво, если вторая вариация потенциальной энергии положительна для всех допустимых возмущений свободной поверхности, и неустойчиво, если вторая вариация может принимать отрицательные значения.

Будем считать, что $0 < \alpha_i < \pi$ ($i=0, 1$), так что в силу (1.2), (1.3) $z'(\tau) > 0 \, \forall \tau \in \in]0, t[$. Выражение для второй вариации в этом случае запишем в виде [1]

$$\frac{1}{\sigma} \delta^2 U(\Gamma; N) = \int_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial N}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial N}{\partial \phi} \right)^2 + aN^2 \right] d\Gamma + \int_{\gamma_0} \frac{z''}{z'} N^2 d\gamma - \int_{\gamma_1} \frac{z''}{z'} N^2 d\gamma$$