

УДК 533.6.011.7—2.532.5.013.4

**УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКИХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ
В РАСШИРЯЮЩИХСЯ ОБЛАСТЯХ**

ЕГОРУШКИН С. А.

На возможность применения геометрической акустики к исследованию устойчивости течений в расширяющихся областях было указано в [1], где исследовалась устойчивость однородных потоков газа, разделенных поверхностями разрывов. В [2] геометрическая акустика применялась к анализу устойчивости решений симметричных гиперболических систем, коэффициенты которых не зависят явно от времени. Рассмотрение проводилось в неограниченных областях в случае отсутствия акустических точек. Устойчивость газодинамических течений, удовлетворяющих этим ограничениям, рассмотрена в [3–4].

В настоящей работе рассмотрен вопрос об устойчивости плоских автомодельных течений в расширяющихся областях [5] относительно слабых двумерных возмущений. Процесс распространения возмущений по газу описывался в приближении геометрической акустики [6–8]. Интенсивность возмущений характеризовалась полной энергией E волнового пакета, поведение которой при $t \rightarrow \infty$ выбиралось в качестве критерия устойчивости рассматриваемого течения. Было показано, что $E \rightarrow 0$ со временем в задачах о сильном взрыве и о замедленно движущемся поршне. В задаче об ускоренно движущемся поршне полная энергия слабых возмущений неограниченно возрастает со временем.

1. Рассмотрим одномерное нестационарное течение идеального газа, скорость u_0 которого параллельна оси X некоторой инерциальной декартовой системе координат XY . Такое течение описывается уравнениями [9]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 u_0) &= 0, \quad \frac{\partial s_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial s_0}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$p_0 = p_0(\rho_0, s_0)$$

Здесь u_0 — скорость, ρ_0 — плотность, p_0 — давление, s_0 — энтропия газа. Изучаемое течение будем называть течением в расширяющейся области, если его характерный размер L неограниченно растет со временем.

Рассмотрим процесс распространения по потоку слабого возмущения в виде волнового пакета, характеризующегося волновым вектором $\mathbf{k} = \{k_x, k_y\}$ и частотой ω . Так как параметры потока не зависят от y , то можно считать, что k_y постоянно. Поэтому длина волны l рассматриваемого возмущения ограничена сверху величиной $1/k_y$, т. е. $lL^{-1} \leq (k_y L)^{-1} \rightarrow 0$, $L \rightarrow \infty$. Следовательно, распространение двумерных возмущений по прошествии достаточно большого времени может быть описано в приближении геометрической акустики [6–8]. Это означает, что бесконечно малые элементы волнового фронта распространяются каждый вдоль своей траектории (луча) независимо друг от друга. Поэтому для описания поля возмущений достаточно уметь находить произвольную траекторию и изменение при движении вдоль нее вектора \mathbf{k} и интенсивности волнового пакета.

Локальное дисперсионное уравнение для системы (1.1) имеет вид

$$\omega_{\pm} = u_0 k \pm a_0 \sqrt{k^2 + 1}, \quad \omega = \frac{\omega'}{k_y}, \quad k = \frac{k_x}{k_y}$$

Ветвь ω_+ соответствует движению пакета в положительном направлении оси x , а ветвь ω_- — в отрицательном. Положив $\omega_-(k) = \omega_+(-k)$ и считая величину k меняющейся от $-\infty$ до $+\infty$, можно обойтись только одной ветвью дисперсионного уравнения, например $\omega = \omega_+$. Тогда уравнения геометрической акустики запишутся в виде [6, 7]

$$\frac{dk}{dt} = -k \frac{\partial u_0}{\partial x} - \sqrt{k^2 + 1} \frac{\partial a_0}{\partial x}, \quad \frac{dx}{dt} = u_0 + \frac{a_0 k}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad (1.2)$$

Интенсивность рассматриваемого возмущения характеризуется средней по периоду плотностью энергии волнового пакета [8]

$$\varepsilon = \frac{p'^2}{\rho_0 a_0^3} \left[a_0 + \frac{(u_0, k)}{|k|} \right] \quad (1.3)$$

где p' — возмущение давления в рассматриваемой волне. Аналогично случаю стационарного фона [8] можно показать, что если основное течение не только неоднородно, но и нестационарно, то ε удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon \frac{\partial c}{\partial x} = \varepsilon \frac{d \ln \omega}{dt}, \quad c = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (1.4)$$

Здесь c — групповая скорость. Полная производная берется вдоль луча $dx/dt = c$.

Если групповая скорость c есть функция k , то лучи, соответствующие разным начальным точкам x_0 , могут пересекаться. В окрестности точек пересечения приближение геометрической акустики становится неверным, а величина ε обращается в бесконечность. Поэтому неограниченный рост решений уравнения (1.4), т. е. амплитуды рассматриваемого возмущения, не всегда соответствует неустойчивости изучаемого течения. Следовательно, интенсивность возмущений удобно и физически более оправданно характеризовать полной энергией волнового пакета $E = \varepsilon \sigma$ (σ — длина волнового пакета), которая остается ограниченной в окрестности точек пересечения лучей. Поэтому неограниченный рост величины E может служить критерием неустойчивости изучаемого течения, хотя возможны и другие критерии.

Длина волнового пакета σ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\sigma}{dt} - \sigma \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

Из уравнений (1.4) — (1.5) следует, что полная энергия E удовлетворяет соотношению

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{E}{\omega} \right) = 0 \quad (1.6)$$

что представляет собой закон сохранения волнового действия [7] в геометрической акустике. В случае стационарного потока, когда ω постоянна, закон сохранения волнового действия переходит в закон сохранения полной энергии E , выражающий отсутствие энергообмена между стационарным фоном и быстроосциллирующим пакетом.

2. Изучим процесс взаимодействия волнового пакета с границами области течения (в частности, со скачком уплотнения) и связанное с этим изменение энергии E . Для этого в текущий момент времени t введем подвижную декартову систему координат X_1, Y_1 , ось Y_1 которой совпадает с удар-

ной волной, а скорость движения постоянна и равна скорости ударной волны в рассматриваемый момент времени t . Наряду с волновым числом k введем величину v — косинус угла между вектором k и осью X . Пусть индекс 1 относится к падающему, а индекс 2 — к отраженному возмущению. Равенство скорости распространения по скачку падающей и отраженной волны приводит к соотношению между величинами v_1 и v_2

$$v_2 = M + \frac{(v_1 - M)(1 - M^2)}{2Mv_1 - 1 - M^2} \quad (2.1)$$

Из граничного условия на ударной волне для безразмерных возмущений скорости u' и давления p' и связи между ними в падающей и отраженной волне легко получить

$$\left(\frac{p_2'}{p_1'}\right)^2 = \left(\frac{\delta + 1 - 2Mv_1}{\delta + 1 - 2Mv_2}\right)^2, \quad \delta = -(\rho V)^2 \left(\frac{\partial(1/\rho)}{\partial p}\right)_n \quad (2.2)$$

Здесь в качестве характерной скорости взята величина V — скорость газа в подвижных осях $X_1 Y_1$, характерное давление $p = \rho V^2$, число Маха $M = -V/a_0$, δ — безразмерная производная вдоль ударной адиабаты.

При отражении от ударной волны длина волнового пакета меняется так, что

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{M - v_2}{-M + v_1} \quad (2.3)$$

Согласно (1.3), в подвижных осях $X_1 Y_1$

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) = \left(\frac{p_2'}{p_1'}\right)^2 \frac{1 - Mv_2}{1 - Mv_1} \quad (2.4)$$

Таким образом, на основании (2.1)–(2.4) для коэффициента усиления полной энергии пакета получим соотношение

$$\frac{E_2}{E_1} = \kappa^2, \quad \kappa = \frac{(\delta + 1 - 2Mv_1)(1 - M^2)}{(\delta + 1)(M^2 + 1 - 2Mv_1) + 2M(v_1(1 + M^2) - 2M)} \quad (2.5)$$

Анализ выражения (2.5) показывает, что $\kappa < 1$ для устойчивых по Дьякову [10, 11] ударных волн при произвольных значениях числа Маха $0 < M < 1$ и величины $M < v_1 < 1$, т. е. для всех приходящих на ударную волну возмущений. Таким образом, полная энергия волнового пакета при взаимодействии с ударной волной убывает.

Аналогичное рассмотрение показывает, что при взаимодействии с твердой стенкой $\kappa = 1$, а при взаимодействии с контактным разрывом $\kappa = (1 - \rho a)/(1 + \rho a)$, $\rho a = \rho_1 a_1/(\rho_2 a_2)$ индекс 1 относится к области перед, а индекс 2 — за контактным разрывом.

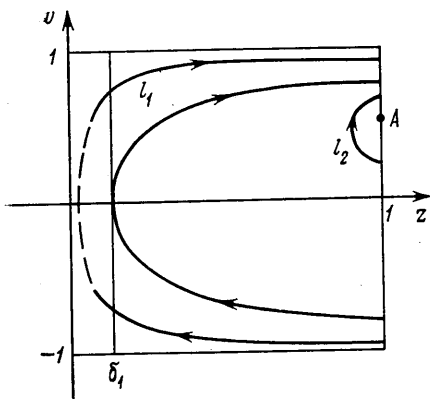
3. Применим соотношения (1.2), (1.6), (2.5) для анализа устойчивости плоских автомодельных течений в расширяющихся областях. Такие течения возникают [5] в задачах о сильном взрыве и о вдвигаемом в газ поршне, скорость которого изменяется со временем по степенному закону, а начальное давление перед поршнем равно нулю.

Пусть $z = xt^{-\lambda}$, $0 < \lambda < \infty$, — автомодельная переменная. Если характерной скоростью задачи является скорость ударной волны $[V] = dx_c/dt = \lambda t^{\lambda-1}$, то безразмерные скорость газа $u(z)$ и скорость звука $a(z)$ есть $u(z) = u_0 \lambda^{-1} t^{1-\lambda}$, $a(z) = a_0 \lambda^{-1} t^{1-\lambda}$, где x_c — координата ударной волны.

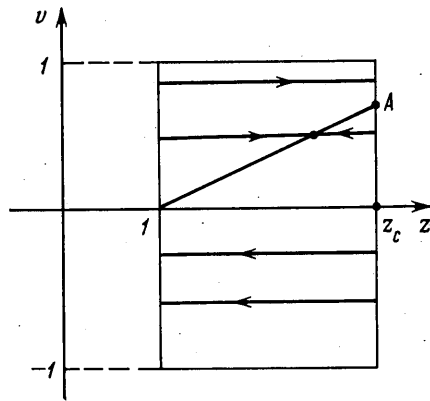
Тогда система (1.2) запишется в форме

$$\frac{dv}{d\tau} = -u_z'(1-v^2)(v-\varphi), \quad \frac{dz}{d\tau} = a(v-\psi) \quad (3.1)$$

$$v = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}, \quad \varphi = -\frac{da}{du}, \quad \psi = \frac{z-u}{a}, \quad \tau = \lambda \ln t$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Закон сохранения волнового действия с учетом дисперсионного уравнения примет вид

$$E = \frac{E_0}{\omega_0} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\lambda-1} (uk + a\sqrt{k^2+1}) \quad (3.2)$$

Рассмотрим задачу о сильном взрыве, когда образуется симметричное относительно центра взрыва ($a(z) = a(-z)$ и $u(z) = -u(-z)$) течение с показателем автомодельности $\lambda = 2/3$. Задача о сильном взрыве допускает аналитическое решение, имеющее в окрестности $t = 0$ асимптотику $u(z) \approx z/\gamma$, $a(z) \approx z^{(1-\gamma)/2}$ [5]. Траектории системы (3.1) занимают область $Q = \{0 < z < 1, -1 < v < 1\}$ фазовой плоскости (z, v) , причем $t = 0$ соответствует центру взрыва.

Необходимо отметить, что приближение геометрической акустики перестает быть справедливым в узкой зоне около центра взрыва, где отношение длины волны приходящего возмущения к характерному линейному размеру основного течения, определяемого градиентами функций u_0, a_0 , перестает быть малой величиной. Можно показать, что ширина этой зоны δ_1 стремится со временем к нулю по закону $\delta_1 \approx t^{-1}$ и что на границе рассматриваемой зоны величины v и E удовлетворяют условиям отражения от твердой стенки. Это означает, в частности, что полная энергия E не меняется в области $0 < z < \delta_1$. Поэтому для исследования устойчивости течения достаточно вести рассмотрение в области применимости геометрической акустики $\delta_1 < z < 1$, которая, как было сказано ранее, совпадает при $t \rightarrow \infty$ со всей областью течения. Аналогичные выводы справедливы и в случае задачи о поршне. Узкая зона, где приближение геометрической акустики неверно, расположена около поршня.

В соответствии с асимптотиками функций $u(z)$ и $a(z)$ траектории системы (3.1) в окрестности $z=0$ описываются соотношением

$$v^2 = 1 - (1 - v_0^2) \left(\frac{z_0}{z} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

где (z_0, v_0) — начальная точка рассматриваемой траектории, причем ни одна траектория, начинающаяся внутри области Q , не выходит на ее границу $z=0$.

Численные расчеты показывают, что в случае задачи о сильном взрыве система (3.1) не имеет особых точек. Поэтому качественная картина интегральных кривых системы (3.1) имеет вид, изображенный на фиг. 1. Стрелками изображено движение по траекториям с течением времени.

Асимптотика системы (3.1) в окрестности границ $v = \pm 1$ области Q показывает, что при последовательных отражениях от скачка траектория l_1 (фиг. 1), близкая к границам $z=0, v = \pm 1$ области Q , смещается внутрь

области (по направлению к траектории l_2), если

$$k_0 > \frac{(1-M)^2}{(1+M)^2}, \quad k_0 = \exp \left[\int_0^1 \frac{4u'}{a(1-\psi^2)} (1-\varphi\psi) dz \right] \quad (3.3)$$

Асимптотическое исследование траекторий в окрестности т. $A=(1, M)$ (фиг. 1) показывает, что кривая l_2 , лежащая в окрестности т. A , «наматывается» на т. A , если

$$k_1 > \frac{-2M}{1-M^2}, \quad k_1 = \frac{a(1)\psi'(1)}{(1-M^2)(\varphi(1)-M)u'(1)} \quad (3.4)$$

Вычисления показывают, что неравенства (3.3)–(3.4) выполняются, так что любой волновой пакет за конечное время оказывается в окрестности т. A . Так как в окрестности т. A функция $ku+a\sqrt{k^2+1}$ ограничена, $(t/t_0)^{\lambda-1}=(t/t_0)^{-1/2} \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ и $\kappa^2 < 1$, то $E \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, рассматриваемое течение устойчиво.

Перейдем теперь к задаче о поршне. При $\lambda=1$ течение между поршнем и ударной волной является однородным. Если в качестве характерной скорости задачи взять скорость поршня, то $u(z)=1$, $a(z)=\sqrt{\gamma(\gamma-1)}/2$, причем значение $a(z)$ определяется из соотношений на ударной волне [5]. Траектории системы (3.1) занимают область $Q_1 = \{1 < z < (\gamma+1)/2, -1 < v < 1\}$, где значение $z=(\gamma+1)/2$ соответствует положению ударной волны, а $z=1$ – положению поршня. Поле интегральных кривых системы (3.1) (они являются прямыми) приведено на фиг. 2. Прямая $v=(z-1)2M/(\gamma-1)$ (прямая l) состоит из особых точек. Каждая траектория, начинающаяся внутри области Q_1 (т. е. соответствующая двумерным возмущениям), после конечного числа отражений от скачка приходит в одну из точек прямой l [1].

Пусть теперь $\lambda=1+\varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, т. е. поршень движется слабоускоренно ($\varepsilon > 0$) или слабозамедленно ($\varepsilon < 0$). Исходя из системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих автомодельное течение газа [5], нетрудно получить выражения для скорости газа $u(z)$ и скорости звука $a(z)$ в первом приближении по малому параметру ε

$$a(z) = \left(\frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{z-1}{z_c-1} \right)^{\varepsilon/\gamma} - \varepsilon \left(\frac{2(\gamma-1)}{\gamma} \right)^{1/2} z^2 \ln z$$

$$u(z) = 1 + \varepsilon \left(\frac{u_0}{z} - \frac{2}{\gamma} \ln z - \int \frac{(z-1) dz}{za(z)} \right) \quad (3.5)$$

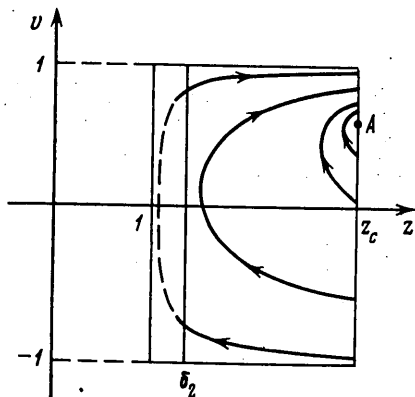
Здесь $z_c=(\gamma+1)/2$ – координата ударной волны, а величина u_0 находится из условия на поршне $u(1)=1$.

Решение (3.4)–(3.5) получается в предположении о том, что $a^2(z) \gg (z-1)^2$. Непосредственной проверкой по формуле (3.4) легко убедиться, что это предположение выполняется на всем интервале изменения z ($1 < z < z_c$). Оценивая вклад первого и второго слагаемого формулы (3.4) в величины $a(z)$ и $a'(z)$, нетрудно убедиться, что вторым слагаемым на рассматриваемом интервале $1 < z < z_c$ можно пренебречь. Поэтому окончательно получим, что

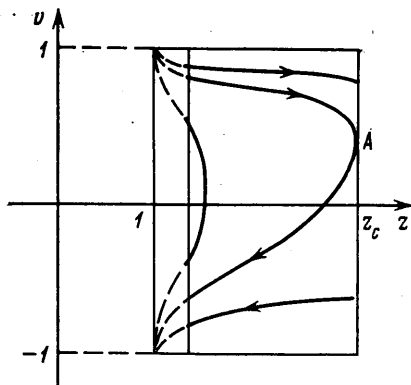
$$a(z) = \left(\frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{z-1}{z_c-1} \right)^{\varepsilon/\gamma}, \quad u(z) = 1 + 2\varepsilon \frac{1-z^2+(2-\gamma)z \ln z}{\gamma(\gamma-1)} \quad (3.6)$$

Траектории системы (3.1) в окрестности т. $z=0$ описываются соотношением $1-(1-v_0^2)(z-1)/(z_0-1)^{2\varepsilon/\gamma}=v^2$, где (z_0, v_0) – начальная точка рассматриваемой траектории.

При $\varepsilon < 0$ (течения замедления) траектории, начинающиеся внутри области Q_1 , не выходят на ее границу $z=1$, особые точки отсутствуют и кар-



Фиг. 3



Фиг. 4

тина интегральных кривых топологически эквивалентна полю интегральных кривых в задаче о сильном взрыве (фиг. 3). Неравенства (3.3)–(3.4) также выполняются, и вывод об устойчивости течения в задаче о сильном взрыве переносится и на задачу о слабозамедленном поршне.

При $\epsilon > 0$ (течения ускорения) $v \rightarrow \pm 1$ при $z \rightarrow 1$. Качественный вид поля интегральных кривых приведен на фиг. 4. Направление движения по траекториям указано на фиг. 4 стрелками. Возмущение, заданное начальной точкой (z_0, v_0) , за конечное время приходит на границу $z = \delta_2$ области применимости геометрической акустики. При $t \rightarrow \infty$, $\delta_2 \rightarrow 1$ и траектории системы (3.1) входят в особую точку $(z=1, v=-1)$, причем $dv/dz (z=1, v=-1) = -\infty$. При этом, согласно (3.2), $E \rightarrow \infty$, что соответствует неустойчивости рассматриваемого течения. Можно показать, что качественный характер поведения интегральных кривых системы (3.1) в окрестности т. $z=1$ сохраняется при всех $\lambda > 1$. Поэтому вывод о неустойчивости течения газа перед слабоускоренным поршнем $\lambda = 1 + \epsilon$ справедлив для всех $\lambda > 1$.

Поведение плоских волн, т. е. одномерных, зависящих только от продольной координаты x возмущений, в общем случае не может быть описано геометрической акустикой, так как длина волны l такого возмущения растет со временем так, что $lL^{-1} = \text{const}$. Поэтому геометрическая акустика пригодна для анализа поведения только тех плоских волн, первоначальная длина которых мала по сравнению с первоначальным линейным размером задачи. В других случаях исследование устойчивости может быть проведено численно подобно тому, как это сделано в [12]. Отметим также, что вывод об устойчивости течения перед замедленно движущимся поршнем согласуется с результатами численных расчетов, проведенных в [13].

В заключение хочу выразить глубокую благодарность Куликовскому А. Г. за постановку задачи, а также Куликовскому А. Г., Бармину А. А. и Слободкиной Ф. А. за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Г. Я., Куликовский А. Г. Об устойчивости одномерных течений газа в расширяющихся областях. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 2, с. 112–119.
2. Eckhoff K. S. On stability for symmetric hyperbolic systems. — J. Different Equations, 1981, v. 40, № 1, p. 94–115.
3. Eckhoff K. S., Storesletten L. On the stability of rotating compressible and inviscid fluids. — J. Fluid Mechanics, 1980, v. 99, № 2, p. 433–448.
4. Eckhoff K. S., Storesletten L. S. A note on the stability of steady inviscid helical gas flow. — J. Fluid Mechanics, 1978, v. 89, № 3, p. 401–411.
5. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 438 с.

6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953. 788 с.
7. Уизем Дж. Лине́йные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
8. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 206 с.
9. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.
10. Дьяков С. П. Об устойчивости ударных волн.— ЖЭТФ, 1954, т. 27, № 3, с. 288—295.
11. Иорданский С. В. Об устойчивости плоской стационарной ударной волны.— ПММ, 1957, т. 21, вып. 4, с. 465—472.
12. Брушлинский К. В. Об устойчивости сходящейся сферической ударной волны. М., 1980. 23 с. (Препринт Ин-та прикл. матем. им. М. В. Келдыша № 81).
13. Marmor E., Kivity Y., Betser A. Stability of non-uniform shock waves.— In: Shock Tubes and Waves Proc. 12th Int. Symp., Jerusalem, 1979, Jerusalem, 1980, p. 341—348.

Москва

Поступила в редакцию
16.VI.1982