МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1983

УДК 532.591:538.4

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ НА МЕЛКОЙ ВОДЕ В ПРИСУТСТВИИ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

ДАНОВ К. Д., РУДЕРМАН М. С.

В [1, 2] было получено уравнение для длинных стационарных нелинейных внутренних волн в бесконечно глубокой стратифицированной жидкости, когда плотность меняется только в слое, толщина которого мала по сравнению с характерной длиной возмущения. В [3] это уравнение было обобщено на нестационарный случай. Полученное в [3] уравнение было впоследствии названо уравнением Беньямина — Оно. В [1, 3] были найдены стационарные решения уравнения Беньямина — Оно в виде солитонов и периодических волн.

В настоящей работе показано, что длинные нелинейные волны на мелкой воде в присутствии горизонтального магнитного поля также описываются уравнением Беньямина — Оно, а не уравнением Кортевега — де Вриза [4], как в случае, когда поле отсутствует. При этом в отличие от солитона в стратифицированной жидкости солитон на мелкой воде в горизонтальном магнитном поле движется со скоростью, меньшей скорости бесконечно длинных возмущений малой амплитуды. Исследована зависимость параметров солитона и периодической волны от напряженности и направления невозмущенного магнитного поля.

1. Постановка задачи. Рассмотрим волны на поверхности идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью, находящейся в постоянном гравитационном поле. Считаем, что снизу жидкость ограничена твердой бесконечно проводящей средой с горизонтальной поверхностью. Предполагается, что давление на поверхности жидкости постоянно, а среда, расположенная выше поверхности,— непроводящая. При этом в невозмущенном состоянии имеется постоянное горизонтальное магнитное поле с напряженностью $\mathbf{H}_0$. Заметим, что в этой постановке свободная поверхность и дно являются тангенциальными разрывами.

Движение жидкости описывается уравнениями магнитной гидродинамики

$$\nabla\mathbf{v}=0;\quad \nabla\mathbf{H}=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\nabla\times\mathbf{v})\times\mathbf{v}=-\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right)+\frac{1}{4\pi\rho}(\nabla\times\mathbf{H})\times\mathbf{H}+\mathbf{g} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) \tag{1.3}$$

где ρ — постоянная плотность, $\mathbf{v}$ — скорость, p — давление, $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести.

В твердой бесконечно проводящей среде, ограничивающей жидкость снизу, напряженность магнитного поля не меняется, сохраняя постоянное значение $\mathbf{H}_0$. Выше поверхности жидкости напряженность магнитного поля удовлетворяет уравнениям

$$\nabla\mathbf{H}=0;\quad \nabla\times\mathbf{H}=0 \tag{1.4}$$

Прежде чем выписывать граничные условия, введем систему декартовых координат с осью z, направленной вертикально вверх. В дальнейшем считаем, что все величины зависят только от x и z.

Уравнение дна в этих координатах запишется в виде $z=-h$, где h — глубина невозмущенной жидкости, а уравнение возмущенной свободной поверхности будет $z=\eta(x, t)$.

Имеют место следующие граничные условия:

$$\mathbf{H}\to\mathbf{H}_0 \quad (z\to+\infty) \tag{1.5}$$

$$\left[H_z-\frac{\partial\eta}{\partial x}H_x\right]=0; \qquad w=\frac{\partial\eta}{\partial t}+u\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

$$\left[p+\frac{H^2}{8\pi}\right]=0 \qquad (z=\eta) \tag{1.6}$$

$$w=0;\ H_z=0\ (z=-h) \tag{1.7}$$

где u, w — x- и z-компоненты скорости, квадратные скобки обозначают скачок величины.

Нетрудно видеть, что условие непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля при $z=-h$ удовлетворяется в силу (1.7), а при $z=\eta$ необходимо лишь для нахождения электрического поля в области $z>\eta$ и потому не используется.

В дальнейшем будем считать, что y-компонента скорости равна нулю, а y-компонента магнитного поля постоянна. Это предположение означает, что не рассматриваются альфвеновские волны, которые могут распространяться в слое жидкости, не возмущая ее поверхности.

После этого в силу (1.1) скорость и магнитное поле можно представить в виде

$$\mathbf{v}=-\nabla\times(\psi\mathbf{e}_y); \quad \mathbf{H}=\mathbf{H}_0-\sqrt{4\pi\rho}\,\nabla\times(\chi\mathbf{e}_y)$$

где $\mathbf{e}_y$ — единичный вектор оси y. Из уравнений (1.2) и (1.3) получим

$$\Delta\frac{\partial\psi}{\partial t}+\mathbf{e}_y(\nabla\psi\times\nabla\Delta\psi)=\mathbf{V}_A\nabla\Delta\chi+\mathbf{e}_y(\nabla\chi\times\nabla\Delta\chi) \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}=\mathbf{V}_A\nabla\psi+\mathbf{e}_y(\nabla\chi\times\nabla\psi); \qquad \mathbf{V}_A=\mathbf{H}_0/\sqrt{4\pi\rho} \tag{1.9}$$

Вообще говоря, в правой части (1.9) должна присутствовать аддитивная функция времени. Однако χ в свою очередь определена с точностью до аддитивного слагаемого, зависящего от времени, поэтому упомянутая выше функция в (1.9) может быть опущена.

Из уравнений (1.4) имеем

$$z>\eta:\ \Delta\chi=0;\ \chi\to C(t)\ \ (z\to+\infty) \tag{1.10}$$

где $C(t)$ — произвольная функция времени.

Второе условие (1.6) и первое (1.7) в новых переменных запишутся в виде

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial x} \quad (z=\eta), \qquad \psi=0 \quad (z=-h) \tag{1.11}$$

причем при выводе последнего использовалось то, что ψ определено с точностью до аддитивной функции времени.

Учитывая, что $V_{Az}=0$, из (1.7), (1.9) и (1.11) имеем

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}=0, \qquad \frac{\partial\chi}{\partial x}=0 \qquad (z=-h)$$

А поскольку добавление к χ аддитивной константы не меняет (1.8) и (1.9), можно положить

$$\chi=0\ \ (z=-h) \tag{1.12}$$

Первое граничное условие (1.6) запишется в виде

$$[\chi]=0 \quad (z=\eta) \tag{1.13}$$

Дифференцируя второе условие (1.8) по x и исключая p с помощью (1.2), получим

$$\left\{-\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial z}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial x}+\mathbf{l}\left(\nabla\psi\Delta\psi-\frac{1}{2}\nabla(\nabla\psi)^2-\nabla\chi\Delta\chi+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}\nabla(\nabla\chi)^2+V_A\cos\alpha\nabla\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)-V_A\cos\alpha\Delta\psi\frac{\partial\eta}{\partial x}-g\frac{\partial\eta}{\partial x}\right\}_{z=\eta-0}=$$
$$=\left\{\mathbf{l}\nabla\left(V_A\cos\alpha\frac{\partial\chi}{\partial z}+\frac{1}{2}(\nabla\chi)^2\right)\right\}_{z=\eta+0} \tag{1.14}$$

где $\mathbf{l}=(1,\ 0,\ \partial\eta/\partial x)$, α — угол между $\mathbf{H}_0$ и осью x, а обозначения $z=\eta\mp0$ означают левосторонний и правосторонний пределы.

Уравнения и граничные условия (1.8)—(1.14) полностью описывают изменение всех переменных при $z>-h$.

2. **Малые колебания.** Пусть величины ψ, χ и η малы. Линеаризуем уравнения (1.8), (1.9) и граничные условия (1.11), (1.13) и (1.14). В результате имеем

$$\Delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}-\mathbf{V}_A\nabla\chi\right)=0;\qquad \frac{\partial\chi}{\partial t}=\mathbf{V}_A\nabla\psi \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\eta}{\partial t},\qquad [\chi]=0\quad (z=0) \tag{2.2}$$

$$\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial x}-V_A\cos\alpha\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial z}+g\frac{\partial\eta}{\partial x}\right\}_{z=-0}=-V_A\cos\alpha\left\{\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial z}\right\}_{z=+0} \tag{2.3}$$

Ищем решение в виде

$$\psi=\psi^{(0)}(z)\exp\theta;\quad \chi=\chi^{(0)}(z)\exp\theta;\quad \eta=\eta^{(0)}\exp\theta$$
$$\theta=i(kx-\omega t) \tag{2.4}$$

Из (2.1), (2.2) с помощью (1.11), (1.12) находим при $-h\leqslant z\leqslant 0$

$$\psi^{(0)}(z)=A\,\mathrm{sh}\,k(z+h);\quad \eta^{(0)}=Ak\omega^{-1}\,\mathrm{sh}\,kh$$
$$\chi^{(0)}(z)=-AV_Ak\omega^{-1}\cos\alpha\,\mathrm{sh}\,k(z+h) \tag{2.5}$$

Из (1.10) и (2.2) получаем при $z>0$

$$\chi^{(0)}(z)=-AV_Ak\omega^{-1}\cos\alpha e^{-|k|z} \tag{2.6}$$

Подставляя (2.5) и (2.6) в (2.3), имеем следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2=V_A^2\cos^2\alpha(k^2+k|k|\,\mathrm{th}\,kh)+gk\,\mathrm{th}\,kh \tag{2.7}$$

При $V_A\cos\alpha=0$ это уравнение переходит в обычное дисперсионное уравнение для поверхностных волн [5]. При $kh\ll1$ из (2.7) получаем

$$\omega^2=(gh+V_A^2\cos^2\alpha)k^2+V_A^2hk^2|k|\cos^2\alpha \tag{2.8}$$

Как видим, дисперсия соответствует линеаризованному уравнению Беньямина — Оно [1, 3].

3. **Уравнение для длинных нелинейных волн.** Пусть отношение h к характерной длине возмущения есть $\varepsilon\ll1$. Аналогично тому, как это делается в [3], перейдем к новым переменным $\xi=\varepsilon(x-c_0t)$, $\tau=\varepsilon^2t$. Разложим все зависимые переменные в ряды вида

$$f=\varepsilon f_1(\xi,\ \tau,\ z)+\varepsilon^2f_2(\xi,\ \tau,\ z)+\ldots \tag{3.1}$$

Уравнения и граничные условия (1.8)—(1.11) и (1.14) запишутся в виде

$$\varepsilon\Delta_* \frac{\partial\psi}{\partial\tau} - c_0\Delta_* \frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\mathbf{l}_y(\nabla_*\psi\times\nabla_*\Delta_*\psi) =$$

$$= V_A \cos\alpha\Delta_* \frac{\partial\chi}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\mathbf{l}_y(\nabla_*\chi\times\nabla_*\Delta_*\chi) \tag{3.2}$$

$$\varepsilon \frac{\partial\chi}{\partial\tau} - c_0 \frac{\partial\chi}{\partial\xi} = V_A \cos\alpha \frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\mathbf{l}_y(\nabla_*\chi\times\nabla_*\psi) \tag{3.3}$$

$$\Delta_*\chi = 0 \quad (z>\eta) \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = c_0 \frac{\partial\eta}{\partial\xi} - \varepsilon \frac{\partial\eta}{\partial\tau} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial\xi^2} \qquad (z=\eta) \tag{3.5}$$

$$\Big\{ c_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial z} - \varepsilon \frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\,\partial z} - \varepsilon^2 c_0 \frac{\partial\eta}{\partial\xi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} - \varepsilon^3 \frac{\partial\eta}{\partial\xi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\,\partial\xi} +$$

$$+ \varepsilon^{-1}\mathbf{l}_* \left(\nabla_*\psi\Delta_*\psi - \frac{1}{2}\nabla_*(\nabla_*\psi)^2 - \nabla_*\chi\Delta_*\chi + \right.$$

$$\left. + V_A \cos\alpha\nabla_* \frac{\partial\chi}{\partial z}\right) - V_A\cos\alpha\Delta_*\psi\frac{\partial\eta}{\partial\xi} - g\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\Big\}_{z=\eta-0} =$$

$$= \varepsilon^{-1}\left\{\mathbf{l}_*\left(V_A\cos\alpha\nabla_*\frac{\partial\chi}{\partial z} + \frac{1}{2}\nabla_*(\nabla_*\chi)^2\right\}_{z=\eta+0}\right. \tag{3.6}$$

$$\nabla_* = \left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi}, 0, \frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad \Delta_* = \varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad \mathbf{l}_* = \left(1, 0, \varepsilon\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)$$

Собирая в (3.2), (3.3) и (3.5) члены $\sim\varepsilon$, получим

$$\frac{\partial^3}{\partial\xi\,\partial z^2}(c_0\psi_1 + V_A\cos\alpha\chi_1) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\xi}(c_0\chi_1 + V_A\cos\alpha\psi_1) = 0$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi} = c_0\frac{\partial\eta_1}{\partial\xi} \qquad (z=0) \tag{3.7}$$

Из (3.7) с помощью (1.11) и (1.12) имеем

$$\psi_1 = c_0h^{-1}[\eta_1 + U(t)](z+h)$$

$$\chi_1 = -V_Ah^{-1}\cos\alpha[\eta_1 + U(t)](z+h) \tag{3.8}$$

где $U(t)$ — произвольная функция. Если потребовать, чтобы при $\eta_1=0$ скорость также обращалась в нуль, то $U(t)=0$, что в дальнейшем и будет предполагаться.

Собирая в (3.6) члены $\sim\varepsilon$, подставляя в полученное уравнение (3.8) и используя то, что при $z>\eta$ справедлива оценка $\partial\chi/\partial z\sim\varepsilon\chi$, имеем

$$c_0^2 = V_A^2\cos^2\alpha + gh \tag{3.9}$$

Найдем теперь χ_1 в области $z>\eta$. Уравнение (1.10) и граничное условие (1.13) дают для χ_1

$$\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\xi^2} + \varepsilon^{-2}\frac{\partial^2\chi_1}{\partial z^2} = 0, \qquad [\chi_1] = 0 \qquad (z=0) \tag{3.10}$$

Пусть $F(f)$ — преобразование Фурье для функции f

$$F(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)l^{ik\xi}\,d\xi \tag{3.11}$$

В случае периодической функции преобразование Фурье понимается в обобщенном смысле (см., например, [6]).

Из (3.10) получим

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2 F(\chi_1)}{\partial z^2}-k^2F(\chi_1)=0\\&F(\chi_1)=-V_A\cos\alpha F(\eta_1)\quad(z=0)\end{aligned}\right\}\qquad(3.12)$$

В силу (1.10) имеем

$$F(\chi_1)=-V_A\cos\alpha F(\eta_1)e^{-\varepsilon|k|z}$$

откуда

$$\chi_1=-V_A\cos\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\eta_1)e^{-\varepsilon|k|z-ik\xi}\,dk$$

Используя определение $F(\eta_1)$ и меняя порядок интегрирования, получим

$$\chi_1=-\frac{V_A\cos\alpha}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon z\eta_1(\xi',\tau)\,d\xi'}{(\xi'-\xi)^2+\varepsilon^2z^2}\qquad(3.13)$$

Вычислим $\partial\chi_1/\partial z|_{z=+0}=\lim\limits_{z\to+0}\partial\chi_1/\partial z$. Дифференцируя (3.13) по z, интегрируя полученное выражение по частям и переходя к пределу, имеем

$$\left.\frac{\partial\chi_1}{\partial z}\right|_{z=+0}=\varepsilon\frac{V_A\cos\alpha}{\pi}\frac{\partial}{\partial\xi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta_1(\tau,\xi')}{\xi-\xi'}d\xi'\qquad(3.14)$$

Интеграл в (3.14) берется в смысле главного значения Коши.

Соберем в (3.2), (3.3) и (3.5) члены порядка ε^2. Воспользовавшись (3.8), получим

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^3}{\partial\xi\,\partial z^2}(c_0\psi_2+V_A\cos\alpha\chi_2)=0\\&\frac{\partial}{\partial\xi}(c_0\chi_2+V_A\cos\alpha\psi_2)=-\frac{V_A\cos\alpha}{h}\frac{\partial\eta_1}{\partial\tau}(z+h)\\&\frac{\partial\psi_2}{\partial\xi}=c_0\frac{\partial\eta_2}{\partial\xi}-\frac{\partial\eta_1}{\partial\tau}-2\frac{c_0}{h}\eta_1\frac{\partial\eta_1}{\partial\xi}\qquad(z=0)\end{aligned}\right\}\qquad(3.15)$$

откуда с помощью (1.11) и (1.12) имеем

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\psi_2}{\partial\xi}=\left(c_0\frac{\partial\eta_2}{\partial\xi}-\frac{\partial\eta_1}{\partial\tau}-2\frac{c}{h}\eta_1\frac{\partial\eta_1}{\partial\xi}\right)\left(1+\frac{z}{h}\right)\\&\frac{\partial\chi_2}{\partial\xi}=-V_A\cos\alpha\left(\frac{\partial\eta_2}{\partial\xi}-\frac{2}{h}\eta_1\frac{\partial\eta_1}{\partial\xi}\right)\left(1+\frac{z}{h}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(3.16)$$

Собирая в (3.6) члены $\sim\varepsilon^2$ и используя (3.16) и (3.14), получим уравнение Беньямина — Оно

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\eta_1}{\partial\tau}+b\eta_1\frac{\partial\eta_1}{\partial\xi}+\frac{\beta}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta_1(\tau,\xi')}{\xi-\xi'}d\xi'=0\\&b=\frac{3gh+V_A^2\cos^2\alpha}{2c_0h};\qquad\beta=\frac{V_A^2h\cos^2\alpha}{2c_0}\end{aligned}\right\}\qquad(3.17)$$

Уравнение (3.17) имеет решение в виде солитона, которое записывается в виде [1]

$$\eta_1 = -\frac{4\beta b^{-1}\lambda^{-1}}{1+\lambda^{-2}(\xi-c\tau)^2}; \qquad c=-\frac{\beta}{\lambda} \tag{3.18}$$

где λ — характерная длина возмущения. Как видим, в отличие от солитонов в стратифицированной жидкости [1, 3] скорость солитона меньше скорости распространения бесконечно длинных малых возмущений c_0. При этом солитон является волной опускания поверхности в отличие от солитона на поверхности мелкой воды в отсутствие магнитного поля [4]. При фиксированных ширине солитона λ и глубине h модуль его скорости и амплитуда растут при увеличении $V_A^2 \cos^2 \alpha$.

Уравнение (3.17) имеет также решение в виде периодической волны, зависящей от двух параметров a и L [3]

$$\eta_1 = -\frac{D}{1-B\cos[\pi(\xi-c\tau)/L]},$$

$$D=\frac{8\pi^2\beta^2}{ab^2L^2}; \qquad B=\sqrt{1-\left(\frac{4\pi\beta}{abL}\right)^2}; \qquad c=-\frac{ab}{4} \tag{3.19}$$

Нетрудно видеть, что при фиксированных a, L и b с увеличением $V_A^2 \cos^2 \alpha$ модуль скорости волны растет, а амплитуда убывает.

При $\alpha=\pi/2$ последний член в (3.17) обращается в нуль. В этом случае магнитное поле не влияет на распространение волн, которое описывается классически уравнением Кортевега — де Вриза для мелкой воды.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Benjamin B. T.* Internal waves of permanent form in fluids of great depth.— J. Fluid Mech., 1967, v. 29, № 3, p. 559—592.
2. *Davis R. E., Acrivos A.* Solitary internal waves in deep water.— J. Fluid Mech., 1967, v. 29, № 3, p. 593—607.
3. *Ono H.* Algebraic solitary waves in stratified fluids.— J. Phys. Soc. Japan, 1975, v. 39, № 4, p. 1082—1091.
4. *Korteweg D. J., Vries G., de.* On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves.— Phil. Mag., 1895, v. 39, p. 422—443.
5. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1932. 738 p.
6. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.IV.1982