

УДК 533.6.011:51

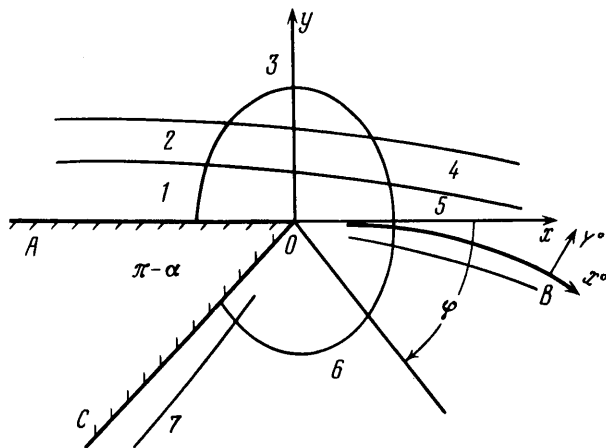
О ТРАНСЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ВЫПУКЛОГО УГЛА СО СВОБОДНОЙ ЛИНИЕЙ ТОКА

ДИЕСПЕРОВ В. Н.

В работе проводится асимптотический анализ системы уравнений Навье — Стокса при числе Рейнольдса $Re \rightarrow \infty$ в окрестности точки излома профиля при ее обтекании трансзвуковым потоком газа. В качестве предельного берется течение со свободной линией тока, сходящейся с угловой точки, в которой достигается скорость звука. В первом приближении оно описывается автомодельным решением уравнения Кармана — Фальковича с показателем автомодельности $n=6/5$ [1]. В таком течении при приближении к угловой точке со стороны набегающего потока благоприятный градиент давления становится бесконечным. В основе асимптотического анализа лежит теория свободного взаимодействия, впервые предложенная в [2–4]. Рациональная теория отрыва пограничного слоя несжимаемой жидкости от гладкой поверхности была разработана в [5], а от угловой точки — в [6, 7]. Уравнения, описывающие свободное взаимодействие в случае стационарного отрыва трансзвукового потока от гладкой поверхности, были выведены в [8], в нестационарном случае — в [9].

Рассматривается обтекание выпуклого угла AOC с прямолинейной образующей AO (см. фигуру) потоком совершенного газа.

Введем обозначения: x, y — декартова система координат, начало которой помещено в вершину угла O , а отрицательная полуось x совпадает



с AO ; v_x, v_y — компоненты вектора скорости; ψ — функция тока; ϕ — потенциал скоростей, p — давление, ρ — плотность, T — температура, a — скорость звука, γ — отношение теплоемкостей, L — характерный размер внешнего потенциального течения, μ — коэффициент вязкости, Re и Pg — числа Рейнольдса и Прандтля соответственно. В качестве характерных значений всех параметров потока берутся их критические значения, которые отмечаются звездочкой. В дальнейшем все параметры течения и уравнения, их связывающие, предполагаются безразмерными.

При $Re = \rho_* a_* L / \mu_* \rightarrow \infty$ в качестве предельного решения берется потенциальное обтекание угла со свободной линией тока OB , сходящейся с угло-

вой точки O (область \mathcal{Z} на фигуре) [1, 10]:

$$\varphi = x + \psi^{5/8} \Phi_0(\xi) + \psi^{1/2} \Phi_1(\xi) + \psi^{1/8} \Phi_2(\xi) + \dots, \quad \xi = \frac{x}{(1+\gamma)^{1/8} \psi^{5/8}} \quad (1)$$

Решение (1) при $x < 0$ и $\psi = 0$ удовлетворяет условию непротекания $v_y = 0$, а при $x > 0$, $\psi = 0$ — условию постоянства модуля вектора скорости. Согласно (1), асимптотическое поведение параметров потока при $x < 0$, $y \rightarrow 0$ будет следующим:

$$\begin{aligned} v_x &= 1 - d_0(-x)^{1/2} + O(-x), & v_y &= -m_0(-x)^{-1/2}y + O[y(-x)^{1/2}] \\ \rho &= 1 + d_0(-x)^{1/2} + O(-x), & p &= 1 + \gamma d_0(-x)^{1/2} + O(-x) \\ m_0 &= 1/3(1+\gamma)d_0^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Из разложений (2) следует, что градиент давления в окрестности вершины угла благоприятный и $\partial p / \partial x \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow -0$).

При $x > 0$ и $\psi \rightarrow 0$ из (1) получаем

$$\begin{aligned} v_x &= 1 + \frac{(1+\gamma)^{-1/8}}{2} \sigma_0 \psi x^{1/2} + 2(1+\gamma)^{-7/8} \sigma_1 x + \dots, & v_y &= (1+\gamma)^{-1/8} \sigma_0 x^{1/2} + \dots \\ \rho &= p = 1, & \sigma_0 &= -(1+\gamma)^{3/8} \left[\frac{2}{3} d_0^3 \right]^{1/2}, & \sigma_1 &= -\frac{1}{4} (1+\gamma)^{1/8} \sigma_0^2 \end{aligned}$$

В результате взаимодействия движущегося газа с поверхностью AO ($x < 0$) формируется пограничный слой. Отрыв пограничного слоя в вершине угла происходит с благоприятным градиентом давления. Уравнения, описывающие течение в пограничном слое, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho V_y}{\partial Y} &= 0, & y &= \text{Re}^{-1/2} Y, & v_y &= \text{Re}^{-1/2} V_y \\ \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial v_x}{\partial Y} \right) &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial Y} \right), & \frac{\partial p}{\partial Y} &= 0 \\ \frac{1}{\gamma} v_x \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{p}{\rho} \left(v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_y \frac{\partial \rho}{\partial Y} \right) &= \\ &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial Y} \right) + (\gamma - 1) \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial Y} \right)^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Предполагается, что коэффициент вязкости зависит линейным образом от температуры $\mu = CT$. Ищутся решения системы (3), удовлетворяющие следующим граничным условиям: компоненты скорости $v_x = V_y = 0$ ($Y = 0$, $x < 0$); температура поверхности угла либо равна постоянной T_w , либо $\partial T / \partial Y = 0$ в случае теплоизолированной стенки. При $Y \rightarrow \infty$, $x < 0$ компонента скорости v_x и плотность ρ должны срачиваться с разложениями (2).

В основной части пограничного слоя предотрывного течения (область 2) решение системы (3) будем искать в виде

$$\begin{aligned} v_x &= U(Y) + (-x)^{1/2} u_0 + (-x)^{5/8} u_{01} + \dots, & V_y &= (-x)^{-7/8} V_0 + (-x)^{-1/2} V_{01} + \dots \\ \rho &= R(Y) + (-x)^{1/2} \rho_0 + (-x)^{5/8} \rho_{01} + \dots, & p &= 1 + \gamma d_0 (-x)^{1/2} + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

$$U(Y) = v_x(0, Y), \quad R(Y) = \rho(0, Y)$$

Профили $U(Y)$, $R(Y)$ формируются градиентом давления (2).

В результате подстановки разложений (4) в уравнения (3) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных

функций, входящих в (4). Ее решение имеет вид

$$V_0 = \left[A_0 + \frac{1}{3} d_0 J(Y) \right] U(Y), \quad u_0 = [3A_0 + d_0 J(Y)] U'(Y) - \frac{d_0}{dR} \quad (5)$$

$$\rho = [3A_0 + d_0 J(Y)] R'(Y) + d_0 R, \quad J(Y) = \int \frac{1 - U^2 R}{U^2 R} dY,$$

$$V_{01} = A_{01} U(Y), \quad u_{01} = \frac{12}{5} A_{01} U'(Y), \quad \rho_{01} = \frac{12}{5} A_{01} R'(Y)$$

Поведение $R(Y)$, $U(Y)$ при $Y \rightarrow \infty$ предполагается таким, что интеграл $J(Y)$ сходится. Диссипативные члены в решение (5) вклада не дают. Таким образом, в основной части пограничного слоя течение вихревое, влиянием диссипативных факторов в нем можно пренебречь и описывается оно разложениями (4). Из условий сращения v_x и ρ в разложениях (4) и (2) следует, что $U(Y) \rightarrow 1$, $R(Y) \rightarrow 1$ ($Y \rightarrow \infty$). Отсюда для v_y имеем

$$v_y = Re^{-1/2} [A_0 (-x)^{-3/2} + A_{01} (-x)^{-7/2} + \dots] \quad (Y \rightarrow \infty) \quad (6)$$

Однако с помощью разложений (4) невозможно удовлетворить граничным условиям на поверхности AO . Поэтому в пристеночной области необходимо ввести тонкий подслой (область 3), в котором вязкость играет определяющую роль. Роль теплопроводности в формировании течения второстепенная, так как при заданных температурных условиях на поверхности угла и малых скоростях движения сжимаемость течения проявляется слабо

$$v_x = (-x)^{1/2} u_0(\eta) + (-x)^{3/2} u_1(\eta) + \dots,$$

$$V_y = (-x)^{-5/2} V_0(\eta) + (-x)^{-3/2} V_1(\eta) + \dots \quad (7)$$

$$\rho = R(0) + (-x)^{1/2} \rho_0(\eta) + (-x)^{3/2} \rho_1(\eta) + \dots, \quad p = 1 + \gamma d_0 (-x)^{1/2} + \dots,$$

$$\eta = \frac{Y}{(-x)^{1/2}}$$

В формировании течения в подслое силы трения, инерции и давления играют одинаковую роль. Температура находится из уравнения состояния

$$T = \frac{1}{R(0)} \left[1 - \frac{\rho_0}{R(0)} (-x)^{1/2} + \left(\frac{\rho_0^2}{R^2(0)} - \frac{\rho_1}{R(0)} + \gamma d_0 \right) (-x)^{3/2} + \dots \right]$$

Введем функцию тока

$$\Psi = R(0) [(-x)^{1/2} F_0(\eta) + (-x)^{3/2} F_1(\eta) + \dots]$$

Тогда компоненты скоростей будут находиться из соотношений

$$u_0 = \frac{dF_0}{d\eta}, \quad V_0 = \frac{7}{12} F_0 - \frac{5}{12} \eta \frac{dF_0}{d\eta}$$

$$u_1 = \frac{dF_1}{d\eta} - \frac{\rho_0 u_0}{R(0)}, \quad V_1 = \frac{3}{4} F_1 - \frac{5}{12} \eta \frac{dF_1}{d\eta} - \frac{\rho_0 V_0}{R(0)}$$

Уравнения для функций F_0 , F_1 , ρ_0 , ρ_1 имеют вид

$$\frac{C}{R^2(0)} \frac{d^3 F_0}{d\eta^3} - \frac{7}{12} F_0 \frac{d^2 F_0}{d\eta^2} + \frac{1}{6} \left(\frac{dF_0}{d\eta} \right)^2 = -\frac{1}{3} \frac{d_0}{R(0)} \quad (8)$$

$$\frac{C}{Pr R^2(0)} \frac{d^2 \rho_0}{d\eta^2} - \frac{7}{12} F_0 \frac{d\rho_0}{d\eta} + \frac{1}{6} \frac{dF_0}{d\eta} \rho_0 = 0$$

$$\frac{C}{R^2(0)} \frac{d^3 F_1}{d\eta^3} - \frac{7}{12} F_0 \frac{d^2 F_1}{d\eta^2} + \frac{1}{2} \frac{dF_0}{d\eta} \frac{dF_1}{d\eta} - \frac{3}{4} \frac{d^2 F_0}{d\eta^2} F_1 + \frac{1}{3} \frac{d_0}{R^2(0)} \rho_0 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C}{R^3(0)} \rho_0 \frac{d^3 F_0}{d\eta^3} = - \frac{C}{\text{Pr} R^3(0)} \frac{dF_0}{d\eta} \frac{d^2 \rho_0}{d\eta^2} + \frac{C}{R^3(0)} \left[\frac{d}{d\eta} \left(\rho_0 \frac{d^2 F_0}{d\eta^2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{d^2}{d\eta^2} \left(\rho_0 \frac{dF_0}{d\eta} \right) \right] \\
& \frac{C}{\text{Pr} R^2(0)} \frac{d^2 \rho_1}{d\eta^2} - \frac{7}{12} F_0 \frac{d\rho_1}{d\eta} + \frac{1}{3} \frac{dF_0}{d\eta} \rho_1 = \frac{1}{3} d_0 R(0) \frac{dF_0}{d\eta} - \frac{1}{6} \rho_0 \frac{dF_2}{d\eta} + \\
& + \frac{3}{4} F_1 \frac{d\rho_0}{d\eta} + \frac{C}{\text{Pr} R^3(0)} \rho_0 \frac{d^2 \rho_0}{d\eta^2} + (\gamma-1) C \left(\frac{d^2 F_0}{d\eta^2} \right)^2 + \frac{3C}{\text{Pr} R^3(0)} \left(\frac{d\rho_0}{d\eta} \right)^2
\end{aligned}$$

Граничные условия для уравнений (8) следующие. При $\eta \rightarrow \infty$ разложения (7) должны срачиваться с разложениями (4). Условие прилипания требует, чтобы $F_0 = F_0' = F_1 = F_1' = 0$ ($\eta = 0$). Если температура поверхности угла AO постоянна, то $\rho_0(0) = 0$, $\rho_1(0) = \gamma d_0 R(0)$. Отметим, что $d\rho_0/d\eta \neq 0$ ($\eta = 0$).

Если же поверхность угла теплоизолирована, то необходимо потребовать $\rho_1'(0) = 0$, $\rho_0(\eta) = 0$. Из последнего условия также следует, что $F_1(\eta) = 0$.

Рассмотрим случай, когда поверхность угла теплоизолирована и число Прандтля $\text{Pr} = 1$.

Требуется, чтобы при $\eta \rightarrow \infty$ решения уравнений (8) обладали алгебраическим характером поведения. Произведем преобразование растяжения $\eta = \alpha \xi$, $F_0 = \beta \Phi$ с коэффициентами

$$\alpha = (2d_0)^{-1/4} R^{-3/4}(0) (6C)^{1/2}, \quad \beta = (2d_0)^{1/4} R^{-5/4}(0) (6C)^{1/2}$$

В новых переменных первое уравнение (8) и краевые условия для него примут вид

$$\frac{d^3 \Phi}{d\xi^3} - \frac{7}{2} \Phi \frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} + \left(\frac{d\Phi}{d\xi} \right)^2 = -1 \quad (9)$$

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = 0, \quad \Phi(\xi) = b_0 \xi^{7/5} - \frac{25}{14b_0} \xi^{9/5} + b_1 \xi^{12/5} + \dots, \quad \xi \rightarrow \infty$$

В [11] было показано, что краевая задача (9) имеет единственное решение. В результате при $\eta \rightarrow \infty$

$$F_0 = B_0 \eta^{7/5} - \frac{25}{7} \frac{d_0}{B_0 R(0)} \eta^{9/5} + B_1 \eta^{12/5} + \dots$$

$$B_0 = [2d_0]^{3/5} [6CR(0)]^{-1/5} b_0, \quad B_1 = [2d_0]^{7/20} R^{-19/20}(0) (6C)^{3/10} b_1$$

Решение уравнения (8) для ρ_1 , обладающее алгебраическим характером поведения при $\eta \rightarrow \infty$, ведет себя как

$$\rho_1 = N \eta^{4/5} + \left[d_0 R(0) - \frac{100}{49} \frac{d_0 N}{B_0^2 R(0)} \right] + \dots, \quad N = \text{const}$$

Нетрудно проверить, что в случае $\text{Pr} = 1$ интеграл

$$\rho_1 = \gamma d_0 R(0) + \frac{\gamma-1}{2} R^2(0) \left(\frac{dF_0}{d\eta} \right)^2$$

удовлетворяет уравнению (8), граничным условиям на теплоизолированной стенке и имеет алгебраическое поведение при $\eta \rightarrow \infty$. Сращивание разложений (7) и (4) дает

$$A_0 + \frac{1}{3} d_0 J(0) = 0, \quad U(Y) = \frac{7}{5} B_0 Y^{7/5} + \dots, \quad R(Y) = R(0) + N Y^{4/5} + \dots$$

$$N = \frac{49}{50}(\gamma - 1)R^2(0)B_0^2$$

Из соотношения (6) видно, что во внешнем потоке (область 3) вследствие вытесняющего влияния пограничного слоя в разложение (1) необходимо ввести члены, пропорциональные $Re^{-1/2}$

$$\varphi = x + y^{5/2}\Phi_0(\xi) + Re^{-1/2}[y^{1/2}f_1(\xi) + y^{3/2}f_2(\xi) + \dots] \quad (10)$$

Функции $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ удовлетворяют однородным дифференциальным уравнениям

$$\left(\frac{36}{25}\xi^2 - \frac{d\Phi_0}{d\xi}\right) \frac{d^2 f_k}{d\xi^2} - \left[\frac{6}{5}\left(2p_k - \frac{11}{5}\right)\xi + \frac{d^2\Phi_0}{d\xi^2}\right] \frac{df_k}{d\xi} + p_k(p_k - 1)f_k = 0$$

$$(k=1, 2), \quad p_1 = \frac{1}{5}, \quad p_2 = \frac{3}{10}$$

При $|\xi| \rightarrow \infty$ асимптотическое поведение f_1, f_2 имеет вид

$$f_k = D_k^S (-\xi)^{5p_k/6} + D_k^A (-\xi)^{5(p_k-1)/6} + \dots = D_k^S f_k^S + D_k^A f_k^A \quad (\xi \rightarrow -\infty)$$

$$f_k = C_k^S \xi^{5p_k/6} + C_k^A \xi^{5(p_k-1)/6} + \dots$$

$$(\xi \rightarrow +\infty); \quad k=1, 2$$

В случае обтекания угла течением Вальо — Лаурина [12] фундаментальные решения f_k^S являются собственными функциями, т. е. они при $\xi \rightarrow +\infty$ дают течение Прандтля — Майера. С другой стороны, f_k^A не дают вклада в течение Прандтля — Майера и их невозможно положить равными нулю из-за вытесняющего влияния пограничного слоя [13]. Для задачи обтекания угла со свободной линией тока f_1^S, f_2^S не являются собственными функциями [10]. Это означает, что на свободной линии тока можно удовлетворить граничному условию постоянства модуля вектора скорости, положив

$$D_k^A - \frac{\alpha_k}{\beta_k} D_k^S = D_k^A - \frac{25}{54}(1-\gamma)^{1/6} d_0^{1/2} p_k \left(p_k - \frac{2}{5}\right) \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{5}{6} - \frac{5}{6} p_k\right) \Gamma\left(\frac{5}{6} p_k\right) \left[\Gamma\left(-\frac{5}{6} p_k + \frac{4}{3}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6} p_k + \frac{1}{2}\right)\right]^{-1} D_k^{(S)} = 0$$

Потенциал (10) в свою очередь индуцирует возмущения в пограничном слое, пропорциональные $Re^{-1/2}$. Соответствующие (10) разложения решения в основной части пограничного слоя (область 2) примут вид

$$v_x = U(Y) + (-x)^{1/2} u_0 + (-x)^{5/12} u_{01} + Re^{-1/2} [(-x)^{-5/6} u_{10} + (-x)^{-3/4} u_{11}(Y)] + \dots \quad (11)$$

$$\rho = R(Y) + (-x)^{1/2} \rho_0 + (-x)^{5/12} \rho_{01} +$$

$$+ Re^{-1/2} [(-x)^{-5/6} \rho_{10} + (-x)^{-3/4} \rho_{11}(Y)] + \dots$$

$$V_y = (-x)^{-7/6} V_0 + (-x)^{-7/12} V_{01} +$$

$$+ Re^{-1/2} [(-x)^{-11/6} V_{10} + (-x)^{-7/4} V_{11}(Y)] + \dots$$

$$p = 1 + \gamma d_0 (-x)^{1/2} + \gamma Re^{-1/2} [d_{10} (-x)^{-5/6} + d_{11} (-x)^{-3/4}] + \dots$$

$$d_{10} = \frac{1}{6(1+\gamma)^{1/18}} D_1^{(S)}, \quad d_{11} = \frac{\gamma}{4(1+\gamma)^{1/12}} D_2^{(S)}$$

$$V_{1i} = \left[A_{1i} + \frac{i-10}{12} d_{1i} J(Y)\right] U(Y), \quad u_{1i} = \left[\frac{12}{i-10} A_{1i} + d_{1i} J(Y)\right] U'(Y) - \frac{d_{1i}}{UR}$$

$$\rho_{1i} = \left[\frac{12}{i-10} A_{1i} + d_{1i} J(Y)\right] R'(Y) + d_{1i} R(Y), \quad i=0, 1$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям на поверхности угла, необходимо ввести в разложения (7) члены, пропорциональные $Re^{-1/2}$

$$\begin{aligned} v_x &= (-x)^{1/2} u_0(\eta) + Re^{-1/2} [(-x)^{-1} u_{10}(\eta) + (-x)^{-11/2} u_{11}(\eta)] + \dots \quad (12) \\ V_y &= (-x)^{-5/2} V_0(\eta) + Re^{-1/2} [(-x)^{-9/2} V_0(\eta) + (-x)^{-3/2} V_{11}(\eta)] + \dots \\ \rho &= R(0) + (-x)^{1/2} \rho_0(\eta) + Re^{-1/2} [(-x)^{-5/2} \rho_{10}(\eta) + (-x)^{-3/2} \rho_{11}(\eta)] + \dots \end{aligned}$$

Сращивание разложений в подслое (область 1) с разложениями в основной части пограничного слоя (область 2) и внешнем потенциальном потоке (область 3) дает новые члены в разложениях $U(Y)$ и $R(Y)$ при $Y \rightarrow 0$ и связи между постоянными

$$U(Y) = \frac{7}{5} B_0 Y^{2/5} - Re^{-1/2} \left[\frac{7}{5} M_{10} Y^{-2/5} + \frac{6}{5} M_{11} Y^{-11/5} \right] + \dots \quad (13)$$

$$R(Y) = R(0) + NY^{4/5} + Re^{-1/2} [N_{10} Y^{-2} + N_{11} Y^{-9/5}] + \dots$$

$$A_0 = -\frac{1}{3} d_0 J(0) = (1+\gamma)^{2/5} D_1^A, \quad D_1^S = \frac{\beta_1}{\alpha_1} D_1^A$$

$$A_{01} = \frac{25 B_1}{84 B_0} = (1+\gamma)^{7/30} D_2^A, \quad D_2^S = \frac{\beta_2}{\alpha_2} D_2^A$$

$$M_{1i}, N_{1i} = \text{const} \quad (i=0, 1)$$

Сорвавшийся пограничный слой образует слой смешения (области 4, 5), который с одной стороны примыкает к застойной зоне (область 6), а с другой — к внешнему потенциальному течению (область 3). В основной части пограничного слоя поток является невязким. Поэтому изменения скорости, плотности и давления вдоль каждой линии тока будут бесконечно малы при $Re \rightarrow \infty$. Это означает, что в основной части слоя смешения (область 4) решение, так же как и в области 2, нужно искать в виде возмущений к значениям $U(Y)$ и $R(Y)$, поведение которых при $Y \rightarrow 0$ дается формулами (13). Исходя из этого, в вязком подслое (область 5) решение в первом приближении будем искать в виде

$$\Psi = x^{07/12} F_0(\eta) + \dots, \quad \rho = R(0) + x^{01/2} \rho_{01}(\eta) + \dots, \quad \eta = Y^0/x^{05/12} \quad (14)$$

Здесь x^0, Y^0 — ортогональная система координат, ось x^0 которой совпадает со свободной линией тока. Функции F_0 и ρ_{01} удовлетворяют уравнениям

$$\frac{C}{R^2(0)} \frac{d^3 F_0}{d\eta^3} + \frac{7}{12} F_0 \frac{d^2 F_0}{d\eta^2} - \frac{1}{6} \left(\frac{dF_0}{d\eta} \right)^2 = 0$$

$$\frac{C}{R^2(0)} \frac{d^2 \rho_{01}}{d\eta^2} + \frac{7}{12} F_0 \frac{d\rho_{01}}{d\eta} - \frac{1}{3} \frac{dF_0}{d\eta} \rho_{01} = C(\gamma-1) \left(\frac{d^2 F_0}{d\eta^2} \right)^2$$

Разложения (14) должны при $\eta \rightarrow \infty$ сращиваться с разложениями (13), а при $\eta \rightarrow -\infty$ — с разложениями, описывающими течение в застойной зоне (область 6). Для функции F_0 это дает

$$F_0 = B_0 \eta^{7/5} + \eta^{-4} + \dots \quad (\eta \rightarrow +\infty)$$

$$F_0(0) = 0, \quad F_0'(\eta) \rightarrow 0 \quad (\eta \rightarrow -\infty)$$

Уравнение для плотности ρ_{01} непосредственно интегрируется

$$\rho_{01} = \frac{\gamma-1}{2} R^2(0) \left(\frac{dF_0}{d\eta} \right)^2$$

Для вертикальной компоненты скорости имеем

$$v_y = -\frac{7}{12} F_0(-\infty) x^{-5/12} \text{Re}^{-1/2} + \dots \quad (\eta \rightarrow -\infty)$$

Так как $v_y \neq 0$, то в застойной зоне (область 6) индуцируется движение с полем скоростей

$$v_x = \cos({}^{7/12}\alpha - {}^{5/12}\varphi) V, \quad v_y = -\sin({}^{7/12}\alpha - {}^{5/12}\varphi) V \quad (15)$$

$$V = \frac{7}{12} F_0(-\infty) \text{Re}^{-1/2} \frac{r^{-5/12}}{\sin {}^{7/12}\alpha} \quad (-\alpha \leq \varphi \leq 0)$$

Плотность и давление находятся из соотношений

$$p = \left[1 - \frac{1}{2} (\gamma - 1) R(0) V^2 \right]^{1/(\gamma-1)}, \quad \rho = R(0) p^{1/\gamma}$$

Решение (15) не удовлетворяет условию прилипания на стороне угла OC . Вдоль нее скорость равна $-V$ и направлена к вершине угла O .

Пограничный слой на поверхности OC (область 7) строится обычным способом. Таким образом, построенные в каждой области решения сращены между собой.

Возмущения во внешний поток индуцируются различным образом в зависимости от значения $J(0)$. Случай $J(0) = 0$ рассмотрен в [14]. Если $J(0) \neq 0$, то члены в разложениях (11), (12) становятся одного порядка, когда $-x = O(\text{Re}^{-3/7})$. Это означает, что на этих расстояниях в окрестности угла образуется область свободного взаимодействия.

В теории идеальных газов имеется несколько автомодельных решений уравнения Кармана — Фальковича, описывающих потенциальное трансзвуковое обтекание выпуклого угла. Они реализуются соответственно при $n = 6/5$ [1], $n = 5/4$ [12] (течение Вальо — Лаурина), $n = 2$ [15].

Под воздействием градиента давления $dp/dx = O[(-x)^{m-1}]$ ($0 < m \leq 1$) в окрестности угловой точки в пограничном слое образуется вязкий под-слой, который в свою очередь за счет толщины вытеснения индуцирует возмущения во внешнем потенциальном потоке. Характер течения в основной части пограничного слоя, через которую передаются эти возмущения, будет зависеть от величины m . Если $m > 2/5$, то течение в первом приближении определяется силами инерции. К этому случаю относится обтекание угла несжимаемой жидкостью ($m = 1/2$) [7]. В настоящей работе $m = 1/3$ и в формировании течения играют роль также силы давления. Случай $m = 2/5$ (течение Вальо — Лаурина) является промежуточным.

Используя разложения (11), можно оценить порядки всех параметров течения в области свободного взаимодействия. В нижней пристеночной области, например, будем иметь

$$v_x = O(\text{Re}^{-1/4}), \quad v_y = O(\text{Re}^{-9/28}), \quad \rho = R(0) + O(\text{Re}^{-1/7})$$

$$p = 1 + O(\text{Re}^{-1/7}), \quad y = O(\text{Re}^{-19/28})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Диесперов В. И. Об одном решении уравнения Кармана, описывающем обтекание выпуклого угла. — Докл. АН СССР, 1980, т. 254, № 6, с. 1367—1371.
2. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 4, с. 53—57.
3. Stewartson K., Williams P. G. Self-induced separation. — Proc. Roy. Soc., A, 1969, v. 312, № 1509, p. 184—206.
4. Messiter A. F. Boundary-layer flow near the trailing edge of a flat plate. — SIAM J. Appl. Math., 1970, v. 18, № 1, p. 241—257.
5. Сычев В. В. О ламинарном отрыве. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 3, с. 47—59.
6. Ackerberg R. C. Boundary-layer separation at a free streamline. Pt 1. Two-dimensional flow. — J. Fluid Mech., 1970, v. 44, № 2, p. 211—225.

7. Рубан А. И. К теории ламинарного отрыва жидкости от точки излома твердой поверхности.— Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, вып. 4, с. 18—28.
8. Messiter A. F., Feo A., Melnik R. E. Shock-wave strength for separation of a laminar boundary layer at transonic speeds.— AIAA Journal, 1971, v. 9, № 6, p. 1197—1198.
9. Рыжов О. С. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при околозвуковых скоростях внешнего потока.— Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 5, с. 1091—1094.
10. Диесперов В. Н. Трансзвуковое течение в окрестности точки излома профиля со свободной линией тока.— Уч. зап. ЦАГИ, 1982, т. 13, № 2, с. 15—25.
11. McLeod J. B. The existence and uniqueness of a similarity solution arising from separation of a free stream line.— Quart. J. Math., Oxford (2), 1972, v. 23, № 89, p. 63—77.
12. Valio-Laurin R. Transonic rotational flow over a convex corner.— J. Fluid Mech., 1960, v. 9, № 1, p. 81—103.
13. Диесперов В. Н. Об обтекании выпуклого угла трансзвуковым потоком газа.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 1, с. 60—68.
14. Диесперов В. Н. О структуре пограничного слоя при трансзвуковом обтекании выпуклого угла со свободной линией тока.— Докл. АН СССР, 1981, т. 257, № 6, с. 1314—1318.
15. Диесперов В. Н. Трансзвуковое течение разрежения в окрестности выпуклого угла.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 4, с. 651—661.

Москва

Поступила в редакцию
7.V.1982