

УДК 532.72

**НЕКОТОРЫЕ КАЧЕСТВЕННЫЕ ОСОБЕННОСТИ (ВНУТРЕННИХ)
ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА
В ОБЛАСТЯХ С ЗАМКНУТЫМИ ЛИНИЯМИ ТОКА**

ПОЛЯНИН А. Д.

Исследуется стационарный конвективный массообмен между каплей и сплошной средой в случае, когда сопротивление переносу полностью сосредоточено внутри капли, где протекает произвольная объемная химическая реакция. Показано, что среднее число Шервуда Sh на поверхности капли равномерно (по числу Пекле Pe) ограничено сверху $Sh \leq k \text{ const}$ (где константа зависит только от геометрии капли и не зависит от параметров Pe и k ; k — безразмерная константа скорости объемной химической реакции) и одним увеличением интенсивности циркуляции жидкости (т. е. увеличением числа Пекле $Pe \rightarrow \infty$) не может быть сформирован диффузионный пограничный слой внутри капли. Указанное свойство среднего числа Шервуда является типичным для всех внутренних задач, что коренным образом отличается от поведения величины Sh для соответствующей внешней задачи о массообмене капли, где при $Pe \rightarrow \infty$ ($k = \text{const}$), как правило, справедлива формула $Sh = 0(\sqrt{Pe})$.

Выведено уравнение, описывающее распределение концентрации внутри капли при больших числа Пекле для произвольной скорости объемной химической реакции. Качественно исследована динамика поведения основных характеристик массообмена капли в зависимости от изменения параметров k и Pe .

Ранее исследовались задачи о конвективном массообмене вне [1] и внутри [2, 3] капли при протекании объемной химической реакции первого порядка. Считалось, что число Пекле велико, а поле скоростей жидкости соответствует решению Адамара — Рыбчинского. В [1] для анализа внешней задачи применялся метод диффузионного пограничного слоя. В [2] для решения внутренней задачи использовались результаты работы [4], где была рассмотрена соответствующая нестационарная задача без объемной реакции. В работе [3] предполагалось, что оба параметра Pe и k достаточно велики и использовался метод сращиваемых асимптотических разложений (по числу Пекле). Было показано, что задача о распределении концентрации в области диффузионного пограничного слоя капли сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

1. Постановка задачи. Некоторые оценки. Рассмотрим стационарный конвективный массообмен между каплей и сплошной средой в случае, когда основное сопротивление переносу сосредоточено внутри капли, где протекает объемная химическая реакция с конечной скоростью $k_v f_*(C)$ (k_v — константа скорости объемной химической реакции, C — концентрация). Функция f_* определяется конкретным механизмом протекания гомогенной реакции, в частности для реакции порядка n имеем $f_*(C) = C^n$.

В безразмерных переменных в сферической системе координат r, θ, χ , связанной с каплей (угол θ отсчитывается от направления внешнего потока на бесконечности), процесс переноса реагента внутри капли описывается следующим уравнением и граничным условием:

$$kf(c) + Pe(v\nabla)c = \Delta c \quad (1.1)$$

$$r = r_s(\theta, \chi), c = 1 \quad (1.2)$$

$$c = \frac{C}{C_s}, \quad Pe = \frac{aU}{D}, \quad k = \frac{k_v a^2 f_*(C_s)}{C_s D}, \quad f(c) = \frac{f_*(C)}{f_*(C_s)}$$

Здесь C_s — концентрация на поверхности капли (предполагается, что $C_s \neq 0$), a — характерный размер капли (радиус), U — характерная скорость потока внутри капли, D — коэффициент диффузии, $r=r_s(\theta, \chi)$ — уравнение поверхности капли, v — распределение скоростей жидкости (определяется из решения соответствующей гидродинамической задачи).

В частном случае, когда распределение скоростей жидкости внутри капли соответствует решению Адамара — Рыбчинского, имеем

$$v = (v_r, v_\theta, 0), \quad v_r = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\sin \theta \partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1.3)$$

$$\psi = \frac{1}{4} r^2 (1-r^2) \sin^2 \theta, \quad U = (\beta+1)^{-1} U_\infty, \quad r_s = 1, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \chi} = 0 \right)$$

Здесь U_∞ — невозмущенная скорость на бесконечности внешнего потока, β — отношение вязкостей капли и окружающей жидкости, ψ — функция тока; здесь и далее аргументы θ и χ у функции $r_s=r_s(\theta, \chi)$ опускаются.

Далее будем считать, что функция f , входящая в уравнение (1.1), обладает свойствами

$$f(0) = 0, \quad df/dc \geq 0, \quad k \geq 0 \quad (1.4)$$

Цель данной работы — исследование поведения основной характеристики задачи (1.1), (1.2) — среднего числа Шервуда (S — поверхность капли, $\partial/\partial n$ — производная по нормали к поверхности S)

$$Sh = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial c}{\partial n} dS \quad (1.5)$$

В плоских задачах вместо величины 4π в знаменателе (1.5) следует брать 2π .

Получим теперь одну формулу для среднего числа Шервуда, которая понадобится далее. Для этого проинтегрируем уравнение (1.1) по объему капли $V = \{r \leq r_s\}$ с последующим переходом по формуле Остроградского — Гаусса к поверхностному интегралу (по S) с учетом того, что в силу несжимаемости жидкости ($\text{div } v = 0$) конвективный член может быть записан в дивергентном виде $(vV)c = \text{div}(vc)$. Кроме того, используем условие непротекания жидкости через поверхность капли $(v \cdot n)_s = 0$. В результате окончательно получаем

$$Sh = \frac{k}{4\pi} \int_V f(c) dV \quad (1.6)$$

Из этой формулы с учетом принципа максимума решения задачи (1.1), (1.2) на границе $c \leq \max_S c = 1$, который имеет место при выполнении условий (1.4) [5], получаем следующую грубую оценку ($V^{(s)}$ — объем капли):

$$Sh \leq (4\pi)^{-1} k f(1) V^{(s)} \quad (1.7)$$

Следует отметить, что оценка (1.7) является равномерной по числу Пекле.

Далее будет показано, что при больших значениях константы скорости химической реакции k оценка (1.7) является сильно завышенной ($k \rightarrow \infty$, $Sh = O(\sqrt{k})$).

2. Асимптотический анализ. Вывод уравнения для распределения концентрации в ядре потока. При $k \rightarrow 0$ ($Pe = \text{const}$) распределение концентрации внутри капли становится равным концентрации на ее поверхности, т. е. $\lim_{k \rightarrow 0} c = 1$. Соответствующая асимптотика для среднего числа Шерву-

$k \rightarrow 0$

да получается подстановкой значения $c=1$ в формулу (1.6). В частности, для сферической капли ($V^{(s)}=4\pi/3$) имеем

$$k \rightarrow 0, \text{Sh} = 1/3 k f(1) + o(k)$$

Рассмотрим теперь другой предельный случай больших значений константы скорости объемной химической реакции $k \rightarrow \infty$ ($\text{Pe} = \text{const}$). Поделим обе части уравнения (1.1) на k и перейдем к пределу при $k \rightarrow \infty$. В результате получаем уравнение $f(c)=0$, из которого следует решение в ядре потока $c=0$ и которое не удовлетворяет граничному условию (1.2). Это означает, что вблизи поверхности капли возникает тонкий слой с большими градиентами концентрации. Введение «растянутой» координаты $X = \sqrt{k}x$ (x — расстояние от поверхности капли) в уравнение (1.1) с последующим выделением старших членов разложения по параметру k (конвективным членом при этом можно пренебречь) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению (которое рассматривалось в [6]), решение которого, записанное в неявной форме, и соответствующее ему среднее число Шервуда (1.5) для капли сферической формы имеют вид

$$x(c) = \int_c^1 \left[2k \int_0^c f(c'') dc'' \right]^{-1/2} dc', \quad \text{Sh} = \left(2k \int_0^1 f(c) dc \right)^{1/2} \quad (2.1)$$

Введем параметр $x_0 = x(0)$, имеющий физический смысл глубины проникновения [6] и соответствующий минимальному расстоянию от поверхности капли, на котором растворенное в жидкости вещество полностью прореагировало. При $x_0 = \infty$ химическая реакция идет во всем объеме капли, а при $x_0 < \infty$ концентрация обращается в нуль на конечном расстоянии от поверхности капли и $c=0$ при $x \geq x_0$, т. е. в этом случае реакция идет только в некоторой достаточно узкой области (толщиной порядка $k^{-1/2}$) вблизи поверхности капли, вне которой реагент уже полностью отсутствует. В частности, для реакции порядка n ($f(c) = c^n$) первый случай ($x_0 = \infty$) реализуется при $n \geq 1$, а второй ($x_0 < \infty$) — при $0 < n < 1$.

При $\text{Pe} = 0$ точные решения задачи (1.1), (1.2) для сферической частицы можно получить лишь в исключительных случаях при $f(c) = c^n$, где $n=1$ и $n=5$ [7]. В частности, в линейном случае ($n=1$) имеем [2]

$$c = \frac{1 \operatorname{sh}(\sqrt{k}r)}{r \operatorname{sh}(\sqrt{k})}, \quad \text{Sh} = -1 + \sqrt{k} \operatorname{cth} \sqrt{k} \quad (2.2)$$

Исследуем теперь наиболее важный случай больших чисел Пекле $\text{Pe} \rightarrow \infty$, $k = O(1)$. Для анализа помимо сферической системы координат r, θ, χ введем еще ортогональную систему координат ψ, ϕ, λ , связанную с линиями тока (фиксированные кривые $\psi = \text{const}$ ортогональны линиям тока $\phi = \text{const}$). В такой системе координат уравнение (1.1) принимает вид

$$kf(c) + \frac{\text{Pe}}{\sqrt{g}} \frac{\partial c}{\partial \phi} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\psi\psi}} \frac{\partial c}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\phi\phi}} \frac{\partial c}{\partial \phi} \right) \right\} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{v} = (0, v_\phi, 0), \quad v_\phi = (g_{\phi\phi}/g)^{1/2}, \quad g = g_{\psi\psi} g_{\phi\phi} g_{\lambda\lambda}$$

Уравнение (1.1) в форме (2.3) справедливо для любого двумерного течения (т. е. для любой функции тока ψ при соответствующем выборе ϕ : $(\nabla\psi \cdot \nabla\phi) = 0$), в том числе и для плоского случая, где $g_{\lambda\lambda} = 1$. Для поля течения Адамара — Рыбчинского (1.3) метрические коэффициенты $g_{\psi\psi}, g_{\phi\phi}, g_{\lambda\lambda}$ с точностью до нормировки выписаны в работе [3] (в отличие от (2.3) там вместо ψ использовалась нормированная функция тока $\xi = 16\psi$, а остальные координаты введены так же: $\phi = r^4 \cos^4 \theta (2r^2 - 1)^{-1}$).

Формальный асимптотический анализ уравнения (1.1) (или (2.3)), который проводится аналогично тому, как это делалось в работе [8], показывает, что во всей области течения внутри капли можно выделить ядро

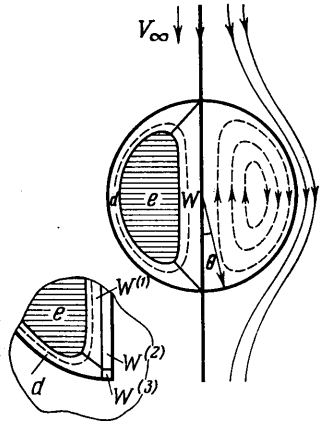
потока e , область диффузионного погранслоя d и область диффузионного следа W (фиг. 1).

Решение в ядре потока ищем в виде регулярного асимптотического разложения по обратным степеням числа Пекле

$$c = c_0^{(e)} + \text{Pe}^{-1} c_1^{(e)} + \dots, \quad c_1^{(e)} / c_0^{(e)} = O(1) \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в уравнение (2.3) и выделяя члены при одинаковых степенях числа Пекле, для главных членов разложения в ядре потока получаем

$$\frac{\partial c_0^{(e)}}{\partial \varphi} = 0 \quad (2.5)$$



Фиг. 1

$$\frac{\partial c_1^{(e)}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\psi\psi}} \frac{\partial c_0^{(e)}}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\varphi\varphi}} \frac{\partial c_0^{(e)}}{\partial \varphi} \right) - k \sqrt{g} f(c_0^{(e)}) \quad (2.6)$$

В диффузионном пограничном слое $d = \{1-r \leq O(\text{Pe}^{-1/2}), O(\text{Pe}^{-1/2}) \leq \theta, O(\text{Pe}^{-1/2}) \leq \leq \pi - \theta\}$ (здесь и далее неравенства в фигурных скобках указывают порядок характерных размеров рассматриваемой области; кроме того, для простоты области d и W и соответствующие им уравнения приводятся для поля течения (1.3)) вводится «растянутая» переменная и решение ищется в виде разложений

$$c = c_0^{(d)} + \text{Pe}^{-1/2} c_1^{(d)} + \dots, \quad c_i^{(d)} = c_i^{(d)}(Y, \mu), \quad c_1^{(d)} / c_0^{(d)} = O(1) \quad (2.7)$$

$$Y = \text{Pe}^{1/2}(1-r) \quad \mu = \cos \theta; \quad i = 0, 1$$

Подстановка (2.7) в (1.1) с последующим разложением в ряд по малому параметру $\text{Pe}^{-1/2}$ (при этом, как всегда, считается, что $Y = O(1)$, $\partial/\partial Y = O(1)$, $\partial^2/\partial Y^2 = O(1)$) приводит к следующим уравнениям и граничным условиям:

$$\frac{\partial^2 c_0^{(d)}}{\partial Y^2} - \mu Y \frac{\partial c_0^{(d)}}{\partial Y} - \frac{1}{2}(1-\mu^2) \frac{\partial c_0^{(d)}}{\partial \mu} = 0; \quad Y=0, \quad c_0^{(d)} = 1 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 c_1^{(d)}}{\partial Y^2} - \mu Y \frac{\partial c_1^{(d)}}{\partial Y} - \frac{1}{2}(1-\mu^2) \frac{\partial c_1^{(d)}}{\partial \mu} = -\frac{1}{2} \mu Y^2 \frac{\partial c_0^{(d)}}{\partial Y} - \frac{3}{2}(1-\mu^2) Y \frac{\partial c_0^{(d)}}{\partial \mu} + 2 \frac{\partial c_0^{(d)}}{\partial Y} \quad (2.9)$$

Основную роль в механизме массо- и теплопереноса в диффузионном следе играет конвективно-погранслоевая область $W^{(1)} = \{O(\text{Pe}^{-1/2}) \leq 1-r, O(\text{Pe}^{-1}) \leq \psi \leq O(\text{Pe}^{-1/2})\}$. В области $W^{(1)}$ вводится новая «растянутая» переменная η и решение ищется в виде разложения

$$c = c_0^{(1)} + \text{Pe}^{-1/2} c_1^{(1)} + \dots, \quad c_i^{(1)} = c_i^{(1)}(z, \eta), \quad c_0^{(1)} / c_1^{(1)} = O(1) \quad (2.10)$$

$$\eta = \text{Pe}^{1/4} \rho, \quad z = r \cos \theta, \quad \rho = r \sin \theta$$

В результате подстановки (2.10) в (1.1) получаем

$$(1-z^2) \frac{\partial c_0^{(1)}}{\partial z} + \eta z \frac{\partial c_0^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \quad (2.11)$$

$$(1-z^2) \frac{\partial c_1^{(1)}}{\partial z} + \eta z \frac{\partial c_1^{(1)}}{\partial \eta} = 2\eta^2 \frac{\partial c_0^{(1)}}{\partial z} - 2 \frac{\partial^2 c_0^{(1)}}{\partial \eta^2} \quad (2.12)$$

Уравнения и граничные условия (2.5), (2.6), (2.8), (2.9), (2.11) следует дополнить условиями асимптотического сращивания решений на общих границах, которые, в частности для главных членов разложений, имеют вид

$$c_0^{(e)}(r \rightarrow 1) = c_0^{(d)}(Y \rightarrow +\infty), \quad c_0^{(e)}(\rho \rightarrow 0) = c_0^{(d)}(\eta \rightarrow \infty) \quad (2.13)$$

$$c_0^{(d)}(\mu \rightarrow \pm 1) = c_0^{(1)}(z \rightarrow \pm 1)$$

Из уравнения (2.5) следует, что нулевой член разложения в ядре потока зависит только от функции тока

$$c_0^{(e)} = c_0^{(e)}(\psi) \quad (2.14)$$

Из уравнений (2.8), (2.11), граничного условия на поверхности капли (1.2) с учетом (2.14) и последнего условия сращивания (2.13) следует, что главные члены разложений в области диффузионного погранслоя d и конвективно-погранслоевой области следа $W^{(1)}$ имеют вид

$$c_0^{(d)} = 1, \quad c_0^{(1)} = 1 \quad (2.15)$$

Условия сращивания решений в областях d , $W^{(1)}$ и e в силу (2.15) в явном виде задают граничное условие для уравнения в ядре потока внутри капли

$$\psi = 0, \quad c_0^{(e)} = 1 \quad (2.16)$$

Уравнения (2.5), общее решение которого имеет вид (2.14), и граничного условия (2.16) оказывается недостаточно для определения поля концентрации в ядре потока. Используемая далее процедура часто встречается при применении метода растянутых координат и метода многих масштабов с последовательным исключением вековых (растущих) членов [9, 10].

Далее учтем, что область изменения координаты ψ внутри капли определяется неравенствами $-\infty < \psi < +\infty$ ($\psi = r^2 \cos^2 \theta (2r^2 - 1)^{-1}$, $r \leq 1$). Кроме того, ввиду непрерывности решения задачи (1.1), (1.2) вдоль фиксированной линии тока $\psi = \text{const}$ должно выполняться равенство

$$c(\psi, \psi = -\infty) = c(\psi, \psi = +\infty) \quad (2.17)$$

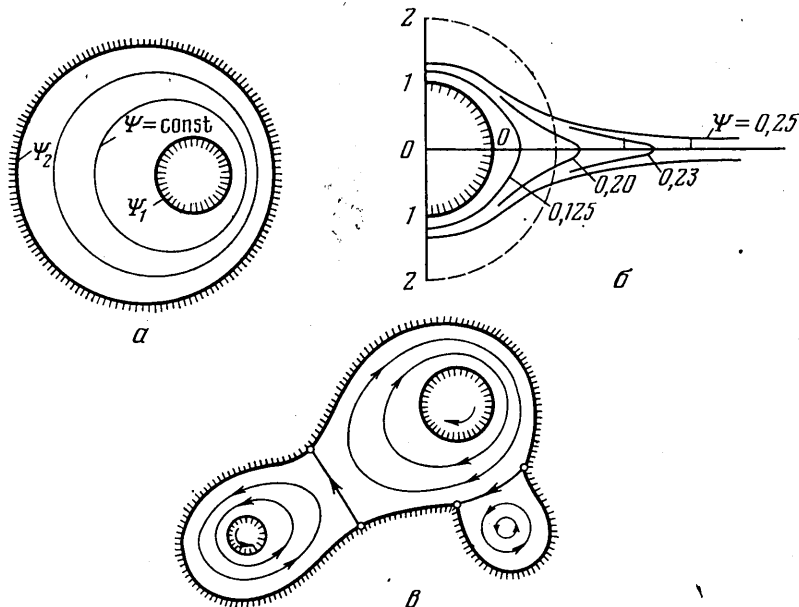
которое означает, что разные точки $(\psi, -\infty)$ и $(\psi, +\infty)$ в новой системе координат ψ , φ соответствуют одной и той же точке $(1/\sqrt{2}, \theta)$ в старой сферической системе координат r, θ .

Для получения необходимой дополнительной информации о нулевом члене разложения в ядре потока $c_0^{(e)}$ (помимо (2.14)) аналогично [9, 10] воспользуемся уравнением для следующего члена разложения (2.8). Интегрирование этого уравнения по φ ($-\infty < \varphi < +\infty$) с учетом равенства (2.17) (следствием которого являются аналогичные соотношения для всех членов разложения в ядре потока) приводит к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{d\psi} \left[\Gamma(\psi) \frac{dc_0^{(e)}}{d\psi} \right] - kJ(\psi) f(c_0^{(e)}) = 0 \quad (2.18)$$

$$\Gamma(\psi) = \oint \frac{\sqrt{g}}{g_{\psi\psi}} d\varphi, \quad J(\psi) = \oint \sqrt{g} d\varphi \quad \left(\oint d\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \right)$$

В случае течения внутри капли (1.3) явный вид коэффициентов $\Gamma(\psi)$ и $J(\psi)$ приведен в работе [4]. В этом случае коэффициенты имеют следующие особенности: $\psi \rightarrow 0$, $J(\psi) = O(\ln \psi)$; $\psi \rightarrow 1/16$, $\Gamma(\psi) = O(1/16 - \psi)$, и локальный анализ уравнения (2.18) показывает, что первая производная $c_0^{(e)}$ в нуле конечна, а вторая бесконечна и имеет логарифмическую особенность; вторая особенность в точке вырождения $\psi = 1/16$ определяет два линейно независимых решения, одно из которых неограничено при



Фиг. 2

$\psi \rightarrow 1/16$. Последнее означает, что помимо граничного условия (2.16) для уравнения (2.18) следует выставить еще условие ограниченности решения при $\psi = 1/16$.

Разложение решения задачи (2.18), (2.15) при $\psi \rightarrow 0$ имеет вид $c_0^{(e)} = 1 + A\psi + o(\psi)$ ($A = \text{const}$) и определяет граничные условия для вторых членов разложений в области диффузионного погранслоя и конвективно-погранслоевой области следа

$$Y \rightarrow \infty, \quad c_1^{(d)} \rightarrow \frac{A}{2} Y(1 - \mu^2); \quad \eta \rightarrow \infty, \quad c_1^{(1)} \rightarrow \frac{A}{2} \eta(1 - z^2) \quad (2.19)$$

С учетом (2.15) прямой проверкой нетрудно убедиться, что решения уравнений (2.9), (2.12), удовлетворяющие условиям (2.19) и срачивающиеся с решением (2.18), (1.15), в точности совпадают со своей асимптотикой на бесконечности (2.19).

Замечание. При асимптотическом анализе задачи (1.1), (1.2) рассматривалась лишь конвективно-погранслоевая область диффузионного следа $W^{(1)}$. Аналогичным образом можно было исследовать распределение концентрации в областях задней и передней критической точек $W^{(3)}$ и b , а также внутренней области следа $W^{(2)}$. Уравнения для главных членов асимптотических разложений поля концентрации в этих областях в соответствующих переменных совпадают с полученными в работе [8] и могут быть представлены в виде суммы первых и вторых производных с множителями, зависящими от координат. Поэтому все эти уравнения допускают частное

решение, равное единице, которое удовлетворяет условиям сращивания со всеми главными членами разложений в областях e , d и $W^{(1)}$. Это означает, что решение задачи (2.18), (2.15) равномерно пригодено (по большому числу Пекле) во всей области течения внутри капли (в том числе и во всех областях следа) и при $Pe \rightarrow \infty$ ($k=O(1)$) диффузионный пограничный слой во внутренней задаче конвективного массо- и теплообмена отсутствует.

В силу этого замечания в уравнении (2.18) вместо $c_0^{(e)}$ можно писать просто c .

Интересно отметить также, что при больших числах Пекле граничное условие на поверхности капли (1.2) как бы «сносится» на ось потока (т. е. на оси потока $c=1$).

В линейном случае ($f(c)=c$) для поля течения Адамара — Рыбчинского (1.3) уравнение (2.18) рассматривалось ранее в работе [2]. Следует отметить, однако, что в [2] отсутствовал вывод уравнения (2.18), а использовалась интегральная связь с нестационарным аналогом линейной задачи (1.1) — (1.3), который исследовался в работе [4], где получение соответствующего (2.18) нестационарного уравнения не было достаточно обосновано (в частности, до сих пор неясна область применимости результатов [4] (см., например, [11])).

Для среднего числа Шервуда, соответствующего линейной задаче (1.1) — (1.3) (при $Pe=\infty$), имеем [2]

$$\text{Sh} = \frac{1}{3} k \left(1 - \frac{3}{2} k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{k + \lambda_n} \right) \quad (2.20)$$

$$\alpha_1=0,4554; \alpha_2=0,0654; \alpha_3=0,0542; \alpha_4=0,0412$$

$$\lambda_1=26,844; \lambda_2=137,91; \lambda_3=315,66; \lambda_4=724,98$$

Здесь коэффициенты α_n и λ_n приведены по данным [11]; при $n=1$; 2 близкие к выписанным значения этих коэффициентов были вычислены в работе [4].

Область применимости уравнения (2.18) не ограничивается чисто внутренними задачами, в которых поле течения качественно похоже на течение Адамара — Рыбчинского (фиг. 1). Уравнение (2.18) может использоваться также для асимптотического анализа двумерных (плоских или осесимметричных) задач конвективного массо- и теплопереноса при больших числах Пекле: *a*) в двусвязных областях с полностью замкнутыми линиями тока (фиг. 2, *a*); *б*) во всех внешних задачах, когда к поверхности тела примыкает область с полностью замкнутыми линиями тока (фиг. 2, *б*), а также *в*) в более сложных многосвязных системах при наличии нескольких вихревых образований, включая застойные зоны (фиг. 2, *в*). Последний случай может реализоваться, например, при вращении нескольких круговых цилиндров с постоянными угловыми скоростями в области сложной конфигурации, заполненной жидкостью.

В случае *a*) должны выставляться граничные условия на предельных линиях тока $\psi=\psi_1$ и $\psi=\psi_2$ (т. е. на границах области, фиг. 2, *a*); при этом ввиду отсутствия особых гидродинамических точек на границах ψ_1 и ψ_2 область изменения координаты φ будет конечна $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ (точнее решение s периодически по φ с периодом φ_0), что приводит к соответствующему изменению пределов интегрирования при вычислении функций Γ и J (1.18); метрические коэффициенты определяются обычным образом по заданной функции тока $\psi=\psi(r, \theta)$ и найденной из уравнения $(\nabla\psi \cdot \nabla\varphi)=0$ ортогональной координате $\varphi=\varphi(r, \theta)$.

В случае *б*) выставляются граничные условия на поверхности тела и на бесконечности; при этом при решении уравнения (2.20) граничное условие на бесконечности сносится на предельную линию тока (на фиг. 2, *б* выделена жирной линией), которая отделяет область с замкнутыми линиями тока от области с разомкнутыми линиями тока, т. е. в области с разомкнутыми линиями тока концентрация постоянна и равна своему невозмущенному значению на бесконечности. Случай *б*) реализуется, например, при свободном (взвешенном) движении сферы или незакрепленного кругового цилиндра в линейном сдвиговом потоке, когда поле ско-

ростей жидкости на бесконечности в декартовой системе координат x, y, z может быть представлено в виде $v=G\{y, 0, 0\}$, где G — коэффициент сдвига. На фиг. 2, б показаны линии тока $\psi=\text{const}$, где

$$\psi = \frac{1}{4}(r^2-1) - \frac{1}{4}(r^2-2+r^{-2})\cos 2\theta; \quad (2.21)$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

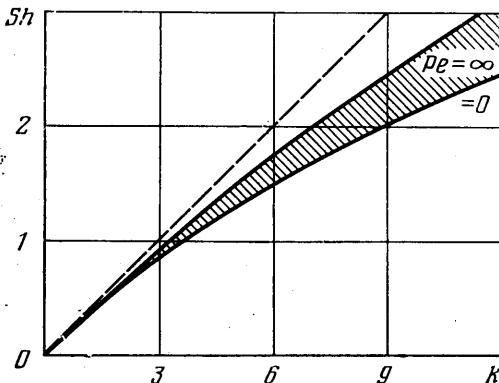
которые соответствуют такому сдвиговому обтеканию кругового цилиндра (который вращается с постоянной угловой скоростью) [12]; за характерный масштаб скорости при записи (2.21) была принята величина $U=aG$. Предельная линия тока, разграничивающая области с замкнутыми и разомкнутыми линиями тока, определяется равенством $\psi=1/4$.

В случае многосвязной области с застойной зоной (фиг. 2, в) при $Re \rightarrow \infty$ уравнение (2.18) следует записывать и решать независимо в трех подобластях, ограниченных поверхностями цилиндров, внешней границей области и особыми линиями тока, которые замыкаются на внешней границе. При этом на поверхностях цилиндров и внешней области граничные условия задаются произвольно, а на особые линии тока «сносится» то же самое значение концентрации, которое выставилось на внешней границе области.

3. Обсуждение результатов. Некоторые замечания. Из результатов п. 1 и 2 следует, что при $Re \rightarrow \infty, k=O(1)$ концентрация постоянна на линиях тока и, что наиболее важно, среднее число Шервуда на поверхность капли для любой функции $f=f(c)$, удовлетворяющей условиям (1.4), равномерно (по числу Пекле) ограничено сверху $Sh \leq k \text{const}$ (1.7). Последнее означает, что одним увеличением интенсивности циркуляции (т. е. увеличением скорости жидкости, что соответствует $Re \rightarrow \infty$) при $k=O(1)$ не может быть сформирован диффузионный пограничный слой внутри капли. Указанное свойство среднего числа Шервуда является типичным для всех внутренних задач, что коренным образом отличается от поведения величины Sh для соответствующей внешней задачи о массообмене капли, где при $Re \rightarrow \infty, k=O(1)$, как правило, вблизи поверхности капли возникает тонкий пограничный слой и справедлива формула $Sh=O(\sqrt{Re})$ [1].

На фиг. 3 приведена зависимость среднего числа Шервуда Sh от безразмерной константы скорости объемной химической реакции k для линейной ($f(c)=c$) задачи о массопереносе внутри капли для поля течения

Адамара — Рыбчинского (1.3) в случае предельных значений числа Пекле $Re=0$ (формула (2.2)) и $Re=\infty$ (формула (2.20)). Штриховая линия соответствует грубой оценке сверху для среднего числа Шервуда, которая определяется равенством в (1.7) при $f(1)=1, V^{(s)}=4\pi/3$. При промежуточных числах Пекле $0 < Re < \infty$ среднее число Шервуда попадает в заштрихованную область, ограниченную предельными кривыми при $Re=0$ и $Re \rightarrow \infty$. Видно, что изменение параметра Re (при $k=O(1)$) слабо влияет на средний приток реагента к поверхности капли, т. е. никаким увеличением



Фиг. 3

числа Пекле нельзя добиться существенного увеличения числа Шервуда. В частности, при $k=10$ максимальное относительное приращение среднего числа Шервуда за счет увеличения числа Пекле от нуля до бесконечности составляет всего около 25% (фиг. 3). Последнее означает, что главным механизмом, влияющим на поведение основных характеристик интенсивности массопереноса внутри капли (Sh) является химическая реакция, в то время как интенсивность циркуляции (скорость течения) и геометрия потока слабо влияют на поведение этих характеристик.

При больших значениях константы скорости объемной химической реакции k вблизи поверхности капли возникает тонкий пограничный слой, толщина которого при малых и умеренных числах Пекле $Pe=O(1)$ имеет порядок $k^{-1/2}$ (2.1) и внутри которого растворенное в жидкости вещество успевает полностью прореагировать. При дальнейшем увеличении числа Пекле за счет интенсивной циркуляции внутри капли вещество уже не успевает полностью прореагировать в пограничном слое и начинает, выходя из погранслоя, проникать в глубь капли, переносясь вдоль линий тока, расположенных вблизи от потока. При достаточно развитой циркуляции внутри капли возникает полностью сформировавшийся диффузионный след с существенно неоднородным распределением концентрации, который «пронизывает» всю каплю и через области передней и задней критических точек соединяет оба конца пограничного слоя. Последнее физически означает, что, несмотря на сильную химическую реакцию, растворенное в жидкости вещество при достаточно больших скоростях течения не успевает полностью прореагировать при его переносе вдоль линий тока вблизи оси потока. В линейном случае анализ описанной ситуации ($Pe \gg 1$, $k \gg 1$) был проведен в работе [3]. Следует отметить, что и в этом случае ввиду равномерной по числу Пекле оценке сверху (1.7) основным механизмом массопереноса внутри капли является химическая реакция.

Следует подчеркнуть, что проведенный анализ, а также уравнение (2.18) остаются справедливыми и в более сложных ситуациях, характеризующихся наличием областей с замкнутыми линиями тока, в том числе и в некоторых внешних задачах, где вблизи поверхности тела образуются области замкнутой циркуляции, аналогичные показанной на фиг. 2, б (например, при свободном движении частиц в сдвиговом потоке). Кроме того, уравнения (2.18) и все качественные выводы остаются справедливыми: 1) независимо от типа поверхностей (точнее, от гидродинамических условий, которые на них выставляются; здесь считается, что выполняется условие непротекания жидкости через поверхность), на которых выставляются граничные условия для концентрации или температуры, т. е. поверхности могут быть как подвижными (капля, вращающийся цилиндр в ограниченной области (фиг. 2, а) и др., где скорость жидкости на поверхности отлична от нуля), так и неподвижными (твердая полость, внутри которой движется жидкость, и др., где скорость жидкости на поверхности равна нулю), 2) независимо от типа жидкости, которая может быть идеальной, вязкой, вязкоупругой и т. п., лишь бы она была несжимаемой.

Необходимо отметить, что при $Pe \rightarrow \infty$, $k=O(1)$ граничные условия на фиксированной поверхности «сносятся» на все особые линии тока, которые полностью замыкаются на этой поверхности. Важным следствием этого является то, что во внутренних задачах конвективного теплообмена без химических реакций $k=0$ при больших числах Пекле во всех застойных зонах (фиг. 2, в) концентрация и температура постоянны и равны соответствующим значениям на граничащей поверхности.

В случае реакции нулевого порядка среднее число Шервуда определяется равенством в (1.7) (или подстановкой $f(c)=1$ в (1.6)). Для химической реакции произвольного порядка $f(c)=c^n$ из асимптотической формулы (2.1) ($Pe=O(1)$, $k>O(1)$) следует, что среднее число Шервуда монотонно уменьшается с ростом порядка реакции n ; аналогичным свойст-

вом обладает и решение задачи (2.16), (2.18). Это означает, что при $0 < n < 1$ кривые, соответствующие предельному числу Шервуда (при $Re = \infty$), расположены между штриховой линией (соответствующей реакции нулевого порядка $n=0$) и верхней сплошной кривой (реакция первого порядка $n=1$, формула (2.20)). При уменьшении порядка реакции сплошные кривые, соответствующие среднему числу Шервуда при $Re=0$ и $Re=\infty$, постепенно сближаются и поднимаются вверх к штриховой линии. В предельном случае $n=0$ все три кривые сливаются в одну, т. е. для реакции нулевого порядка среднее число Шервуда вообще не зависит от числа Пекле.

Автор благодарит Ю. С. Рязанцева за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов В. С. Диффузионный пограничный слой на поверхности движущейся капли при наличии объемной химической реакции. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 1, с. 146–149.
2. Danckwerts P. V. Absorption by simultaneous diffusion and chemical reaction into particles of various shapes and into falling drops. — Trans. Faraday Soc., 1951, v. 47, № 9, p. 1014–1023.
3. Головин А. М., Животягин А. Ф. Влияние объемной химической реакции на массоперенос внутри капли при больших числах Пекле. — Вест. МГУ. Матем. и мех., 1979, № 4, с. 77–83.
4. Kronig R., Brink J. C. The theory of extraction from falling droplets. — Appl. Sci. Res., 1950, v. A2, № 2, p. 142–154.
5. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
6. Астарига Дж. Массопередача с химической реакцией. Л.: Химия, 1971. 224 с.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
8. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Массоперенос в диффузионном следе капли при стоксовом обтекании. — ПММ, 1977, т. 41, № 2, с. 307–311.
9. Коул Дж. Д. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
10. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
11. Броунштейн Б. И., Фишбеин Г. А. Гидродинамика, массо- и теплообмен в дисперсных системах. Л.: Химия, 1977. 280 с.
12. Bretherton F. P. Slowviscous motion round a cylinder in a simple shear. — J. Fluid Mech., 1962, v. 12, № 4, p. 591–613.

Москва

Поступила в редакцию
4.VI.1982