МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 · 1983

УДК 532.135 : 536.252

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ КРУГОВЫХ КАНАЛАХ

ЧЕРКАСОВ С. Г.

Вязкопластическая жидкость в отличие от ньютоновской может находиться в состоянии механического равновесия при боковом подводе тепла. Поэтому естественная конвекция в вязкопластической жидкости, подогреваемой сбоку, возникает только при некоторых пороговых значениях определяющих параметров. Пороговые условия начала конвекции для плоского вертикального слоя исследовались в [1–4]. В данной работе исследуются условия возникновения плоскопараллельной естественной конвекции вязкопластической жидкости в областях с цилиндрической симметрией: в вертикальной кольцевой прослойке и круглой вертикальной трубе.

Используя приближение Буссинеска [5], представим уравнение баланса сил для неподвижной жидкости в следующем безразмерном виде:

$$r\gamma\theta - rA + \frac{\partial}{\partial r}(r\tau) = 0 \tag{1}$$

Здесь τ – касательное напряжение, θ – безразмерная температура, A – отклонение градиента давления от гидростатического при температуре $\theta=0$. В качестве масштаба длины будем использовать внешний радиус области R, масштаба напряжения и давления – предельное напряжение сдвига τ_0.

Условие отсутствия сдвигового течения вязкопластической жидкости имеет вид $|\tau|\leqslant 1$.

В дальнейшем будем использовать тот факт, что в сдвиговом течении знак касательного напряжения совпадает со знаком градиента скорости. Будем также предполагать, что для естественно-конвективного течения выполняются условия прилипания ($v=0$) на твердых стенках и условие замкнутости потока

$$\int\limits_S v\, dS = 0 \tag{2}$$

где v – скорость, S – поперечное сечение канала.

Рассмотрим сначала случай вертикальной кольцевой прослойки, на внутренней ($r=R_1$) и внешней ($r=1$) границах которой поддерживаются постоянные температуры T_1 и T_2 соответственно. Безразмерную температуру θ определим формулой $\theta=(T-T_1)/(T_2-T_1)$, где T – размерная температура. Тогда параметр γ в уравнении (1) принимает вид $\gamma=\rho g\beta(T_2-T_1)R/\tau_0$, где ρ – плотность жидкости, β – объемный коэффициент теплового расширения, g – ускорение свободного падения.

Для определенности будем считать, что $T_2>T_1$ (случай $T_2<T_1$ сводится к предыдущему заменой $\tau=-\tau$, $A=-A$, $\gamma=-\gamma$), т. е. внешняя граница прослойки имеет более высокую температуру, чем внутренняя. Тогда при возникновении конвекции жидкость будет подниматься вблизи внешней границы и опускаться вблизи внутренней границы. Следовательно (учитывая условия прилипания), касательное напряжение на границах прослойки отрицательно. Кроме того, для выполнения условия замкнутости потока необходимо, чтобы в некоторой области внутри прослойки градиент скорости и, следовательно, касательное напряжение были положительными. Учитывая все это, получим, что при $\gamma=\gamma_*$ (γ_* – пороговое значение параметра γ, при $\gamma\leqslant\gamma_*$ конвекция отсутствует) условие $|\tau|\leqslant 1$ приводит к соотношениям

$$\tau|_{r=R_1}=-1,\qquad \tau|_{r=1}=-1,\qquad \tau|_{r=r_0}=1,\qquad \left.\frac{\partial\tau}{\partial r}\right|_{r=r_0}=0$$

Используя данные равенства, а также стационарное распределение температуры

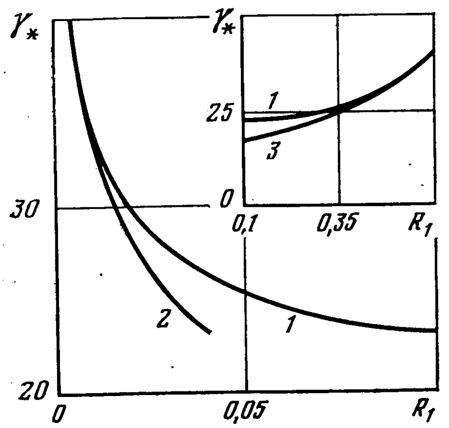
$\theta=1-\ln r/\ln R_1$, получим уравнения для определения r_0 и γ_*

$$r+R_1+2r_0=r_0[1-(1-R_1^2)(1+B(^1/_2+\ln r_0))]\,\frac{2R_1+r_0(1+R_1)}{^1/_2Br_0^2(1-R_1^2)-R_1^2} \tag{3}$$

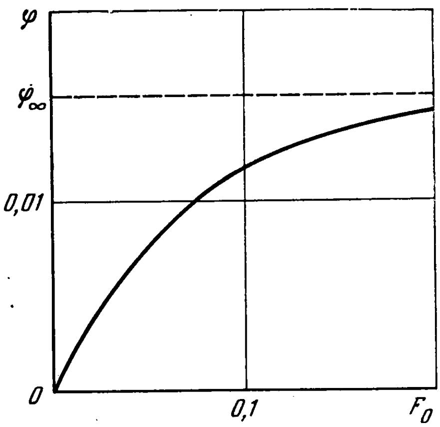
$$\gamma_*=\frac{2R_1^2-2R_1-r_0(1-R_1^2)}{R_1^2-{}^1/_2Br_0^2(1-R_1^2)},\qquad B=(-\ln R_1)^{-1}$$

Рассмотрим сначала предельный случай $R_1\ll 1$. Тогда формулы (3) переходят в асимптотические формулы

$$r_0+\ln r_0=-1,\qquad \gamma_*=\frac{2}{Br_0} \tag{4}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Численное решение первого из уравнений (4) приводит к результату $r_0=0{,}278$.

В другом асимптотическом случае $1-R_1\ll 1$, т. е. для тонкой прослойки решение уравнений (3) должно стремиться к решению для плоского вертикального слоя (см., например, [2]), которое для использованных масштабов безразмерных величин имеет вид

$$r_0=\frac{1}{2}(1+R_1),\qquad \gamma_*=\frac{16}{1-R_1} \tag{5}$$

На фиг. 1 показана зависимость порогового значения параметра γ от внутреннего радиуса прослойки, полученная в результате численного решения уравнений (3) (кривая *1*), а также (кривые *2* и *3*) асимптотические зависимости (4) и (5). Видно, что пороговые значения параметра γ для кольцевой прослойки и плоского слоя практически совпадают при толщине прослойки $1-R_1<0{,}5$. Отметим, что минимальное значение γ_* реализуется при $R_1\approx 0{,}15$, а при стремлении R_1 к нулю и единице величина γ_* неограниченно возрастает.

Рассмотрим теперь задачу о возникновении нестационарной конвекции в вертикальной круглой трубе при подводе к жидкости постоянного во времени теплового потока q. Будем считать, что в начальный момент времени жидкость прогрета однородно ($T=T_0$). Представим уравнение теплопроводности, граничные и начальные условия в следующем безразмерном виде:

$$r\frac{\partial\theta}{\partial\,\mathrm{Fo}}=\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right),\qquad \theta=(T-T_0)\frac{\lambda}{qR}$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial r}\right|_{r=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial\theta}{\partial r}\right|_{r=0}=1,\qquad \theta|_{\mathrm{Fo}=0}=0$$

Здесь Fo – число Фурье, λ – коэффициент теплопроводности жидкости. Уравнение баланса сил для неподвижной жидкости имеет вид (1), где параметр γ определяется формулой

$$\gamma=\rho g\beta qR^2/\lambda\tau_0$$

Рассмотрим момент начала конвекции $\mathrm{Fo}=\mathrm{Fo}_*$. Из симметрии задачи следует, что $\tau(r=0)=0$. Используя условие прилипания на стенке и условие замкнутости потока, можно показать, что при $Fo=Fo_*$ условие отсутствия течения $|\tau|\leqslant 1$ приводит к соотношениям

$$\tau|_{r=1}=-1,\qquad \tau|_{r=r_0}=1,\qquad \left.\frac{\partial\tau}{\partial r}\right|_{r=r_0}=0$$

Полученных равенств достаточно для определения времени начала конвекции Fo_*, а также всех неизвестных величин в уравнении (1) в этот момент времени. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательные формулы для определения Fo_* и r_0

$$\frac{1}{2\gamma}=\frac{1}{2}\theta_0 r_0-\frac{1}{r_0}\int\limits_0^{r_0} r\theta\, dr \tag{6}$$

$$2\theta_0 r_0(1+r_0)-2\,Fo_* r_0-(1+2r_0)\frac{2}{r_0}\int\limits_0^{r_0} r\theta\, dr=0$$

Здесь $\theta_0=\theta(r_0)$. Отметим, что правая часть первого из этих равенств (обозначим ее через φ) является функцией только числа Фурье.

При бесконечно большом времени прогрева распределение температуры принимает вид [6] $\theta={}^1/_2 r^2+2Fo-{}^1/_4$. При этом функция φ достигает максимального значения $\varphi_\infty={}^1/_{64}$. Это значит, что первое из равенств (6) может быть выполнено только в том случае, когда $\gamma>1/(2\varphi_\infty)=\gamma_*$. Если же величина параметра γ меньше порогового значения $\gamma_*=32$, то конвекция возникнуть не может, независимо от времени прогрева.

На фиг. 2 показана зависимость функции φ от числа Фурье. Эта зависимость была получена из численного решения уравнений (6). При этом уравнение теплопроводности решалось методом сеток с использованием неявной разностной схемы. Основные расчеты проведены на равномерной сетке с шагом по пространству $\Delta r=0{,}002$ и шагом по времени $\Delta Fo=0{,}001$. Используя полученную зависимость $\varphi(Fo)$, легко определить время начала конвекции из уравнения $\varphi(Fo_*)=1/2\gamma$.

Результаты данной работы получены в предположении, что в поле течения, возникающего за порогом равновесия, имеются две квазитвердые зоны, а также три (в случае кольцевой прослойки) или две (в случае трубы) зоны вязкопластического течения. В действительности это предположение не ограничивает общности полученных результатов, так как подробный анализ показывает, что вблизи порога равновесия указанная структура конвективного течения является единственно возможной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Янг Веней, Е. Сучень.* Свободная конвекция пластика Бингама между двумя вертикальными пластинами.– Тр. Амер. об-ва инж.-механ. Сер. С. Теплопередача, 1965, т. 87, № 2, с. 189–190.
2. *Черкасов С. Г.* О комбинированнной конвекции вязкопластической жидкости в плоском вертикальном слое.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 6, с. 111–113.
3. *Любимова Т. П., Любимов Д. В.* Стационарная конвекция вязкопластической жидкости в вертикальном слое.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 2, с. 118–123.
4. *Черкасов С. Г.* О возникновении естественной конвекции при нестационарном прогреве вязкопластической жидкости в плоском вертикальном слое.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 4, с. 148–150.
5. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
6. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.V.1982

УДК 532.5

К ВОПРОСУ О РОСТЕ НАЛЕДЕЙ

ДЕМЕНТЬЕВА О. В.

Наледями называются массивы льда, образующиеся в результате вытекания на поверхность речных или подземных вод, их растекания и послойного замерзания. Процесс излияния воды обусловлен промерзанием того водоносного тракта, по которому циркулируют поверхностные и подземные воды. Наледи образуются зимой при промерзании живого сечения реки или водоносного слоя грунта. Если в основании водотока неглубоко залегает водоупор в виде скальных пород или многолетнемерзлых грунтов, то при промерзании в потоке возрастает напор, под действием которого вода выходит на поверхность.