

УДК 533.6.011.8

## ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В НЕРАВНОВЕСНОМ ДИССОЦИИРУЮЩЕМ ГАЗЕ

ГЕРАСИМОВ Г. Я., КОЛЕСНИЧЕНКО Е. Г.

Нарушение квазиравновесного распределения, вызванное как релаксационным процессом, так и гидродинамическими возмущениями, может существенно повлиять на скорость релаксационного процесса в газе. В выражении для этой величины появляются дополнительные члены, пропорциональные пространственным производным от гидродинамических переменных [1, 2]. Согласно оценкам [2], указанный эффект заметно проявляется в неравновесном диссоциирующем газе. В [3] приводятся оценки величины некоторых дополнительных членов для начальной стадии диссоциации в чистом двухатомном газе.

В настоящей работе получены выражения для коэффициентов при дополнительных членах гидродинамических уравнений в диссоциирующем двухатомном газе при всех степенях диссоциации. Оценки, проведенные на примере кислорода, показывают, что вклад дополнительных членов в уравнения гидродинамики сравним с вкладом обычных навье-стоксовских членов.

1. Рассмотрим диссоциирующий газ, состоящий из гомоядерных молекул и атомов, которые обозначим соответственно индексами 2 и 1. Предположим, что

$$\tau \sim \tau_D \gg \tau_V \gg \tau_R \gg \tau_T \quad (1.1)$$

где  $\tau$  — характерное время течения;  $\tau_D$ ,  $\tau_V$ ,  $\tau_R$  и  $\tau_T$  — времена релаксации (здесь и далее индексы  $D$ ,  $V$ ,  $R$  и  $T$  относятся соответственно к реакции диссоциации, колебательным, вращательным и поступательным степеням свободы частиц газа). В этом случае к быстрым процессам, приводящим систему в квазистационарное состояние, относятся упругие и неупругие столкновения. К медленным процессам, возмущающим это состояние, относятся диссоциационные столкновения и течение газа.

Обобщенное уравнение Больцмана для функции распределения  $f_{pi}$  частиц сорта  $p$ , обладающих скоростью центра масс  $\mathbf{v}_p$  и находящихся в  $i$ -м квантовом состоянии с внутренней энергией  $E_{pi}$ , в отсутствие внешних сил запишем в виде

$$\frac{\partial f_{pi}}{\partial t} + \mathbf{v}_p \cdot \nabla f_{pi} = -J_{pi}, \quad J_{pi} \equiv J_{pi}^E + J_{pi}^D \quad (1.2)$$

Здесь  $J_{pi}^E$  — обычные интегралы столкновений, описывающие упругие и неупругие взаимодействия между частицами газа,  $J_{pi}^D$  — диссоциативные интегралы столкновений. Вопросы, связанные с обоснованием обобщенного уравнения Больцмана для диссоциирующего газа, обсуждаются в [4]. Здесь используется частный вид этого уравнения, предложенный в [5]. Считается, что атомы не имеют внутренних степеней свободы. Внутренняя энергия молекул отсчитывается от основного состояния.

В условиях справедливости соотношений (1.1) в качестве гидродинамических переменных можно выбрать концентрации компонент  $n_p$ , среднemasсовую скорость  $\mathbf{v}$  и среднюю внутреннюю энергию газа или соответствующую температуру  $T$ . Уравнения переноса для этих переменных

получаются из (1.2) обычным путем и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dn_p}{dt} + n_p \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (n_p \mathbf{V}_p) &= r_p, \quad r_1 = -2r_2 \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{P} &= 0 \\ nc_v \frac{dT}{dt} - \Delta H [r_2 - \nabla \cdot (n_2 \mathbf{V}_2)] + \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{P} : \nabla \mathbf{v} &= 0 \\ \Delta H &= 1,5kT + D - E_{2i} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $\mathbf{V}_p$  — диффузионные скорости,  $r_p$  — скорость образования частиц сорта  $p$  в единице объема газа,  $\rho$  — плотность газа,  $\mathbf{P}$  — тензор давлений,  $n$  — полная плотность числа частиц газа,  $c_v$  — теплоемкость при постоянном объеме,  $\mathbf{q}$  — вектор теплового потока,  $\Delta H$  — теплота реакции диссоциации, где  $D$  — энергия диссоциации.

Решение уравнения (1.2) будем искать методом, описанным в [1, 2], представляя  $f_{pi}$  в виде

$$\begin{aligned} f_{pi} &= f_{pi}^{(0)} + \varepsilon f_{pi}^{(1)} + \varepsilon^2 f_{pi}^{(2)} + \dots, \quad \varepsilon f_{pi}^{(1)} = f_{pi}^{(0)} \Phi_{pi}, \quad \varepsilon^2 f_{pi}^{(2)} = f_{pi}^{(0)} \Psi_{pi} \\ f_{pi}^{(0)} &= n_p (m_p / 2\pi kT)^{3/2} Q_p^{-1} \exp(-W_p^2 - \varepsilon_{pi}) \\ W_p &= \left( \frac{m_p}{2kT} \right)^{1/2} \mathbf{c}_p, \quad \varepsilon_{pi} = \frac{E_{pi}}{kT}, \quad Q_p = \sum_i \exp(-\varepsilon_{pi}), \quad \mathbf{c}_p = \mathbf{v}_p - \mathbf{v} \end{aligned}$$

где  $\varepsilon$  — параметр, равный  $\tau_V / \tau_D$  и по порядку величины совпадающий с  $\tau_V / \tau$ . Функции  $\Phi_{pi}$  и  $\Psi_{pi}$  находятся из интегральных уравнений с модифицированным оператором столкновений. Вследствие несамосопряженности этого оператора непосредственное применение вариационного метода для нахождения  $\Phi_{pi}$  и  $\Psi_{pi}$  оказывается невозможным. Тем не менее их можно искать путем разложения по какой-либо полной системе функций, например по полиномам Сонина и Вальдмана — Триубебахаера, рассматривая такой подход как применение проекционного метода приближенного решения.

2. В нулевом приближении по  $\varepsilon$  из (1.3) получается система уравнений Эйлера

$$\begin{aligned} \frac{dn_p}{dt} + n_p \nabla \cdot \mathbf{v} &= r_p^{(0)} + r_p^{(1)}, \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = 0 \\ nc_v \frac{dT}{dt} - \Delta H (r_2^{(0)} + r_2^{(1)}) + p \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} r_2^{(0)} &= - \sum_i \int J_{2i}^D(f^{(0)}) d\mathbf{v}_2 = (\omega - 1) \sum_p \sum_{i,j,l} \int f_{2i}^{(0)} f_{pj}^{(0)} \sigma_{11,pj}^{2i,pj} d\mathbf{v} \\ r_2^{(1)}(\Phi) &= - \sum_i \int I_{2i}^D(\Phi) d\mathbf{v}_2, \quad r_1^{(1)} = -2r_2^{(1)} \end{aligned}$$

$$\omega = 8 \frac{n_1^2 Q_2 h^3}{n_2 g_1^2} (2\pi m_2 kT)^{-3/2} \exp\left(\frac{D}{kT}\right), \quad I_{pi} \equiv \frac{d}{d\lambda} J_{pi}[f^{(0)}(1 + \lambda\Phi)]_{\lambda=0}$$

Здесь  $p = nkT$ ,  $I_{pi}(\Phi)$  — линеаризованный оператор  $J_{pi}$ ,  $h$  — постоянная Планка,  $g_1$  — статистический вес основного состояния атома,  $\sigma_{11,pj}^{2i,pj}$  — вероятность превращения в единицу времени для процесса

$$(\mathbf{v}_2, E_{2i}) + (\mathbf{v}_p, E_{pj}) \rightarrow (\mathbf{v}_1') + (\mathbf{v}_1'') + (\mathbf{v}_p, E_{pi})$$

Штрихи у скоростей означают, что эти величины берутся после столкновения. Интегрирование в выражении для  $r_2^{(0)}$  ведется по всем скоростям сталкивающихся частиц до и после столкновения.

Уравнение для определения функции  $\Phi_{pi}$  имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{d_0 f_{pi}^{(0)}}{dt} + \mathbf{c}_p \cdot \nabla f_{pi}^{(0)} - \left( \frac{d_0 \mathbf{v}}{dt} \right) \left( \frac{\partial f_{pi}^{(0)}}{\partial \mathbf{c}_p} \right) - \\ & - \mathbf{c}_p \left( \frac{\partial f_{pi}^{(0)}}{\partial \mathbf{c}_p} \right) : \nabla \mathbf{v} + J_{pi}^D(f^{(0)}) = -I_{pi}^E(\Phi) - I_{pi}^D(\Phi) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

где индекс 0 у  $d/dt$  обозначает, что производные по  $t$  исключаются с помощью уравнений Эйлера (2.1). В соответствии со структурой уравнения величина  $\Phi_{pi}$  представляется в виде

$$\Phi_{pi} = -A_{pi} \cdot \nabla \ln T - B_{pi} : \nabla \mathbf{v} + n \sum_q C_{pi}^q \cdot \mathbf{d}_q - D_{pi} \nabla \cdot \mathbf{v} - F_{pi} \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{d}_q$  — диффузионные силы. Ненулевой вклад в  $r_2^{(1)}$  дают только последние два члена разложения (2.3). Поэтому

$$\begin{aligned} r_2^{(1)}(\Phi) &= -\mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} - \theta^{(1)} \\ \mathbf{v} &= - \sum_p \sum_{i,j,l} \int f_{2i}^{(0)} f_{pj}^{(0)} [D_{2i} + D_{pj} - \omega(D_{i1}' + D_{i1}'' + D_{pl}')] \sigma_{i1,pl}^{2i,pj} d\mathbf{v} \\ \theta^{(1)} &= - \sum_p \sum_{i,j,l} \int f_{2i}^{(0)} f_{pj}^{(0)} [F_{2i} + F_{pj} - \omega(F_{i1}' + F_{i1}'' + F_{pl}')] \sigma_{i1,pl}^{2i,pj} d\mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Коэффициент  $\mathbf{v}$  представляет собой вклад в  $r_2^{(1)}$  за счет гидродинамических возмущений. Появление величины  $\theta^{(1)}$  есть следствие нарушения максвелл-больцмановского распределения  $f_{pi}^{(0)}$  самим релаксационным процессом.

Подстановка разложения (2.3) в уравнение (2.2) приводит к распадению последнего на независимые интегральные уравнения для определения функций  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $F$ . Уравнения для  $D$  и  $F$  имеют вид

$$f_{pi}^{(0)} \left[ \frac{2c_i(W_p^2 - 1,5)}{3c_v} - (\varepsilon_{pi,R} - \varepsilon_{p,R} + \varepsilon_{pi,V} - \varepsilon_{p,V}) \frac{k}{c_v} \right] = I_{pi}(D) + \beta_{pi} \mathbf{v} \quad (2.5)$$

$$J_{pi}^D(f^{(0)}) + \beta_{pi} r_2^{(0)} = I_{pi}(F) + \beta_{pi} \theta^{(1)}$$

$$\beta_{pi} = f_{pi}^{(0)} \left[ \frac{(3\delta_{p2} - 2)}{n_p} + \sum_m (Z_{pi,m} - Z_{p,m}) \frac{\Delta H}{nc_v T} \right] \quad (2.6)$$

$$Z_{pi,T} = W_p^2, \quad Z_{pi,R} = \varepsilon_{pi,R}, \quad Z_{pi,V} = \varepsilon_{pi,V}, \quad Z_{p,T} = 1,5$$

$$Z_{pm} = \sum_i \varepsilon_{pi,m} \exp(-\varepsilon_{pi,m}) / \sum_i \exp(-\varepsilon_{pi,m}), \quad m=R, V$$

где  $x_p = n_p/n$ ,  $c_{2m}$  — теплоемкость  $m$ -й степени свободы молекулы,  $c_i = x_2(c_{2,R} + c_{2,V})$ ,  $\delta_{pq}$  — символ Кронекера. Здесь и в дальнейшем при  $p=1$  индекс  $m=T$ , при  $p=2$  индекс  $m=T, R, V$ .

Для нахождения первого исчезающего приближения для  $D_{pi}$  и  $E_{pi}$  разложим эти величины в ряд по полиномам Сонина и Вальдмана — Трюбенбахера и удержим первые члены разложения

$$D_{pi} = d_0 + \sum_m d_{pm}(Z_{pm} - Z_{pi,m}), \quad F_{pi} = f_0 + \sum_m f_{pm}(Z_{pm} - Z_{pi,m}) \quad (2.7)$$

Из дополнительных условий, накладываемых в методе Чепмена — Энскога на функцию  $\Phi_{pi}$ , следует, что

$$d_0=f_0=0, \quad \sum_{p,m} n_p c_{pm} d_{pm}=0, \quad \sum_{p,m} n_p c_{pm} f_{pm}=0 \quad (2.8)$$

Введем величины  $Q_{pm}^{(1)}$  и  $\alpha_{pm}$  по формулам

$$Q_{pm}^{(0)} = \sum_i \int (Z_{pi,m} - Z_{pm}) J_{pi}^D (f^{(0)}) dv_p, \quad Q_{pm}^{(0)} = -\alpha_{pm} r_2^{(0)} \Delta H / kT \quad (2.9)$$

Первая из этих величин представляет собой уменьшение средней энергии  $m$ -й степени свободы частицы сорта  $p$  в единицу времени за счет реакции диссоциации в равновесных условиях, вторую можно интерпретировать как степень участия  $m$ -й степени свободы частицы сорта  $p$  в преодолении энергетического порога диссоциации.

В неравновесном диссоциирующем газе  $0 \leq \omega \leq 1$ . Подставив разложения (2.7) в (2.4) и воспользовавшись формулами (2.9), вблизи диссоциационного равновесия ( $\omega \approx 1$ ) можно показать, что

$$v = r_2^{(0)} \frac{\Delta H}{kT} (\omega - 1)^{-1} \sum_{p,m} d_{pm} \alpha_{pm}, \quad \theta^{(1)} = r_2^{(0)} \frac{\Delta H}{kT} (\omega - 1)^{-1} \sum_{p,m} f_{pm} \alpha_{pm} \quad (2.10)$$

Приближенно эти соотношения сохраняются и при больших неравновесностях, когда  $\omega \rightarrow 0$ .

Умножим уравнения (2.5), (2.6) на  $(Z_{pi,m} - Z_{pm})$ , проинтегрируем по  $v_p$  и просуммируем по  $i$ . Получим две системы линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложения функций  $D_{pi}$  и  $F_{pi}$

$$R_{pm} = \sum_{q,n} Q_{pq,mn} d_{qn} - \frac{\Delta H}{kT} \left( \alpha_{pm} - \frac{x_p c_{pm}}{c_v} \right) v \quad (2.11)$$

$$0 = \sum_{q,n} Q_{pq,mn} f_{qn} + \frac{\Delta H}{kT} \left( \alpha_{pm} - \frac{x_p c_{pm}}{c_v} \right) (r_2^{(0)} - \theta^{(1)}) \quad (2.12)$$

$$R_{p,T} = \frac{n_p c_I}{c_v}; \quad R_{pm} = -\frac{n_p c_{pm}}{c_v}, \quad m=R, V$$

При получении этих систем использовано определение (2.9) величин  $\alpha_{pm}$  и приближенные равенства

$$\sum_i \int (Z_{pi,m} - Z_{pm}) J_{pi}^D (D) dv_p \approx - \left( \frac{\Delta H}{kT} \right) v \alpha_{pm}$$

$$\sum_i \int (Z_{pi,m} - Z_{pm}) J_{pi}^D (F) dv_p \approx - \left( \frac{\Delta H}{kT} \right) \theta^{(1)} \alpha_{pm}$$

Эти равенства становятся точными для модели [6], в которой диссоциация протекает с последнего колебательного уровня. Коэффициенты  $Q_{pq,mn}$  при неизвестных  $d_{qn}$  и  $f_{qn}$  выражаются через общепринятые в кинетической теории газов интегралы столкновений  $\Omega_{pq}^{(1,1)}$  и скобочные интегральные выражения  $\langle (\Delta \epsilon_R)^2 \rangle_{pq}$  и  $\langle (\Delta \epsilon_V)^2 \rangle_{pq}$  [7], которые в свою очередь можно выразить соответственно через коэффициенты вязкости  $\eta_{pq}$  и времена релаксации  $\tau_R$  и  $\tau_V$ .

Уравнения систем (2.11), (2.12) линейно зависимы (сумма уравнений такой системы равна нулю). Поэтому одно из уравнений, например уравнение с  $p=2, m=T$ , необходимо заменить на (2.8). Добавляя сюда соотношения (2.10), связывающие  $v$  и  $\theta^{(1)}$  с коэффициентами разложения  $d_{pm}$  и  $f_{pm}$ , получим общие системы, из которых можно получить выражения для  $v$  и  $(r_2^{(0)} - \theta^{(1)})$  в виде отношения двух определителей пятого порядка. Оценка элементов определителей  $Q_{pq,mn}$  с учетом соотношений  $\tau_V \gg \tau_R \gg \tau_T$ , выполняющихся для двухатомного газа в достаточно широкой области температур, показывают, что все эти величины можно положить равными нулю, за исключением

$$Q_{11,TT} \approx -Q_{12,TT} \approx \frac{16}{9} n_1 n_2 \Omega_{12}^{(1,1)} = \frac{5}{9} \frac{n_1 n_2 kT}{A_{12}^* \eta_{12}}$$

$$Q_{22,mm} = -4n_1 n_2 \langle (\Delta \epsilon_m)^2 \rangle_{12} - 2n_2^2 \langle (\Delta \epsilon_m)^2 \rangle_{22} = -\frac{c_{2m}}{k} n_2 \left( \frac{x_1}{\tau_{12,m}} + \frac{x_2}{\tau_{22,m}} \right), \quad m=R, V$$

где  $\tau_{12,m}$  и  $\tau_{22,m}$  — время релаксации  $m$ -й степени свободы молекулы на атомах и молекулах соответственно. Это позволяет упростить выражения для  $v$  и  $(r_2^{(0)} - \theta^{(1)})$  и записать их в виде

$$\nu \approx \frac{\Delta H}{kT} \frac{r_2^{(0)}}{\omega-1} \left( \alpha_{2,\nu} - x_2 \frac{c_{2,\nu}}{c_\nu} \right) \frac{R_{2,\nu} c_\nu Q_{12,T} Q_{22,R}}{\Delta} \quad (2.13)$$

$$r_2^{(0)} - \theta^{(1)} \approx \frac{r_2^{(0)} c_\nu Q_{12,T} Q_{22,R} Q_{22,\nu}}{\Delta}$$

где  $\Delta$  — определитель системы для  $(r_2^{(0)} - \theta^{(1)})$ .

Из соотношений (2.13) легко получить окончательное выражение для коэффициента  $\nu$

$$\nu \approx \frac{\Delta H}{kT} \frac{r_2^{(0)} - \theta^{(1)}}{\omega-1} \left( \alpha_{2,\nu} - x_2 \frac{c_{2,\nu}}{c_\nu} \right) \frac{k}{c_\nu} \left( \frac{x_1}{\tau_{12,\nu}} + \frac{x_2}{\tau_{22,\nu}} \right)^{-1} \quad (2.14)$$

Скорость диссоциации в пространственно однородной системе  $(\tau_{22}^{(0)} - \theta^{(1)})$ , входящую в (2.14), можно выразить через экспериментально определяемые константы скорости диссоциации  $K_{12}(T)$  и  $K_{22}(T)$

$$r_2^{(0)} - \theta^{(1)} = (\omega-1) (K_{12} x_1 x_2 + K_{22} x_2^2) n^2$$

На фигуре приведены результаты расчета величины  $\beta = \nu \Delta H / p$  для кислорода. Кривые 1–4 соответствуют температурам 4, 5, 6 и  $7 \cdot 10^3$  К соответственно. Данные для расчета взяты из [8]. Величина  $\alpha_\nu$  оценивалась с использованием экспериментальных данных по диссоциации двухтемпературного газа при экстраполяции к условию  $T_\nu = T$ . При таком подходе из данных работы [9] получается  $\alpha_\nu \approx 1$ .

Дополнительный член  $\beta p \nabla \cdot \mathbf{v}$ , появляющийся в уравнении теплопроводности, можно рассматривать как изменение работы внутренних сил вследствие неравновесных эффектов. Анализ результатов расчета величины  $\beta$  показывает, что при температурах порядка 7000 К этот член в несколько раз превышает обычную работу внутренних сил. При более высоких температурах нарушаются соотношения (1.1) и однетемпературное приближение становится неприменимым.

3. В первом приближении по  $\epsilon$  величины  $V_p$ ,  $r_p$ ,  $P$  и  $q$ , входящие в уравнения переноса (1.3), имеют вид

$$n_p V_p = \frac{n^2}{\rho} m_q D_{12} d_q$$

$$r_p = r_p^{(0)} + r_p^{(1)} + r_p^{(2)}(\Phi) + r_p^{(2)}(\Psi)$$

$$P = (p - \kappa \nabla \cdot \mathbf{v} - \xi) U - 2\eta S$$

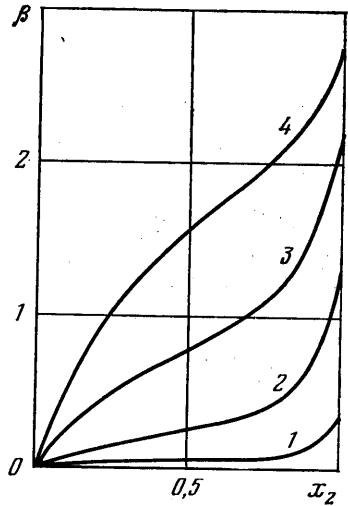
$$q = (kT + \Delta H) \delta d_2 - \lambda \nabla T, \quad \delta = \frac{n D_{12}}{1 + x_2}$$

$$r_p^{(2)}(\Phi) = - \sum_i \int J_{pi}^D(\Phi) dv_p,$$

$$r_p^{(2)}(\Psi) = - \sum_i \int I_{pi}^D(\Psi) dv_p$$

(3.1)

Здесь  $D_{12}$  — коэффициент диффузии бинарной смеси,  $\kappa$  и  $\eta$  — коэф-



коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости,  $\xi$  — релаксационное давление,  $\mathbf{U}$  — единичный тензор,  $\mathbf{S}$  — тензор скоростей сдвига,  $\lambda = \sum_{p,m} \lambda_{pm}$  — коэффициент теплопроводности. Термодиффузионными эффектами в рассматриваемом случае пренебрегается. Подстановка (3.1) в (1.3) приводит к системе уравнений навье-стоксовского приближения для неравновесного диссоциирующего газа.

Уравнения для определения функции  $\Psi_{pi}$ , входящей в выражение для  $r_p^{(2)}(\Psi)$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d_0 f_{pi}^{(1)}}{dt} + \frac{\partial_1 f_{pi}^{(0)}}{\partial t} + c_p \cdot \nabla f_{pi}^{(1)} - \frac{d_0 v}{dt} \cdot \frac{\partial f_{pi}^{(1)}}{\partial c_p} - \\ - \frac{\partial_1 \mathbf{U}}{\partial t} \frac{\partial f_{pi}^{(0)}}{\partial c_p} + J_{pi}(\Phi) = -I_{pi}^E(\Psi) - I_{pi}^D(\Psi) \end{aligned} \quad (3.2)$$

В левую часть (3.2) необходимо подставить функции  $f_{pi}^{(0)}$  и  $f_{pi}^{(1)}$  и исключить производные  $d_0/dt$  с помощью уравнений Эйлера, а производные  $\partial_1/\partial t$  — с помощью разности уравнений навье-стоксовского и эйлеровского приближений. Функция  $f_p^{(1)}$  выражается через коэффициенты разложения функций  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $F$  по полиномам Солина и Вальдмана — Трюбенбахера, которые в свою очередь можно выразить через величины  $D_{12}$ ,  $\eta_{pq}$  и  $\lambda_{pm}$ .

В соответствии со структурой уравнения (3.2) величина  $\Psi_{pi}$  представляется в виде суммы членов, различающихся между собой тензорной размерностью. Например, члены, включающие пространственные производные от  $T$ , имеют вид

$$\Psi_{pi} = -\mathbf{G}_{pi} : \nabla \nabla T - H_{pi} \Delta T - \mathbf{L}_{pi} : \nabla T \nabla T - M_{pi} (\nabla T)^2 - \dots \quad (3.3)$$

Подставив (3.3) в выражение для  $r_2^{(2)}(\Psi)$ , получим

$$r_2^{(2)}(\Psi) = -\mu_T \Delta T - \zeta_T (\nabla T)^2$$

где  $\mu_T$  и  $\zeta_T$  выражаются соответственно через функции  $H_{pi}$  и  $M_{pi}$ . Уравнения для определения этих функций имеют вид

$$f_{pi}^{(0)} \left[ \lambda \sum_m \frac{Z_{pi,m} - Z_{pm}}{nc_v T} - \frac{A_{pi} \cdot c_p}{3T} \right] = I_{pi}(H) + \beta_{pi} \mu_T \quad (3.4)$$

$$f_{pi}^{(0)} \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial T} \sum_m \frac{Z_{pi,m} - Z_{pm}}{nc_v T} - \frac{\partial A_{pi}}{\partial T} \frac{c_p}{3T} \right] + \frac{1}{3T^2} J_{pi}(f^{(0)} A) = I_{pi}(M) + \beta_{pi} \zeta_T \quad (3.5)$$

Сравнение уравнений (3.4), (3.5) с уравнением (2.5) для функции  $D_{pi}$  показывает, что они отличаются только левой частью. Поэтому системы линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $\mu_T$  и  $\zeta_T$  будут отличаться от системы (2.11) только вектором свободных членов  $R_{pm}$ . Так как из всех величин  $R_{pm}$  только  $R_{2,v}$  вошла в выражение (2.13) для коэффициента  $\nu$ , для  $\mu_T$  и  $\zeta_T$  получаются выражения, аналогичные (2.13), в которых  $R_{2,v}$  необходимо заменить на соответствующую величину для уравнений (3.4), (3.5). Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \mu_T &= -\frac{\beta}{\Delta H} \left( \lambda - \lambda_{2,v} \frac{c_v}{c_{2,v} x_2} \right) \\ \zeta_T &= -\frac{\beta}{\Delta H} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial T} - \frac{\partial \lambda_{2,v}}{\partial T} \frac{c_v}{c_{2,v} x_2} \right) \end{aligned}$$

С погрешностью не более 10% величины  $\mu_T \Delta H / \lambda$  и  $\zeta_T \Delta H (\partial \lambda / \partial T)$  во

всем интервале изменения  $x_2$  аппроксимируются выражением

$$\mu_T \frac{\Delta H}{\lambda} \approx \frac{\zeta_T \Delta H}{(\partial \lambda / \partial T)} \approx (0,44x_2 - 0,67) \beta$$

Таким образом, при достаточно высоких температурах вклад дополнительных членов, пропорциональных  $\Delta T$  и  $(\nabla T)^2$ , в уравнение теплопроводности сравним с вкладом обычных навье-стоксовских членов. Поскольку  $\partial(\mu_T \Delta H) / \partial T \neq \zeta_T \Delta H$ , дополнительные члены меняют не только величину коэффициентов при  $\Delta T$  и  $(\nabla T)^2$ , но и структуру самого уравнения теплопроводности.

При наличии в газе пространственных производных от температуры, концентрации молекул и давления общее выражение для  $r_2^{(0)}(\Psi)$  в пренебрежении пространственными производными среднemasсовой скорости можно записать в виде

$$\begin{aligned} r_2^{(2)}(\Psi) = & -\theta^{(2)} - \mu_T \Delta T - \zeta_T (\nabla T)^2 - \mu_x \Delta x_2 - \zeta_x (\nabla x_2)^2 - \\ & - \mu_p \Delta p - \zeta_p (\nabla p)^2 - \sigma_{Tx} (\nabla T \cdot \nabla x_2) - \\ & - \sigma_{Tp} (\nabla T \cdot \nabla p) - \sigma_{px} (\nabla p \cdot \nabla x_2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Вычисления, аналогичные проведенным при расчете коэффициентов  $\mu_T$  и  $\zeta_T$ , приводят к следующим выражениям для коэффициентов в равенстве (3.6):

$$\mu_x = \beta \frac{\delta}{\gamma}, \quad \zeta_x = \beta \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \delta}{\partial x_2}, \quad \mu_p = \beta \frac{\delta \varphi}{p \gamma}, \quad \zeta_p = \beta \frac{\delta \varphi}{p^2 \gamma}$$

$$\sigma_{Tx} = \beta \frac{\delta \kappa_T}{\gamma T} \left[ 1 + \frac{c_v}{x_2 k \kappa_T} \left( 1 + \frac{1}{\delta c_{2,v}} \frac{\partial \lambda_{2v}}{\partial T} \right) \right],$$

$$\sigma_{Tp} = \beta \frac{\delta \varphi \kappa_p}{\gamma p T} \left( 1 + \frac{c_v}{x_2 k \kappa_p} \right)$$

$$\sigma_{px} = \beta \frac{\delta (3x_2 - 1)}{p \gamma (1 + x_2)^2}, \quad \gamma = \frac{\Delta H}{kT}, \quad \varphi = x_2 - \frac{2x_2}{1 + x_2}$$

$$\kappa_T = 2,5 - \frac{c_I}{k} + \frac{T}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial T} - \frac{1}{k \delta} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2}, \quad \kappa_p = 2,5 - \frac{c_I}{k} + \frac{T}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial T}$$

Оценки, проведенные на примере кислорода, показывают, что  $|\theta^{(2)}| \ll \ll |\theta^{(1)}|$ ,  $|r^{(2)}(\Phi)| \ll |r^{(2)}(\Psi)|$ , поэтому в уравнениях навье-стоксовского приближения этими величинами можно пренебречь.

Проведенные оценки показывают, что последовательный учет влияния неравновесных эффектов существенно меняет в определенных условиях вид гидродинамических уравнений навье-стоксовского приближения. В связи с этим представляется интересной постановка вопроса о проведении более подробных расчетов этих эффектов и об экспериментальном исследовании их проявлений в течениях реагирующих газов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Колесниченко Е. Г. Вывод гидродинамических уравнений для многоатомных и химически реагирующих газов.— Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 1, с. 40–42.
2. Колесниченко Е. Г., Лосев С. А. Кинетика релаксационных процессов в движущихся средах.— В кн.: Химия плазмы. Вып. 6. М.: Атомиздат, 1979, с. 209–229.
3. Герасимов Г. Я., Колесниченко Е. Г. О влиянии неравновесных эффектов на явления переноса в диссоциирующем газе.— Письма в ЖТФ, 1981, т. 7, вып. 16, с. 965–968.
4. Колесниченко Е. Г. О формулировке кинетических уравнений для химически реагирующих газов.— Теплофиз. высоких температур, 1980, т. 18, с. 55–62.
5. Людвиг Г., Хейль М. Теория пограничного слоя с диссоциацией и ионизацией.— В кн.: Проблемы механики. Вып. 4. М.: Изд-во иностр. лит., 1963, с. 39–99.
6. Ступоченко Е. В., Лосев С. А., Осипов А. И. Релаксационные процессы в ударных волнах. М.: Наука, 1965. 484 с.
7. Monchick L., Yun K. S., Mason E. A. Formal kinetic theory of transport phenomena in polyatomic gas mixtures.— J. Chem. Phys., 1963, v. 39, № 3, p. 654–669.
8. Vreen J. E., Ouy R. B., Glass G. P. Vibrational relaxation of O<sub>2</sub> in the presence of atomic oxygen.— J. Chem. Phys., 1973, v. 59, № 4, p. 556–557.
9. Шаталов О. П. О диссоциации молекулярного кислорода в отсутствие колебательного равновесия.— Физ. горения и взрыва, 1973, т. 9, № 5, с. 699–703.

Москва

Поступила в редакцию  
25.V.1982