

УДК 533.6.011.5

ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ УДЛИНЕННЫХ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ТЕЛ ПРИ УМЕРЕННЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ ПОЛЕТА

Фоллэ М. И.

При больших сверхзвуковых скоростях полета звездообразные тела имеют существенное преимущество в волновом сопротивлении перед осесимметричными [1-3]. Большинство последующих исследований по звездообразным телам — экспериментальные, их обзор приведен в [4], среди теоретических работ следует упомянуть [5-7], однако в этих работах не была получена новая информация о волновом сопротивлении звездообразных тел.

В данной работе рассматривается волновое сопротивление звездообразных тел при умеренных сверхзвуковых скоростях полета.

1. Найденное при больших числах Маха оптимальное звездообразное тело удовлетворяет основным ограничениям линейной теории: максимальная толщина R мала по сравнению с его длиной, принятой за единицу; угол между любой касательной плоскостью к поверхности тела и направлением набегающего потока имеет порядок $O(R)$; производная этого угла в направлении потока также имеет порядок $O(R)$. Тогда для волнового сопротивления остроконечного тела существует формула, сводящая трехмерную задачу к плоской краевой задаче [8]

$$\frac{2X}{\rho_1 U^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \ln \frac{1}{|s-\sigma|} S''(s) S''(\sigma) ds d\sigma - \frac{S'(1)}{2\pi} \int_0^1 \ln \frac{1}{1-\sigma} S''(\sigma) d\sigma - \left(\oint_{C_*} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} d\tau \right)_{s=1} + O(R^6 \ln^2 R) \quad (1.1)$$

$$\varphi_0(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \left[S'(s) \ln \frac{Br}{2} - \int_0^s S''(\sigma) \ln(s-\sigma) d\sigma \right] + \Phi(x, y, s)$$

$$S(s) = S^* f^2(s) R^2, \quad S^* = \frac{n \sin(\pi/n) \sin \gamma}{\sin(\pi/n + \gamma)} \quad (1.2)$$

Здесь X — волновое сопротивление, ρ_1 , U — плотность и скорость набегающего потока, $S(s)$ — площадь поперечного сечения, функция продольной координаты, R и C_* — радиус описанной окружности для звезды и ее контур в торцевом сечении, ν и τ — внешняя нормаль и касательная к контуру C_* ; $\varphi_0(x, y, s)$ — приближение истинного трехмерного потенциала, $\varphi_0(x, y, s)$ и $\Phi(x, y, s)$ — гармонические функции в поперечной плоскости x, y , причем $\Phi(x, y, s)$ стремится к нулю при $r = (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow 0$, $B^2 = (M^2 - 1)^{1/2}$, M — число Маха, $2n$ — число сторон звезды, $\gamma = \angle A_1 B_1 O$ (фиг. 1), функция $f(s)$ описывает продольный контур $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Потенциал (1.2) записан для остроконечного тела, параметр S^* — для n -лучевой звезды, для осесимметричного тела $S^* = \pi$.

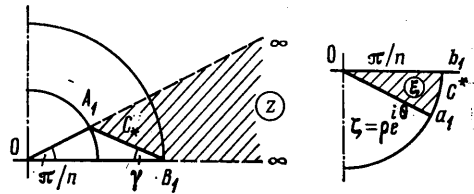
2. Граничное условие на теле для потенциала $\varphi_0(x, y, s)$ записывается в виде [8] $\partial \varphi_0 / \partial \nu = d\varphi_0 / ds$. Проведем ось параллельно прямой, соединяющей центр звезды с внешней вершиной B_1 (фиг. 1), введем в плоскости $s=1$

полярный угол α и обозначим длину радиус-вектора точек контура $\rho(\alpha)$. Тогда для $0 \leq \alpha \leq \pi/n$

$$x = \rho(\alpha) f(s) \cos \alpha, \quad y = \rho(\alpha) f(s) \sin \alpha, \quad \rho(\alpha) = R \sin \gamma \sin^{-1}(\alpha + \gamma) \quad (2.1)$$

Очевидно, что при $0 \geq \alpha \geq -\pi/n$ можно положить $\rho(\alpha) = \rho(-\alpha)$, а вне отрезка $(-\pi/n, \pi/n)$ легко видеть, что $\rho(\alpha) = \rho(\alpha - 2\pi/n)$. Введем функцию $\psi_0(x, y, s)$, связанную с $\varphi_0(x, y, s)$ условиями Коши — Римана в любой поперечной плоскости. Заметим, что если $\varphi_0(x, y, s)$ — приближение истинного потенциала, то $\psi_0(x, y, s)$ не имеет физического смысла функции тока. Функция $\psi_0(x, y, s)$ на поверхности тела записывается в виде [9]

$$\psi_0(s, \alpha) = \int_0^\alpha \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) d\alpha$$



Фиг. 1

Подставляя сюда формулы (2.1), легко получить при $s=1$ $-\pi/n \leq \alpha \leq \pi/n$

$$\psi_0(\alpha) = f'(1) \sin^2 \gamma (\operatorname{ctg}(\alpha + \gamma) - \operatorname{ctg} \gamma) R^2 \quad (2.2)$$

Аналогично [9] можно показать, что $\psi_0(\alpha)$ — нечетная функция с периодом $2\pi/n$ и, следовательно, $\psi_0(\alpha)$ при любых α легко получить через значения α на первом полупериоде. Таким образом, ψ_0 задана на контуре звезды, а для подсчета контурного интеграла в формуле (1.1) необходимо найти ψ_0 и в окрестности контура, т. е. решить краевую задачу.

3. Отобразим внутренность круга $|\zeta| < 1$ на внешность n -лучевой звезды с помощью формулы Кристоффеля — Шварца [10]

$$z = C_1 \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\zeta - a_{2n})^{\alpha_{2n} - 1} \frac{d\zeta}{\zeta^2} + C_2 \quad (3.1)$$

Здесь $z = x + iy$ — комплексная переменная в плоскости звезды; ζ — в плоскости единичного круга, α_k — измеренные в долях π внешние углы многоугольника, a_k , где $|a_k| = 1$, — точки единичной окружности, соответствующие вершинам многоугольника, бесконечно удаленной точке соответствует центр круга. Рассмотрим треугольник A_1, B_1 , «бесконечно удаленная точка» и пусть ему соответствует сектор $0 > \arg \zeta > -\pi/n$, $|\zeta| < 1$, при этом точка b_1 переходит в B_1 , a_1 — в A_1 . По принципу симметрии отображение единичного круга можно продолжить на всю внешность звезды, причем точкам B_k (внешние вершины звезды) соответствуют точки $e^{-2\pi(k-1)/n}$ (корни n степени из единицы), A_k соответствуют $e^{-\pi(2k-1)/n}$ (корни n степени из -1). В звезде n углов B_k по $\beta_k = 2(1 - \gamma/\pi)$, n углов A_k по $\alpha_k = 2(1/n + \gamma/\pi)$, следовательно, интеграл в формуле (3.1) можно упростить

$$\int_1^{\zeta} \prod_{k=1}^n \frac{(\zeta - b_k)^{F_1}}{(\zeta - a_k)^{F_2}} \frac{d\zeta}{\zeta^2} = \int_1^{\zeta} \frac{(\zeta^n - 1)^{F_1}}{(\zeta^n + 1)^{F_2}} \frac{d\zeta}{\zeta^2} \quad (3.2)$$

$$\zeta_0 = 1, \quad F_1 = 1 - 2\gamma/\pi, \quad F_2 = 1 - 2\gamma/\pi - 2/n$$

Преобразование (3.1) переводит точку b_1 с полярными координатами $(1, 0)$ в точку B_1 с полярными координатами $(R, 0)$, следовательно, $C_2 = R$; тогда для точки a_1 с полярными координатами $(1, -\pi/n)$ и переходящей в точку A_1 можно записать

$$|A_1 B_1| = |z(A_1) - R| = C_1 I$$

$$I = \left| \int_0^{\pi/n} \frac{(e^{i\theta} - 1)^{F_1} e^{i\theta} d\theta}{(e^{i\theta} + 1)^{F_2} e^{2i\theta}} \right| = \frac{2^{2/n}}{I_{1n}}$$

$$I_1 = \frac{\Gamma(1+1/n)}{\Gamma(1-\gamma/\pi)\Gamma(\gamma/\pi+1/n)}$$

$$|A_1 B_1| = R \frac{\sin(\pi/n)}{\sin(\pi/n+\gamma)},$$

$$C_1 = RC, \quad C = \frac{\sin(\pi/n)}{\sin(\pi/n+\gamma)I} \quad (3.3)$$

Здесь Γ — гамма-функция.

Итак, конформное отображение (3.1) полностью известно. Рассмотрим для $0 \leq \theta \leq \leq \pi/n$ растяжение элемента контура звезды C_* при переходе к единичной окружности C^* (фиг. 1)

$$\left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = \frac{|dz|}{d\theta} = C_1 2^{2/n} \frac{(\sin n\theta/2)^{F_1}}{(\cos n\theta/2)^{F_2}} = C_1 2^{2/n} G(\theta) \quad (3.4)$$

С другой стороны, на $A_n B_1$

$$l = \frac{R|\sin \alpha|}{\sin(|\alpha|+\gamma)}, \quad dl = \frac{R \sin \gamma |d\alpha|}{\sin^2(|\alpha|+\gamma)} \quad (3.5)$$

где l — расстояние от B_1 до некоторой точки $M \in A_n B_1$.

Из формул (2.2), (3.4), (3.5) при $0 \leq \theta \leq \pi/n$ ($-\pi/n \leq \alpha \leq 0$) следует для функции $\psi^*(\theta) = \psi_0(\alpha)$

$$\frac{d\psi^*}{d\theta} = \frac{d\psi_0}{|d\alpha|} \frac{|d\alpha|}{dl} \frac{dl}{|dz|} \frac{|dz|}{d\theta} = -\frac{I_1}{2} S'(1) G(\theta) \quad (3.6)$$

Легко видеть, что $\partial\psi^*/\partial\theta$ — четная функция с периодом $2\pi/n$, следовательно, достаточно ее задать на первом полупериоде. Комплексный потенциал $w_0(z, s)$ имеет вид [8]

$$w_0(z, s) = a_0(s) \ln z + b_0(s) + W(z, s) \quad (3.7)$$

$$a_0(s) = \frac{S'(s)}{2\pi}, \quad b_0(s) = \frac{1}{2\pi} \left[S'(s) \ln \frac{B}{2} - \int_0^s S'(\sigma) \ln(s-\sigma) d\sigma \right]$$

Здесь $W(z, s)$ раскладывается в ряд по отрицательным степеням z . Записав отображение (3.1) в виде $z = C_1/\zeta + R + O(\zeta^{n-1})$ и переходя в (3.7) к $\zeta = \rho e^{i\theta}$, легко получить для ограниченной части потенциала $W^*(\zeta) = \Phi^*(\zeta) + i\Psi^*(\zeta)$

$$\Phi^*(\zeta) = a_0(1) \ln RC - a_0(1) \ln \rho + b_0(1) + \Phi^*(\zeta)$$

$$\Psi^*(\zeta) = -a_0(1) \theta + \Psi^*(\zeta) \quad (3.8)$$

$$\Psi^*(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi^*(\beta) \frac{(1-\rho^2) d\beta}{1-2\rho \cos(\theta-\beta) + \rho^2}, \quad \rho < 1$$

$$\Psi^*(1, \theta) = \Psi^*(\theta)$$

Здесь $\Psi^*(\rho, \theta)$ в окрестности единичной окружности записывается с помощью интеграла Пуассона.

В результате получим для контурного интеграла в формуле (1.1)

$$-\left(\oint_{C^*} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} d\tau \right)_{s=1} = \frac{[S'(1)]^2}{2\pi} \ln \frac{2}{BRC} - \frac{S'(1)}{2\pi} \int_0^1 \ln \frac{1}{1-\sigma} S''(\sigma) d\sigma -$$

$$-\frac{S'(1)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} d\theta' d\theta +$$

$$+\int_0^{2\pi} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta} \Big|_{\rho=1} \int_0^{\theta} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} d\theta' d\theta$$

Из решения задачи Дирихле (3.8) необходимо знать лишь $\partial\Psi^*/\partial\rho|_{\rho=1}$. Интеграл Пуассона расходится при $\rho=1$ и при численном интегрировании плохо сходится в

окрестности единичной окружности. Если же продифференцировать по ρ подынтегральное выражение, порядок особенности в знаменателе увеличится. Используя формулу Лагранжа, для $\partial\Psi^*/\partial\rho|_{\rho=1}$, можно записать

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{\partial\Psi^*}{\partial\rho} = \int_0^{\theta-\varepsilon} K(\theta, \beta) d\beta + \int_{\theta+\varepsilon}^{2\pi} K(\theta, \beta) d\beta - \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{\Psi^{*\prime}(\theta)}{2\pi} (1+\rho) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{t dt}{1+\rho^2-2\rho \cos t}$$

$$K(\theta, \beta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Psi^*(\theta) - \Psi^*(\beta)}{1 - \cos(\theta - \beta)}$$

Последний интеграл при $\rho \rightarrow 1$ расходится, но так как под интегралом стоит нечетная функция, то в смысле главного значения он равен нулю.

4. Предположим теперь, что функция $f(s)$ задана в виде s^μ , $0,5 < \mu$. Ограничение на параметр μ получается из условия сходимости интегралов, что физически уточняет требование остроконечности. При выполнении этого ограничения получим для сопротивления

$$\frac{2X}{\rho_1 U^2 (R^2 S^*)^2} = \frac{C_D}{R^2 S^*} = \frac{\mu^2}{\pi} \left[\frac{1}{2\mu-1} - 2(2\mu-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2\mu-1)} + \right. \quad (4.1)$$

$$\left. + 2 \ln \frac{2}{BR} - 2 \ln C - \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta} \frac{\partial\Psi}{\partial\rho} \Big|_{\rho=1} d\theta' d\theta - \pi \int_0^{2\pi} \Psi(1, \theta) \frac{\partial\Psi}{\partial\rho} \Big|_{\rho=1} d\theta \right]$$

$$\Psi(\rho, \theta) = 2\Psi^*(\rho, \theta)/S'(1)$$

Здесь C_D — коэффициент волнового сопротивления. Так как коэффициент нормирован на площадь донного сечения, то выражение справа в (4.1) зависит не отдельно от R и B , а от их произведения $RB = R(M^2 - 1)^{1/2}$, которое и является параметром подобия задачи.

Бесконечную сумму в формуле (4.1) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\mu-1}{k(k+2\mu-1)} = - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+2\mu} - \frac{1}{k+1} \right) = \psi(2\mu) + C \quad (4.2)$$

Здесь ψ — пси-функция Эйлера, C — постоянная Эйлера. Нетрудно видеть, что первые три члена в формуле (4.1) дают коэффициент волнового сопротивления некоторого тела вращения [11]

$$\frac{c_D}{R^2 S^*} = \frac{\mu^2}{\pi} \left\{ 2 \ln \frac{2}{BR} + \frac{1}{2\mu-1} - 2[\psi(2\mu) + C] \right\} \quad (4.3)$$

Оставшиеся три слагаемых в (4.1) представляют собой, таким образом, неосесимметричную часть коэффициента волнового сопротивления. Сравнивая формулы (4.1) и (4.3) для звездообразного и осесимметричного тела, легко видеть, что они вычислены при одном и том же числе Маха $B^2 = M^2 - 1$ и для одного и того же показателя μ . Однако в формуле (4.3) R — просто радиус миделевого сечения, в то время как в (4.1) R — радиус описанной окружности звездообразного контура в миделевом сечении, следовательно, у этих тел разная площадь миделевого сечения. Естественно сравнивать волновое сопротивление тел с одинаковой площадью миделевого сечения. Тогда, задавая радиус осесимметричного тела R_0 , для подстановки в формулу (4.1) легко получить

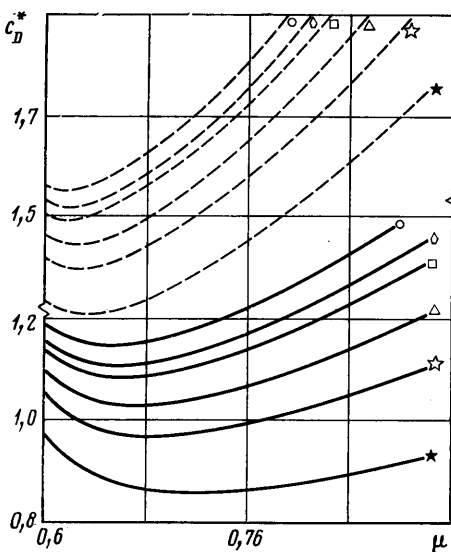
$$R = R_0 g(n, \gamma), \quad g(n, \gamma) = \left[\frac{\pi \sin(\pi/n + \gamma)}{n \sin(\pi/n) \sin \gamma} \right]^{1/2} \quad (4.4)$$

Итак, $c_D/R^2 S^*$ зависит от RB , от μ и от двух параметров n и γ , характеризующих данный звездообразный контур. Легко видеть, что зависи-

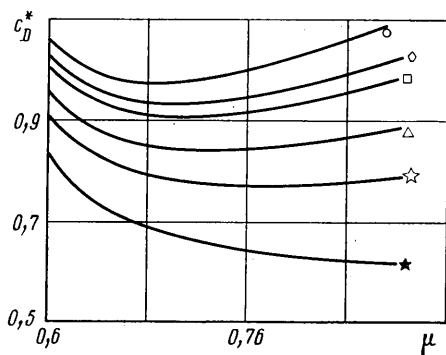
мость от параметра RB в формуле (4.1) монотонная, а зависимость от μ более сложная и, по крайней мере для осесимметричных тел, не монотонная. Поэтому в данной работе будут строиться графики c_D/R^2S^* как функции μ , а R_0B будет параметром как для осесимметричного тела, так и для эквивалентных ему по площади миделевого сечения звездообразных тел. Здесь приведены результаты по следующим звездообразным конфигурациям (в порядке возрастания звездообразности): правильный пятиугольник $g(5, 3\pi/10)=1,149$, квадрат $g(4, \pi/4)=1,253$, правильный треугольник $g(3, \pi/6)=1,555$, правильная самопересекающаяся пятиконечная звезда $g(5, \pi/10)=1,673$, пятиконечная звезда с более тонкими лучами $g(5, \pi/20)=2,198$.

Основной вывод: при любых комбинациях параметров RB , μ , n , γ звездообразное тело выгоднее по волновому сопротивлению, чем эквивалентное (по площади миделевого сечения и относительному удлинению) осесимметричное тело. В частности, можно уменьшить и волновое сопротивление оптимальных по продольному контуру осесимметричных тел. На фиг. 2 приведены графики $c_D/R^2S^*=c_D^*$ при $R_0B=0,02$ (штриховые линии) и $R_0B=0,1$ (сплошные линии), на фиг. 3 — при $R_0B=0,18$; $0,6 < \mu < 0,9$. Заметим, что при $R_0B = \text{const}$ фиг. 2–3 можно пользоваться при различных комбинациях числа Маха и радиуса осесимметричного тела, однако после выбора этих параметров они считаются фиксированными, а различны лишь формы поперечного сечения звездообразных тел, что отражено в соответствующих обозначениях на фиг. 2–4.

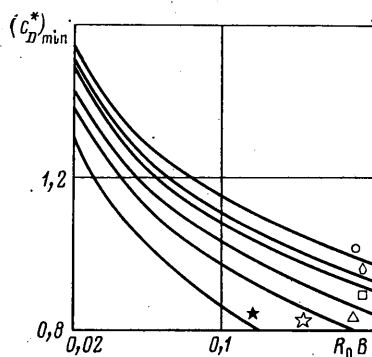
Качественно кривые для звездообразных тел ведут себя так же, как для осесимметричных тел, имеют ми-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

нимум на этом интервале, но расположены ниже соответствующих графиков для осесимметричных тел, причем выигрыш в волновом сопротивлении оказывается пропорционален параметру звездообразности $g(n, \gamma)$; он также несколько увеличивается с ростом параметра R_0B . При фиксированном параметре R_0B минимум на графиках волнового сопротивления для звездообразных тел расположен ниже и правее соответствующего миниму-

ма для осесимметричных тел, причем сдвиг этого минимума вниз и вправо по μ растет вместе с $g(n, \gamma)$, а при разных значениях $R_0 B$ — еще и с ростом этого параметра. Рассматривая минимальные значения c_D^* как функцию параметра μ при различных значениях параметра $R_0 B$, можно построить $(c_D^*)_{\min}$ в зависимости от $R_0 B$ (фиг. 4). Здесь хорошо видно, что выигрыш оптимальных по волновому сопротивлению звездообразных тел растет вместе с $R_0 B$, т. е. увеличивается вместе с числом Маха и вместе с относительной толщиной. Эта закономерность для течений с большой сверхзвуковой скоростью была отмечена в [3].

В [12] рассматривается обтекание конических тел без осевой симметрии, но с поперечными контурами овальной формы. Один из этих контуров — «треугольный», полученный из равнобедренного, но близкого к равностороннему треугольнику, округлением углов дугами окружности. Если для него аналогично ввести параметр звездообразности g — отношение радиуса описанной окружности к радиусу эквивалентного кругового сечения $g=0,23/0,18=1,28$, что приблизительно соответствует звездообразности квадратного сечения, то легко получить

$$c_D/c_{D0}=0,83+O(R) \quad (4.5)$$

где $R=0,23$. Согласно [12], сравнивая также с эквивалентным осесимметричным телом, можно записать $c_D/c_{D0}=0,87$. Хотя оценка точности в [12] не приводится, этот результат соответствует формуле (4.5).

Автор благодарит В. А. Левина и А. Л. Гонора за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chernyi G. G., Gonor A. L. The determination of body shapes of minimum drag using the Newton and Busemann pressure laws.— Paper presented at the Symposium on external problems in aerodynamics. Boeing Scientific Research Laboratories, Seattle. Washington, 1962. 23 p.
2. Гонор А. Л. О пространственных телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 1, с. 185—189.
3. Миеле А., Држе Г., Причард Р. и др. Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969. 507 с.
4. Гонор А. Л., Зубин М. А., Остапенко Н. А. Экспериментальное исследование аэродинамических характеристик звездообразных тел при сверхзвуковых скоростях.— В кн.: Неравновесные течения газа и оптимальные формы тел в сверхзвуковом потоке. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 28—39.
5. Лапыгин В. И. Расчет сверхзвукового обтекания V-образных крыльев методом установления.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 3, с. 180—185.
6. Лапыгин В. И., Остапенко Н. А. Обтекание подветренной стороны конического крыла сверхзвуковым потоком газа.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 1, с. 112—121.
7. Лапыгин В. И. О решении задачи обтекания V-образного крыла с сильной ударной волной на передней кромке.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 3, с. 114—119.
8. Ward G. N. Supersonic flow past slender pointed bodies.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1949, v. 2, № 1, p. 75—97.
9. Фоллз М. И. Линейная теория сверхзвукового обтекания линейчатых тел пространственной конфигурации.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 4, с. 94—101.
10. Лаврентьев М. А., Шваб Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
11. Васильченко В. И. Оптимальные формы тел вращения в линеаризованном сверхзвуковом течении.— Тр. ЦАГИ, 1975, вып. 1666, с. 20—28.
12. Ferri A., Ness N., Kaplita T. T. Supersonic flow over conical bodies without axial symmetry.— J. Aeronaut. Sci., 1953, v. 20, № 8, p. 563—571.

Москва

Поступила в редакцию
10.11.1982