

УДК 532.517+532.592

СОЛИТОНЫ В СТЕКАЮЩИХ СЛОЯХ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

ДЕМЕХИН Е. А., ДЕМЕХИН И. А., ШКАДОВ В. Я.

В работе [1] в приближении пограничного слоя исследовались периодические волновые решения в слое вязкой жидкости вблизи оптимальных режимов. В [2] в постановке уравнений Навье – Стокса находились нелинейные стационарные решения вблизи верхней кривой нейтральной устойчивости.

В настоящей работе выведены уравнения, по которым можно уточнить пограничное решение или оценить его приложимость. Рассмотрены решения типа солитонов для параметра задачи $\delta \in (0, \infty)$. При $\delta \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow \infty$ рассмотрены асимптотические разложения. Для конечных δ предложены два численных алгоритма решения задачи, один из них – для уравнений в переменных Мизеса. Численные решения показали существование «особых» сечений, где профиль скорости сильно отличался от параболического. Интегральные же характеристики солитона – фазовая скорость, амплитуда и т. д. – были близки к соответствующим, полученным в [3] на основе предположения о параболичности профиля скорости.

Впервые найдено критическое значение $\delta = \delta_{**}$, начиная с которого происходит отрыв пограничного слоя в стекающем вязком слое. Интересно, что отрыв происходит не на жесткой стенке, а на поверхности раздела, вблизи вершины солитона.

1. На вертикальной плоскости $y=0$ течет вязкая тяжелая жидкость $0 < y < h(x, t)$. Рассматриваются двумерные установившиеся волны с фазовой скоростью c . Величины считаются безразмерными, отнесенными к безволновой среднерасходной скорости, безволновой толщине и плотности жидкости.

Преобразуем скорость v и координату x : $x \rightarrow \kappa x$, $v \rightarrow v/\kappa$, где κ пока не определено. Тогда течение жидкости в системе координат, движущейся со скоростью c , описывается уравнениями

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\kappa}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \right) \\ \frac{1}{\kappa^2} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\kappa R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0; \quad y=0: \quad u = -c, \quad v = 0 \\ y=h(x): \quad v &= u h_x, \quad -p + \frac{2}{\kappa R} \frac{\partial v}{\partial y} n_1 - \frac{2}{\kappa R} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_2 - \\ &\quad - \frac{G h_{xx}}{\kappa^2 (1 + h_x^2 / \kappa^2)^{3/2}} = \text{const} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_1 + \frac{4}{\kappa^2} \frac{\partial v}{\partial y} n_2 &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь R – число Рейнольдса; G – безразмерное поверхностное натяжение; $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ – вектор нормали к поверхности раздела. Если добавить краевые условия по x , то задача полностью поставлена.

Величина κ выбирается из соотношения $GR/(3\kappa^3) = 1$. В таком случае задача описывается двумя параметрами, которые удобно ввести в виде: $\delta = R/(15\kappa)$, $\mu = 1/(15\kappa^2)$.

Пусть $\mu \rightarrow 0$. Если оставить в (1.1) члены $O(\mu)$ и ввести $p \rightarrow p/\delta$, то уравнения принимают вид

$$\delta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 15\delta \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right], \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$y=h(x): \quad p + \frac{1}{5} h_{xx} + \text{const} = 2\mu \left[\frac{9}{4} h_{xx} h_x^2 + \frac{\partial v}{\partial y} - h_x \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 15\mu \left[h_x^2 \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} - 4h_x \frac{\partial v}{\partial y} \right], \quad v - u h_x = 0$$

Для большинства жидкостей при нормальных условиях и числа Рейнольдса от нуля до сотен $\delta\mu \ll 1$. Ниже приведены значения μ , δ в зависимости от числа Рейнольдса для воды при $t=15^\circ\text{C}$:

R	1	10	100	500
δ	0,00600	0,100	1,670	11,94
$\mu\delta$	$3,24 \cdot 10^{-6}$	0,000150	0,00701	0,101

Если $u, v, \partial/\partial x, \partial/\partial y$ порядка единицы, то членами в правой части (1.2) можно пренебречь и пользоваться приближением пограничного слоя.

При $\mu=0$ в задаче остается один параметр δ . Безразмерный параметр $R/Fi^{1/4}$, где $Fi = \sigma^3 / (\rho^3 g v^4)$, предложенный в [4], по сути дела совпадает с введенным в [3] δ . Экспериментальные данные для разных жидкостей, приведенные в [5], хорошо ложатся на кривую от одного параметра $R/Fi^{1/4}$, что косвенно подтверждает применимость уравнений Прандтля для стекающих вязких слоев.

2. При $\mu=0$ система уравнений имеет вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{5\delta} \left(\frac{d^3 h}{dx^3} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 \right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$y=0: \quad u=-c, \quad v=0; \quad y=h(x): \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v=uh_x \quad (2.1)$$

Последнее условие иногда удобно заменить на

$$-\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u \, dy = 0 \quad (2.2)$$

В дальнейшем рассматриваются решения типа солитонов в области $\delta \in (0, \infty)$. Краевые условия при $x \rightarrow \pm\infty$: $u \rightarrow -c + 3(y - y^2/2)$, $h \rightarrow 1$. При $\delta \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow \infty$ рассматривались асимптотические разложения; для конечных δ проводилось численное решение. Кроме (2.1) использовались еще две формы пограничных уравнений. Одна из форм — в криволинейной системе координат $\xi=x$, $\eta=y/h(x)$ [1], спрямляющей границы области. Вторая форма — в переменных Мизеса. Удобство этих переменных для настоящей задачи обусловлено отсутствием особенности на стенке $u=0$ при $y=0$. А именно эта особенность снижает ценность преобразования Мизеса и приводит к значительным затруднениям при численном интегрировании [6]. Кроме того, переменные Мизеса отображают область волнового течения сложной и заранее неизвестной формы на полосу: упрощаются как уравнения, так и область течения. В переменных Мизеса (2.1) принимает

ВИД

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \tau} &= \frac{1}{15\delta} \left(u \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + 3 \right); \quad s=0: \quad g = \frac{1}{2} c^2 - \frac{1}{5\delta} \frac{d^2 h}{d\tau^2} \\ s=1-c: \quad \frac{\partial g}{\partial s} &= 0; \quad \int_0^{1-c} \frac{ds}{u} + h = 0 \\ \tau = \pm\infty: \quad h &= 1, \quad h'_\tau = h''_{\tau\tau} = 0, \quad g = \frac{1}{2} (-c + 3\lambda - 1,5\lambda^2) \\ s &= -c\lambda + 1,5\lambda^2 - \lambda^3/3 \\ \tau = x, \quad s &= \psi, \quad g = \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{5\delta} \frac{d^2 h}{d\tau^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Условие при $\tau = \pm\infty$ записано в параметрическом виде, $\lambda \in [0, 1]$.

Так как коэффициент перед $\partial^2 g / \partial s^2$ меньше нуля ($u < 0$), то (2.3) корректно интегрировать назад, $d\tau < 0$.

Случай $\delta \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow \alpha_0 \frac{\partial}{\partial x}, \quad u \rightarrow u - c, \quad v \rightarrow \alpha_0 v, \quad c \rightarrow 3 + \alpha_0^3 c \\ h &= 1 + \alpha_0^3 H, \quad \alpha_0^2 = 18\delta \end{aligned}$$

Решение будет искаться в виде разложений по малой величине $\varepsilon = \alpha_0^3$

$$\begin{aligned} u &\sim U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \varepsilon^3 U_3, \quad v \sim \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \varepsilon^3 V_3 \\ H &\sim H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2, \quad c \sim c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставим (2.4) в (2.1), разложив граничные условия при $y = 1 + \varepsilon H$ в ряд Тейлора и снеся их на $y = 1$; получим

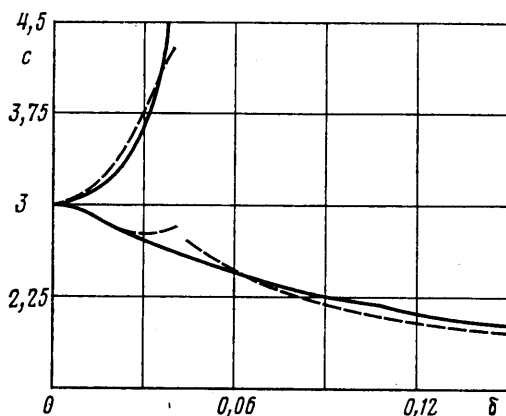
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} &= 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial y} = -\frac{\partial U_1}{\partial x}; \quad y=1: \quad \frac{\partial U_1}{\partial y} = 3H_0, \quad V_1 = -\frac{3}{2} \frac{\partial H_0}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} &= \frac{5}{6} (-3 + U_0) \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{5}{6} U_0' V_1 - 3 \frac{\partial^3 H_0}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial y} = -\frac{\partial U_2}{\partial x} \\ y=1: \quad \frac{\partial U_2}{\partial y} &= 3H_1, \quad V_2 + H_0 \frac{\partial V_1}{\partial y} = -\frac{3}{2} \frac{\partial H_1}{\partial x} + U_1 \frac{\partial H_0}{\partial x} - c_0 \frac{\partial H_0}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 U_3}{\partial y^2} &= \frac{5}{6} \left(U_0 \frac{\partial U_2}{\partial x} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_0' V_2 + \frac{\partial U_1}{\partial y} V_1 \right) - \frac{5}{6} c_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} - 3 \frac{\partial^3 H_1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial V_3}{\partial y} &= -\frac{\partial U_3}{\partial x}, \quad y=1: \quad \frac{\partial U_3}{\partial y} + H_0 \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} = 3H_2, \\ V_3 + H_0 \frac{\partial V_2}{\partial y} + H_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{1}{2} H_0^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} &= -\frac{3}{2} \frac{\partial H_2}{\partial x} + U_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} + U_2 \frac{\partial H_0}{\partial x} - \\ - c_0 \frac{\partial H_1}{\partial x} - c_1 \frac{\partial H_0}{\partial x} + U_1' H_0 \frac{\partial H_0}{\partial x} - \frac{3}{2} H_0^2 \frac{\partial H_0}{\partial x}, \quad y=0: \quad U_k = V_k = 0, \quad k=1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Последовательно решая (2.5), после ряда преобразований получим два обыкновенных дифференциальных уравнения 4-го порядка, допускающие понижение порядка до 3-го

$$H_0'''' + H_0' - c_0 H_0 + 3H_0^2 = Q_0, \quad H_0, H_1 \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty) \quad (2.6)$$

$$H_1'''' + H_1' - c_0 H_1 + 6H_0 H_1 = c_1 H_0 - \frac{25}{21} c_0 H_0' + \frac{8}{7} H_0 H_0' - 3H_0 H_0' - H_0^3 + Q_1 \quad (2.7)$$

Здесь штрих означает производную по x ; Q_0, Q_1 — коэффициенты в разложении нелинейного искажения расхода. Для рассматриваемых в настоящей статье солитонных решений $Q_0=Q_1=0$. Уравнение (2.6) получено в [7], солитонные решения впервые найдены в [8]; уравнение (2.7) ранее не исследовалось. Уравнение (2.6) инвариантно относительно замены $H_0 \rightarrow -H_0, x \rightarrow -x, c_0 \rightarrow -c_0$ [8]; при такой замене $H_1 \rightarrow H_1, c_1 \rightarrow c_1$. Поэтому, как и для c_0 , достаточно рассмотреть случай одного знака c_1 . Для нахождения собственных значений c_0, c_1 использовался измененный метод [9].



Фиг. 1

Пусть $c_0, c_1 > 0$; c_0, H_0 считаются найденными; ищутся H_1, c_1 . Рассмотрим асимптотику при $x \rightarrow \pm\infty, H_0, H_1 \rightarrow 0$. Пренебрежем в (2.7) квадратичными и кубическими членами по H_0 . Решая полученное уравнение и отбрасывая растущие при $x \rightarrow -\infty$ решения, имеем

$$H_0 \sim \Delta e^{2mx}, \quad H_1 \sim \Delta \left(L + \frac{c_1 - 50/21 c_0 m}{1 + 12m^2} x \right) e^{2mx} \quad (2.8)$$

Здесь Δ, L — произвольные постоянные; считалось, что $\Delta = 0,001, L = 0$. Пусть решение численно продолжено от асимптотики (2.8) до асимптотики при $x \rightarrow +\infty, H \rightarrow 0$. Если c_1 не является собственным значением, то можно показать, что решение (2.7) при $x \rightarrow +\infty$ имеет вид

$$H_0 \sim M e^{-mx} \sin(\beta x + \psi_0), \quad H_1 \sim A e^{2mx} + B e^{-mx} \sin(\beta x + \psi_1) + H_1^*$$

Здесь $H_1^* \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ — частное решение; m, β определяются как корни характеристического уравнения $\sigma^3 + \sigma - c_0 = 0, \sigma_1 = 2m; \sigma_{2,3} = -m \pm i\beta$. Необходимо подобрать c_1 так, чтобы подавить растущее при $x \rightarrow +\infty$ решение, т. е. так, чтобы $A(c_1) = 0$. Можно показать, что $A = 0$, если при $x \rightarrow +\infty (m^2 + \beta^2) H_1 + 2m H_1' + H_1'' = 0$, поэтому c_1 подбиралось таким образом, чтобы выполнялось это равенство. Было найдено, что

$$c_0 = \pm 1,22, \quad c_1 = 1,55, \quad c \sim 3 \pm (93,28^{3/2} + 9040\delta^3)$$

Асимптотическое поведение c вблизи точки бифуркации показано штриховыми линиями на фиг. 1. Численное значение c_0 совпадает с найденным в [8].

Так как (2.7) линейно, то c_1 можно искать стандартным образом через решение сопряженной задачи. В рассмотренном случае, однако, целесообразнее пользоваться данным методом: во-первых, вследствие одностипности алгоритма нахождения $c_0, H_0(x)$ и $c_1, H_1(x)$; во-вторых, примененный метод позволяет одновременно находить и собственную функцию $H_1(x)$.

Случай конечных δ . Краевая задача сводилась к задаче Коши и затем решалась конечно-разностным методом. Использовались уравнения в двух

Формах: (2.1) в криволинейных координатах [9] $\xi=x, \eta=y/h$ и в форме Мизеса (2.3).

Применялась неявная разностная схема. Вторые и первые производные от h не заменялись на разностные соотношения. Сеточные уравнения приводились к виду

$$u_n^{m+1} = A_n^m u_{n+1}^{m+1} + B_n^m u_{n-1}^{m+1} + C_n^m + M_n^m D^2 h^{m+1} \quad (2.9)$$

$$u_1^{m+1} = -c, \quad u_1^{m+1} = 0, \quad u_{N-1}^{m+1} = u_N^{m+1} \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{2} h^{m+1} \Delta \eta \left\{ u_1^{m+1} + u_N^{m+1} + 2 \sum_{n=2}^{N-1} u_n^{m+1} \right\} = 1-c \quad (2.11)$$

Выражения для A_n^m, B_n^m, C_n^m ввиду их громоздкости не приводятся. Предполагается, что $c, u_n^m, h^m, D^2 h^m$ известны. Последовательность расчета: определялось первое приближение $h^{m+1} = h^m + D h^m \Delta \xi + 0,5 D^2 h^m \Delta \xi^2$, (2.9)–(2.11) решались методом прогонки для сложных систем [10]. Уравнение интегрировалось назад $\Delta \xi < 0$. Незвестная скорость искалась в виде (верхние индексы опускаются)

$$u_n = P_n u_{n+1} + R_n D^2 h + Q_n \quad (2.12)$$

где P_n, R_n, Q_n находились из (2.9), (2.10). Величина $D^2 h$ при известных P_n, R_n, Q_n находилась подстановкой (2.12) в (2.11). После этого уточнялись коэффициенты прогонки и т. д., а после завершения итераций переходили к следующему слою по m .

Для реализации вышеуказанного расчета необходимо знать фазовую скорость c и значения скоростей, толщины слоя и производных толщины в некотором сечении. Для замыкания численного алгоритма необходимо перейти к крайним условиям при $\xi = \pm \infty$. Асимптотика при $\xi \rightarrow \pm \infty$ ищется в виде

$$u = U - c - \varepsilon \varphi' / \sigma e^{\sigma x}, \quad v = \varepsilon \varphi(y) e^{\sigma x}, \quad h = 1 + \varepsilon e^{\sigma x} \\ U = 3(y - 0,5y^2).$$

После подстановки в (2.1) и линеаризации относительно ε получаем задачу на собственные значения σ

$$\varphi''' + 15\sigma \delta \{ (c-U)\varphi' + \varphi U' \} = 3\sigma^4, \quad y=0: \quad \varphi = \varphi' = 0$$

$$y=1: \quad \varphi = \left(\frac{3}{2} - c \right) \sigma, \quad \varphi'' = -3\sigma \quad (2.13)$$

Задавая действительное значение c , можно тем или иным методом найти спектр собственных значений $\{\sigma_n\}$ и собственные функции $\{\varphi_n\}$. Уравнение (2.13) приводилось к конечно-разностному виду с тем же числом узлов N , что и у нелинейной задачи. Характеристический полином вычислялся методом окаймления для ленточной матрицы [11]. Погрешность за счет конечно-разностной аппроксимации растет при росте модуля собственного значения.

Разобьем множество собственных значений (2.13) на два подмножества: $\text{Re } \sigma = -\sigma_R > 0$ и $\sigma_R < 0$ ($\sigma = 0, \varphi = 0$ соответствует плоскопараллельному течению и в дальнейшем исключается из рассмотрения). Пусть число собственных значений $\sigma_R > 0$ равно M_1 , а $\sigma_R < 0 - M_2$. Особенностью настоящей задачи является то, что при $c \in (1,5; 3)$ $M_2 = 1$ ($\sigma_1 -$ действительно); при $c > 3$ $M_2 = 2$ ($\sigma_{1,2} = -m \pm i\beta$ - комплексно-сопряженные величины). Это обстоятельство создает благоприятные возможности при численном продолжении решения в сторону меньших ξ .

Пусть $c \in (1,5; 3)$, $x \rightarrow +\infty$

$$u \sim U - c + A_1 u_1 e^{\sigma_1 x} + \sum_{k=2}^{M_1} A_k u_k e^{\sigma_k x}$$

Так как $\sigma_{kR} < 0, k \geq 2$, то для подавления растущих при $x \rightarrow +\infty$ решений необходимо положить $A_k = 0, k \geq 2$. Далее, в силу инвариантности уравнений относительно сдвига по x можно, не теряя общности, считать A_1 известной величиной (в конкретных расчетах выбиралось $A_1 = -0,01$). Единственной неизвестной в асимптотике справа является фазовая скорость c . Если c задано, то $\sigma_1(c), u_1(c, y)$ известны. Тогда в начальном сечении для расчета по формулам (2.9)–(2.11) $u, h, Dh, D^2 h$ заданы. При $x \rightarrow -\infty$

$$u \sim U - c + B_1 u_1 e^{\sigma_1 x} + \sum_{k=2}^{M_1} B_k u_k e^{\sigma_k x} \quad (2.14)$$

Для подавления растущих при $x \rightarrow -\infty$ решений необходимо положить $B_1 = 0$. В записанной сумме σ_k считаются пронумерованными в порядке возрастания действительной части.

Теперь задачу можно сформулировать следующим образом: необходимо подобрать c так, что при продолжении решения от начальных значений по формулам (2.9)–(2.11) выйти на асимптотику (2.14) при $B_1(c) = 0$. Можно показать, что если c близко к собственному значению, так что при численном продолжении решения оно выходит на асимптотику (2.14), то выражение для B_1 имеет вид

$$B_1 = \left\{ \frac{(m^2 + \beta^2)(h-1) - 2mh' + h''}{(\sigma_1 - m)^2 + \beta^2} + \sum_{k=3}^M F_k e^{(\sigma_k - \alpha_k)x} \right\} e^{-\sigma_1 x}$$

Здесь $\sigma_2 = m \pm i\beta$ – первые по счету собственные значения в сумме (2.14); h, h', h'' получены численным продолжением до сечения x ; F_k – функции σ_k, h, h', h'' и значений сеточной функции u_k в сечении x .

Так как $\sigma_{kR} > \sigma_{2R}$, $k=3, \dots, M$, то при $x \rightarrow -\infty$ сумма в выражении для B_1 стремится к нулю. (Чтобы показать это более строго, необходимо выписать громоздкие выражения для F_k .) Тогда, чтобы обратить B_1 в нуль, необходимо подобрать c так, чтобы $(m^2 + \beta^2)(h-1) - 2mh' + h'' = 0$. Это достигалось многократным численным интегрированием пограничных уравнений при равных c .

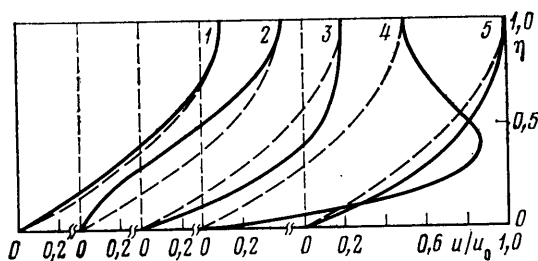
Для решения уравнений в нелинейной области также брались уравнения в форме Мизеса (2.3).

Расчеты проводились на ЕС 10-22 с двойной точностью. Расчет одного значения δ занимал порядка часа машинного времени при решении (2.1) и около получаса при решении уравнений в переменных Мизеса. При расчете искомого c зажималось в вилку $c \in (c_1, c_2)$ $B_1(c_1) < 0$, $B_1(c_2) > 0$, и затем подбиралось методом деления пополам. Одновременно вычислялась величина $|h-1| + |Dh| + |D^2h|$, по приближению которой к минимуму можно судить о приближении к солитонному решению. Число итераций по c было порядка 10. По η, s бралось 40 узлов, по ξ, τ – 100. Число итераций на одном сечении колебалось от 2 до 10. Проверка точности в первом методе проводилась по кинематическому условию $v = uh_x$.

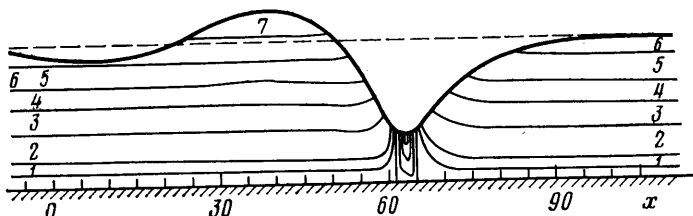
Перейдем к обсуждению некоторых результатов расчета для конечных δ . На фиг. 1 сплошными линиями изображена зависимость фазовой скорости c от δ при интегральном подходе с принятием параболического профиля скоростей [3]. Штриховая линия, начинающаяся при $\delta \approx 0,043$, – численное решение уравнений пограничного слоя; штриховые, выходящие из точки $c=3, \delta=0$, – асимптотика $c \sim 3 \pm (93,2\delta^{2/3} + 9040\delta^3)$. Численная фазовая скорость хорошо совпадает с полученной интегральным методом. При малых δ численный метод дает заниженные значения c , а в окрестности $\delta=0$ перестает работать. Это связано с тем, что амплитуда солитона становится малой и не улавливается даже при двойной точности. В области малых δ подход Мизеса дает лучшие результаты, чем расчет по уравнениям (2.1).

На фиг. 2 даны профили необращенной скорости, отнесенной к скорости на поверхности раздела, и на фиг. 3 – график линий тока в необращенном движении при $\delta=0,4$. Сечения 1–5 соответствуют значениям скорости $x=6,53; 6,28; 6,03; 5,78; 5,53$. Цифры 1–7 на фиг. 3 отвечают $\psi=0,015; 0,05; 0,2; 0,4; 0,6; 0,85; 1,1$. Штриховая линия на фиг. 2 – параболический профиль скоростей. Несмотря на хорошее совпадение «интегральных» величин типа фазовой скорости, амплитуды и т. д. в подходах [3] и подходе данной работы, локальные величины типа распределения скоростей по сечению пленки при умеренных δ могут сильно различаться. А именно эти характеристики наиболее существенны при исследовании массотеплопереноса в пленках. В сечении 4 отличие профиля от параболического особенно сильное. Эти сечения, как было показано в экспериментах [12], «являются особыми...» и в них «возможны большие отклонения от параболического профиля...». В окрестности оптимальных режимов эти отклонения намного меньше [1].

Далее, отрицательные необращенные скорости появляются при $\delta > \delta_*$ ($\delta_* \approx 0,25$). (Для оптимальных режимов $\delta_* \approx 0,234$ [1].) Появление отрицательных необращенных скоростей не вносит особенностей при решении уравнений Прандтля. Особенность появляется при переходе через ноль



Фиг. 2



Фиг. 3

обращенной скорости u , что лучше всего видно из (2.4). Такая особенность впервые появляется при $\delta = \delta_{**}$ ($\delta_{**} \approx 0,5$ — грубая оценка δ_{**} , так как в погранслоном приближении к этой точке трудно подойти из-за переполнения ЭВМ). Расчет при $\delta > \delta_{**}$ в рамках уравнений Прандтля невозможен. При $\delta = \delta_{**}$ на вершине волны появляется точка $u = \partial u / \partial y = 0$. При $\delta > \delta_{**}$ точка распадается на две этими точками — область возвратного течения. Эту область можно интерпретировать как область отрыва ламинарного потока от движущейся криволинейной стенки в диффузорном участке течения [13]. Интересно, что отрыв происходит не на жесткой стенке, а на поверхности раздела.

Случай $\delta \rightarrow \infty$. Возьмем уравнение (2.3). Рассмотрим невязкое внешнее разложение, справедливое везде, кроме узких слоев трения вблизи стенок, вводя растяжение $\tau \rightarrow (5\delta)^{1/2} \tau$. Тогда первое из уравнений (2.3) перейдет в $\partial g / \partial \tau = 0$. Но тогда

$$\frac{1}{2} u^2 - \frac{d^2 h}{d\tau^2} = \text{const} \quad (\tau = \psi = \text{const}) \quad (2.15)$$

Если вспомнить, что $p = -h_{\tau\tau}$, то уравнение (2.15) представляет интеграл Бернулли для идеальной завихренной жидкости при пренебрежении квадратом вертикальной составляющей скорости.

Значение постоянной в (2.15) и зависимость u от функции тока ψ можно получить из условий (2.3) при $\tau = \pm\infty$ в параметрическом виде

$$\tau = \pm\infty: \quad \frac{1}{2} u^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} z^2 + b^2 \right); \quad ds = - \left(\frac{3}{2} z^2 + b^2 \right) dz$$

$$z = y - 1, \quad z \in [-1; 0], \quad b^2 = c - \frac{3}{2} > 0$$

Если сделать замену $\lambda = \sqrt{6}z/2$ и подставить получившееся выражение с учетом (2.15) в интегральное условие, то получим

$$\int_{-\sqrt{6}/2}^0 \frac{(\lambda^2 + b^2) d\lambda}{\{(\lambda^2 + b^2)^2 + 2h''\}^{1/2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} h \quad (2.16)$$

Соотношение (2.16) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно h , не разрешенное относительно старшей

производной $F(h'', h) = 0$. Таким образом, в предельном случае $\delta \rightarrow \infty$ задача опять свелась к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Однако нетрудно показать, что (2.16) не имеет решений типа солитонных, но имеет периодические решения. Рассмотрим асимптотику (2.16) при $x \rightarrow \pm\infty$: $h = 1 + f$, $f \rightarrow 0$. Линеаризуя (2.16) относительно f , получим

$$f'' + \frac{\sqrt{6}}{2I} f = 0, \quad I = \frac{\sqrt{6}}{4b^2(c^{3/2} + b^2)} + \frac{1}{2b^3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{6}}{2b} \quad (2.17)$$

При $b^2 > 0$ ($c > 3/2$) $\sqrt{6}/(2I) > 0$, т. е. (2.17) не имеет затухающих на бесконечности решений. Для получения солитонных решений необходимо брать $c < 3/2$, когда приближение пограничного слоя не работает. Физически полученный результат означает, что при $\delta \rightarrow \infty$ оторвавшееся возвратное течение уходит в бесконечность. Этот результат дополняет полученный для конечных δ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов В. Я., Холпанов Л. П., Малюсов В. А., Жаворонков Н. М. К нелинейной теории волновых течений пленки жидкости. — Теор. основы хим. технологии, 1970, т. 4, № 6, с. 859–867.
2. Уринцев А. Л. Ветвление решений в задаче о волновом течении вязкой жидкости со свободной границей. — ПМТФ, 1978, № 4, с. 129–142.
3. Шкадов В. Я. Уединенные волны в слое вязкой жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 1, с. 63–66.
4. Verbente C. P., Ruckenstein E. Hydrodynamics of wave flow. — AIChE Journal, 1968, v. 14, № 5, p. 772–782.
5. Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. Волны на поверхности вертикально стекающей пленки жидкости. Новосибирск, 1979. 52 с. (Препринт ИТФСО АН СССР № 36–79).
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
7. Непамнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 3, с. 28–34.
8. Цвелодуб О. Ю. Стационарные бегущие волны на пленке, стекающей по наклонной плоскости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 4, с. 142–146.
9. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во МГУ, 1973, 192 с.
10. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
11. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
12. Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В. Двумерные волны на вертикальной пленке жидкости. — В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск, 1977, с. 158–172.
13. Чжен П. Отрывные течения. Т. 1. М.: Мир, 1972. 299 с.

Краснодар, Москва

Поступила в редакцию
29.I.1982