МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1983

УДК 532.594

О ВЫЧИСЛЕНИИ ДЕКРЕМЕНТА ЗАТУХАНИЯ КОЛЕБАНИЙ МАЛОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ

РАДЯКИН Н. К.

Рассматривается задача о малых колебаниях маловязкой жидкости, вращающейся в условиях невесомости в цилиндрическом сосуде. При фиксированном объеме жидкости и различных значениях угловой скорости вращения и угла смачивания вычислены декремент затухания и частоты собственных колебаний. Для идеальной жидкости рассчитаны также формы собственных колебаний свободной поверхности жидкости.

1. Постановка задачи. Пусть несжимаемая маловязкая жидкость частично заполняет круговой цилиндрический сосуд и равномерно вращается вместе с ним в условиях невесомости с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^\circ=\omega^\circ\mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ — орт оси вращения сосуда z. Рассмотрим задачу о малых нормальных колебаниях жидкости относительно состояния равномерного вращения. Уравнения и граничные условия будем записывать в цилиндрической системе координат $\mathbf{x}=(r, \theta, z)$, равномерно вращающейся вместе с жидкостью с угловой скоростью $\omega^\circ\mathbf{k}$. Тогда при относительном равновесии поле скоростей будет нулевое, а поле давлений определяется формулой $p_0=p_0(\mathbf{x})={}^1/_2\rho\omega_0{}^2r^2+c$. Жидкость при этом будет занимать осесимметричную область Ω, ограниченную твердой стенкой цилиндра Σ и свободной равновесной поверхностью Γ (см. фиг. 1, где показано осевое сечение сосуда полуплоскостью $\theta=\text{const}$ и приведены другие обозначения).

Будем считать, что в процессе малых колебаний поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и функция $p(\mathbf{x}, t)$ отклонения поля давлений от равновесного давления $p_0(\mathbf{x})$ зависят от времени по закону $\exp(\lambda_1 t)$. Тогда величина $\operatorname{Re}\lambda_1$ дает декремент затухания колебаний.

Все дальнейшие рассуждения будем проводить в безразмерных переменных, выбрав в качестве характерных величин плотность жидкости ρ, коэффициент поверхностного натяжения σ и радиус цилиндра R. Для безразмерных величин сохраним те же обозначения.

Функции $u(\mathbf{x})$ и $p(\mathbf{x})$ в области Ω должны удовлетворять линеаризованным уравнениям Навье — Стокса и условию несжимаемости:

$$\lambda\mathbf{u}+2\omega_0\mathbf{k}\times\mathbf{u}+\nabla p-\nu\Delta\mathbf{u}=\mathbf{0},\quad \nabla\mathbf{u}=0\ (x\in\Omega) \tag{1.1}$$
$$\nu=\nu^*\rho(\sigma R)^{-1},\quad \omega_0=\omega^\circ(\rho R^3/\sigma)^{1/2},\quad \lambda=\lambda_1(\rho R^3/\sigma)^{1/2}$$

Здесь ν^* — кинематическая вязкость жидкости.

Для записи граничных условий на Γ в ее окрестности введем ортогональную систему криволинейных координат (ξ^1, ξ^2, ξ^3). Координату ξ^3 направим по внешней по отношению к Ω нормали $\mathbf{n}$ к Γ, выбрав коэффициент Ляме $h_{\xi^3}=1$ на Γ, т. е. при $\xi^3=0$. Тогда линеаризованные граничные условия имеют вид [1]

$$\nu(u_{1,3}+u_{3,1})=\nu(u_{2,3}+u_{3,2})=0,\qquad \lambda p-2\lambda\nu u_{3,3}=Bu_n\quad (\mathbf{x}\in\Gamma) \tag{1.2}$$

$$u=0 \quad (\mathbf{x}\in\Sigma); \qquad \frac{\partial u_n}{\partial e}+\chi u_n=0 \qquad (\mathbf{x}\in\gamma)$$

$$B\equiv a-\Delta_\Gamma, \qquad u_n\equiv\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}, \qquad \chi=\frac{\varkappa_1\cos\delta-\varkappa_2}{\sin\delta}, \qquad a=-\left(\frac{\partial p_0}{\partial n}\right)_\Gamma-(k_1^2+k_2^2)$$

Здесь $a=a(\xi^1,\xi^2)$ — заданная функция на Γ; k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности Γ; Δ_Γ — оператор Лапласа — Бельтрами на Γ; $u_{i,k}$ — ковариантная производная ковариантного вектора u_i по координате ξ^k; $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — кривизны линий Γ_θ и Σ_θ, получающихся в сечении поверхностей Γ и Σ полуплоскостью $\theta=\text{const}$; вектор $\mathbf{e}$ расположен в плоскости (r, z), касателен к Γ_θ и направлен вне Ω_θ.

Граничное условие на контуре γ пересечения поверхностей Γ и Σ означает, что в процессе колебаний угол смачивания δ сохраняется. Принимая это условие, допускаем возможность разрыва поля скорости $\mathbf{u}$ на γ и возможность проскальзывания по поверхности Σ частиц жидкости вблизи γ.

2. Асимптотика малой вязкости. В дальнейшем будем считать, что силы вязкости малы по сравнению с капиллярными, а последние одного порядка с центробежными. Тогда в первом уравнении (1.1) при старшей производной будет стоять малый параметр $\nu\ll1$, и при решении задачи (1.1), (1.2) можно воспользоваться методом пограничного слоя [4—6]. В работе [6] изложена процедура применения этого метода при решении задачи о малых колебаниях маловязкой жидкости, вращающейся в частично заполненном осесимметричном сосуде. Там же получена асимптотическая формула для собственных значений λ

$$\lambda=i\omega-\frac{1+i}{2}\frac{L}{M}\nu^{1/2}+O(\nu) \qquad (\nu\to0)$$

$$L=\int\limits_\Sigma(\mathbf{v})^2\{\omega^2+[\omega^2-4\omega_0^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_\Sigma)^2]^{1/2}\}^{1/2}d\Sigma \tag{2.1}$$

$$M=\int\limits_\Omega(\mathbf{v})^2d\Omega+\omega^{-2}\int\limits_\Gamma(Bv_n)v_n\,d\Gamma$$

Здесь ω — собственная частота колебаний, а $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ — поле относительных скоростей идеальной жидкости, вращающейся в заданном осесимметричном сосуде; $\mathbf{n}_\Sigma$ — внешняя нормаль к Σ.

Формула (2.1) дает возможность по известным решениям задачи о малых колебаниях идеальной жидкости получить частоты колебаний и декремент затухания колебаний для маловязкой жидкости. Эта формула используется далее при вычислении декремента затухания колебаний жидкости, вращающейся в цилиндрическом сосуде. Для этого на первом этапе необходимо решить соответствующую задачу для идеальной жидкости, т. е. найти собственные частоты ω и соответствующие им собственные функции $v(x)$. Эти функции вместе с функцией $q(x)$ — отклонением поля давлений в идеальной жидкости от равновесного давления $p_0(x)$ — удовлетворяют линеаризованным уравнениям Эйлера и граничным условиям [1—3]

$$i\omega\mathbf{v}+2\omega_0\mathbf{k}\times\mathbf{v}+\nabla q=\mathbf{0}, \quad \nabla\cdot\mathbf{v}=0 \quad (\mathbf{x}\in\Omega) \tag{2.2}$$

$$v_{n_\Sigma}\equiv\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_\Sigma=0 \quad (\mathbf{x}\in\Sigma)$$

$$i\omega q=Bv_n \qquad (\mathbf{x}\in\Gamma), \qquad \frac{\partial v_n}{\partial e}+\chi v_n=0 \qquad (\mathbf{x}\in\gamma)$$

Задачу (2.2) будем рассматривать в предположении, что состояние относительного равновесия жидкости в сосуде устойчиво по линейному приближению, т. е. выполняется условие [1]

$$\int\limits_\Gamma (Bv_n)v_n\,d\Gamma \geqslant c\int\limits_\Gamma |v_n|^2\,d\Gamma, \qquad c>0$$

Функции v и q удобно выразить в данном случае через одну скалярную функцию состояния $\Phi(\mathbf{x},t)$ по формулам [1—3, 7—9]

$$\begin{gathered}\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=\nabla\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+2\omega_0\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}\mathbf{k}+4\omega_c^2(\nabla\Phi\cdot\mathbf{k})\cdot\mathbf{k}\\ q(\mathbf{x},t)=-\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial t^3}+4\omega_0^2\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\end{gathered}\tag{2.3}$$

Осевая симметрия позволяет отделить угловую переменную θ и искать $\Phi(\mathbf{x},t)$ в виде бегущих волн

$$\Phi(r,\theta,z;t)=\exp[i(\omega_m t-m\theta)]\varphi_m(r,z), \quad m=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{2.4}$$

Тогда, учитывая (2.2)—(2.4), для функций $\varphi_m(r,z)$ получаем в плоскости (r,z) следующую задачу [1—3]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_m}{\partial r}\right)-\frac{m^2}{r^2}\varphi_m+\left(1-\frac{4\omega_0^2}{\omega_m^2}\right)\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial z^2}=0 \qquad (\mathbf{x}\in\Omega_\theta) \tag{2.5}$$

$$u_{n\,\Sigma}\equiv\frac{\partial\varphi_m}{\partial n_\Sigma}-\frac{4\omega_0^2}{\omega_m^2}\cos(\mathbf{n}_\Sigma,z)\frac{\partial\varphi_m}{\partial z}-2\frac{\omega_0}{\omega_m}\frac{m}{r}\cos(\mathbf{n}_\Sigma,r)\varphi_m=0 \qquad (\mathbf{x}\in\Sigma_\theta)$$

$$B_m u_n=(\omega_m^2-4\omega_0^2)\varphi_m \qquad (\mathbf{x}\in\Gamma_\theta)$$

$$\frac{\partial u_n^\varepsilon}{\partial e}+\chi u_n=0 \qquad (\mathbf{x}\in\Sigma_\theta\cap\Gamma_\theta), \qquad m=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Здесь B_m — дифференциальное выражение, которое для любой функции

$$u(r,\theta,z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}u_m(r,z)\exp(-im\theta)$$

удовлетворяющей условию на γ, по определению вводится следующим образом:

$$(Bu)(r,\theta,z)\equiv\sum_{m=-\infty}^{\infty}(B_m u_m)(r,z)\exp(-im\theta)$$

Как показано в [1—3, 10, 11], решениями задачи (2.5) могут быть нормальные колебания в виде поверхностных и внутренних волн. Спектр частот ω_m состоит из объединения множеств двух типов: дискретного спектра поверхностных волн $|\omega_m|>2\omega_0$, отвечающих эллиптическому типу уравнения (2.5), и спектра внутренних волн в гиперболическом случае $|\omega_m|<2\omega_0$. Внутренние волны характерны для вращающейся жидкости в полностью заполненном сосуде. Поверхностные волны родственны колебаниям жидкости в частично заполненном неподвижном сосуде. При $\omega_0\to0$ частоты колебаний поверхностных волн переходят в соответствующие частоты потенциальных колебаний невращающейся жидкости.

3. Вариационный подход. Ниже будет приведена процедура вычисления частот колебаний поверхностных волн в идеальной жидкости, вращающейся в цилиндрическом сосуде. Как показано в [1—3], такая задача равносильна вариационной задаче о нахождении стационарных точек квадратичного функционала

$$F[\varphi]=D_m(\varphi,\varphi)-2m\frac{\omega_0}{\omega_m}\int\limits_{\Gamma_\theta\cup\Sigma_\theta}\varphi^2\cos(\mathbf{n},r)\,ds-(\omega_m{}^2-4\omega_0{}^2)\int\limits_0 \varphi(B_m{}^{-1}\varphi)\,r\,ds \tag{3.1}$$

$$D_m(\varphi,\varphi)\equiv\int\limits_{\Omega_\theta}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2+\frac{m^2}{r^2}\varphi^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]r\,dr\,dz \qquad \left(\int\limits_0^{s_0}\varphi r\,ds=0 \text{ при } m=0\right)$$

Здесь $r=r(s)$, $z=z(s)$ — уравнение кривой Γ_θ в параметрической форме, $0\leqslant s\leqslant s_0$, s — длина дуги, отсчитываемой от оси вращения вдоль Γ_θ.

Под $B_m{}^{-1}$ в (3.1) понимается одномерный интегральный оператор

$$(B_m{}^{-1}u)(s)=\int\limits_0^{s_0}G_m(s,t)\,u(t)\,r(t)\,dt$$

Его ядро $G_m(s,t)$ является функцией Грина следующей задачи:

$$-B_m u\equiv L_m u=u''+\frac{r'}{r}u'+\left[-\frac{m^2}{r^2}+\frac{z'^2}{r}+(r''z'-z''r')^2-\omega_0{}^2rz'\right]u=f(s),$$

$$0\leqslant s\leqslant s_0,\quad m=\pm1,\pm2,\ldots$$

$$-B_0u=L_0u-\int\limits_0^{s_0}(L_0u)\,r\,ds\left[\int\limits_0^{s_0}r(s)\,ds\right]^{-1}=f(s),\int\limits_0^{s_0}ur\,ds=0\quad(m=0)$$

$$|u(0)|<\infty,\quad (u'+\chi u)_{s=s_0}=0,\quad \chi(s_0)=-\left[\frac{1}{2}\omega_0{}^2+c-z'(s_0)\right]\frac{z'(s_0)}{r'(s_0)}$$

Здесь c — параметр семейства равновесных кривых [1], $x'=dx/ds$.

Варьирование в (3.1) следует проводить в классе функций с ограниченным интегралом Дирихле $D_m(\varphi,\varphi)$ и дополнительным интегральным соотношением для осесимметричных колебаний

$$D_m(\varphi,\varphi)<\infty,\qquad \int\limits_0^{s_0}\varphi r\,ds=0\quad(m=0)$$

Для реализации вариационной задачи (3.1) можно применить метод Ритца. При этом весьма важным обстоятельством является тот факт, что координатные функции $\psi_k(r,z)$, $k=1,2,\ldots$ могут не удовлетворять краевым условиям (2.5), так как эти условия являются естественными в данной задаче.

4. Выбор системы координатных функций. Если угол смачивания $\delta=\pi/2$, а $\omega_0\ll1$, то равновесная поверхность Γ близка к плоскости $z=0$. Считая приближенно, что Γ совпадает с этой плоскостью и рассматривая на ней граничные условия, приходим из (2.5) к вспомогательной задаче, которая допускает разделение переменных (для тяжелой жидкости аналогичная задача рассмотрена в [9])

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)-\frac{m^2}{r^2}\varphi+\left(1-\frac{4\omega_0{}^2}{\omega_m{}^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0\quad(0\leqslant r\leqslant1;\ -H\leqslant z\leqslant0),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}-2m\frac{\omega_0}{\omega_m}\varphi=0\quad(r=1),\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=0\quad(z=-H)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\omega_m{}^2\varphi\quad(z=0)$$

Ее решения имеют вид:

$$
\begin{gathered}
\varphi_{mp}(r, z)=J_{|m|}(\nu_{mp}r)\{\exp(k_{mp}z)+\exp[-k_{mp}(z+2H)]\} \\
k_{mp}=\nu_{mp}(1-4\omega_0^2\omega_{mp}^{-2}), \quad H=V/\pi, \quad m=0, \pm1, \ldots; \quad p=1, 2, \ldots
\end{gathered} \tag{4.1}
$$

Здесь $J(x)$ — функция Бесселя первого рода, V — объем жидкости. Числа ν_{mp} и ω_{mp} являются решениями следующей системы уравнений:

$$
\begin{gathered}
J_{|m|-1}(\nu)-J_{|m|+1}(\nu)-4m\omega_0(\nu\omega)^{-1}J_{|m|}(\nu)=0 \\
\omega^2-\nu\omega(\omega^2-4\omega_0^2)^{-1/2}\,\mathrm{th}\,[\nu\omega H(\omega^2-4\omega_0^2)^{-1/2}]=0; \quad m=0, \pm1, \ldots
\end{gathered} \tag{4.2}
$$

Систему (4.2) можно решить приближенно при $\nu H\geqslant 2$, опираясь на свойства: $\omega^2(\omega^2-4\omega_0^2)^{-1}\geqslant 1$; $0{,}97<\mathrm{th}\,x\leqslant 1$ $(x\geqslant 2)$. В этом случае во второй формуле (4.2) гиперболический тангенс можно приближенно заменить единицей и задача (4.2) приводится к отысканию корней $\nu=\nu_{mp}$ $(p=1, 2, \ldots)$ уравнения:

$$
J_{|m|-1}(\nu)-J_{|m|+1}(\nu)-4m\omega_0\nu^{-1}(\nu^3+2\omega_0^2)^{-1/2}J_{|m|}(\nu)=0
$$

При меньших νH решения последнего уравнения можно использовать в качестве нулевого приближения для решения системы (4.2) методом Ньютона — Канторовича.

Выберем в качестве координатных функций в методе Ритца для задачи (2.5) функции (4.1), где вместо H выбрано значение

$$
h=H-z(s_0)+\int_0^{s_0}[r(s)]^2z'(s)\,ds
$$

(фиг. 1). Как ясно из предыдущего, эти функции для заданного ω_0 и соответствующих значений $\omega_{mp}=\omega_{mp}(\omega_0)$ удовлетворяют в области Ω уравнению (2.5) и граничным условиям на твердой стенке Σ. Произведем далее ортонормировку функций (4.1) в энергетическом пространстве «главного» оператора задачи (3.1). Тогда получим новую систему координатных функций $\{f_{mp}\}$, которая будет удовлетворять условиям $D_m(f_{mp}, f_{mk})=\delta_{pk}$. Можно ожидать в этом случае устойчивую сходимость метода Ритца [11].

5. Реализация метода Ритца. Приближенное решение вариационной задачи (3.1) будем искать в виде

$$
\varphi(r, z)=\sum_{k=1}^{M}a_k[f_k(r, z)-d_k], \quad d_k=\int_0^{s_0}f_k(r, z)r(s)\,ds\left(\int_0^{s_0}r(s)\,ds\right)^{-1} \tag{5.1}
$$

Здесь M — число координатных функций; a_k — неизвестные постоянные; числа d_k отличны от нуля только при $m=0$ и определяются из условия ортогональности функции $\varphi(r, z)$ к единице в пространстве $L_2(\Gamma)$, что является следствием условия постоянства объема жидкости.

Система Ритца для функционала (3.1) имеет вид

$$
\sum_{i=1}^{M}\left[\delta_{ik}-2m\frac{\omega_0}{\omega_m}(\alpha_{ik}+\beta_{ik})-4\frac{\omega_0^2}{\omega_m^2}\gamma_{ik}-(\omega_m^2-4\omega_0^2)t_{ik}\right]a_i=0 \tag{5.2}
$$

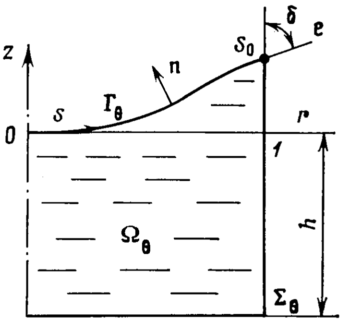
$$
k=1, 2, \ldots M
$$

$$
\alpha_{ik}=\int_0 f_if_k\cos(\mathbf{n}, r)\,ds, \quad \beta_{ik}=\int_{-h}^{z(s_0)}f_if_k\cos(\mathbf{n}, r)\,dz
$$

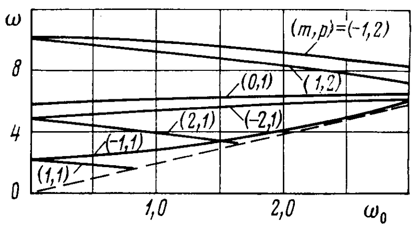
$$
\gamma_{ik}=\int_{\Omega_0}\frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{\partial f_k}{\partial z}r\,dr\,dz, \qquad t_{ik}=\int_0(B_m^{-1}f_k)f_ir\,ds
$$

Из условия равенства нулю определителя данной системы находим приближенно собственные частоты ω_{mi} ($i=1, 2, \ldots$) задачи (2.5). Подставляя значения $\omega_{m1}, \omega_{m2}, \ldots$ в систему (5.2), получим коэффициенты Ритца a_k, а затем по формуле (5.1) и собственную функцию $\varphi(r, z)$.

Для практического вычисления коэффициентов уравнения (5.2) необходимо знать уравнение равновесной поверхности Г, величину угла смачивания δ и глубину жидкости h. Если в качестве криволинейной системы координат на поверхности Г выберем цилиндрическую координату θ и длину дуги s, то уравнение кривой Γ_θ является решением следующей задачи Коши [1]:



Фиг. 1



Фиг. 2

$$r''=-z'(-pr^2+c-z'/r), \quad z''=r'(-pr^2+c-z'/r) \tag{5.3}$$
$$r(0)=z(0)=z'(0)=0, \quad r'(0)=1$$

Здесь $p=\omega_0^2/2$ и c — параметры, которые нужно выбрать так, чтобы в точке $s=s_0$ было $z'(s_0)=\cos\delta$. Для этой цели осуществим в (5.3) преобразование подобия по формулам

$$r_*=rp^{1/3}, \quad z_*=zp^{1/3}, \quad s_*=sp^{1/3}, \quad c_*=cp^{-1/3} \tag{5.4}$$

Тогда в новых переменных задача (5.3) сохранит свой вид, однако на месте параметра p будет стоять единица и останется, таким образом, один параметр c_*. Будем интегрировать преобразованную систему при каком-либо $c_*>0$ до тех пор, пока при некотором $s_*=(s_*)_0$ не выполнится условие $z_*'[(s_*)_0]=\cos\delta$. Учитывая, что $r(s_0)=1$, из первой формулы в (5.4) найдем c, s_0 и $z(s_0)$. Зная эти параметры, можно теперь решить задачу (5.3) и вычислить коэффициенты α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} в (5.2). Переходя к вычислению коэффициентов t_{ik}, заметим, что ядро $G_m(s, t)$ можно выразить через два линейно-независимых решения $u_{m1}(s)$ и $u_{m2}(s)$ уравнения $B_m u=0$. Стандартным путем выясняется, что это уравнение имеет решения, которые при $s\to 0$ обладают свойствами

$$u_{m1}(s)\sim s^m, \quad u_{m2}(s)\sim s^{-m} \quad (m\geqslant 1)$$
$$u_{01}(s)\sim 1, \quad u_{02}(s)\sim \ln(s) \quad (m=0)$$

Разложения этих решений можно найти по методу неопределенных коэффициентов, учитывая разложения функций $r(s)$ и $z(s)$. Например, в случае $m=1$ получаем

$$u_{11}(s)=s-{}^1/_{24}c^2s^3+({}^1/_{1920}c^4+{}^1/_{80}\omega_0^2c)s^5+O(s^7)$$
$$u_{12}(s)=s^{-1}-{}^1/_4c^2s\ln(s)+{}^1/_{96}c^4s^3\ln(s)+o(s^3)$$

Этими формулами можно пользоваться при малых s, а затем перейти на совместное интегрирование уравнения $B_m u=0$ и уравнений (5.3).

Для функции Грина $G_m(s, t)$ нетрудно получить формулу

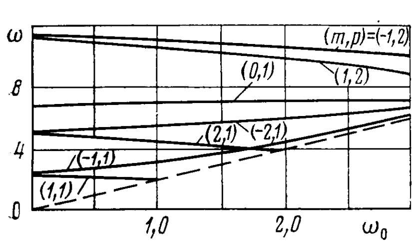
$$G_m(s,t)=\begin{cases} {}^1/_2 m^{-1}[u_{m2}(s)u_{m1}(t)-\beta u_{m1}(s)u_{m1}(t)], & t\leqslant s\leqslant s_0 \\ {}^1/_2 m^{-1}[u_{m1}(s)u_{m2}(t)-\beta u_{m1}(s)u_{m1}(t)], & s\leqslant t\leqslant s_0 \quad m=1,2,\ldots \end{cases}$$

$$G_0(s,t)=\begin{cases} -u_{02}(s)r'(t)+w_1(s,t), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant s_0 \\ -r'(s)u_{02}(t)+w_1(s,t), & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant s_0, \quad m=0 \end{cases}$$

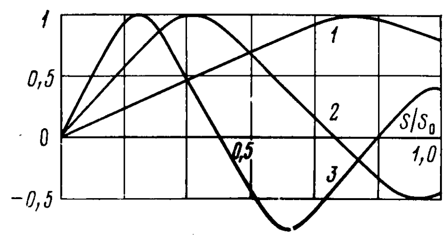
$$w_1(s,t)=w_1(t,s)=2r'(t)F(s)+2r'(s)F(t)-4r'(s)r'(t)\int_0^{s_0} u_{02}r^2\,ds$$

$$F(s)=r'(s)\int_s^{s_0} u_{02}(t)r(t)\,dt+\frac{1}{2}r^2(s)u_{02}(s), \quad \beta=\left.\frac{u_{m2}'+\chi u_{m2}}{u_{m1}'+\chi u_{m1}}\right|_{s=s_0}$$

6. Результаты вычислений. На ЭВМ М-220 были проведены вычисления частот колебаний поверхностных волн задачи (2.5) для $m=0, \pm1, \pm2$ при фиксированном объеме жидкости в цилиндре ($H=2$) и различных значениях параметра ω_0. Угол смачивания δ рассматривался равным 45,



Фиг. 3



Фиг. 4

60, 75, 90°. Число координатных функций M изменялось от 4 до 8. При вычислении коэффициентов системы (5.2) применялась формула Симпсона с 21 узлом. Сравнение результатов вычислений показало, что шести координатных функций достаточно для хорошей аппроксимации решения в широком диапазоне параметров задачи (примеры такого сравнения приведены в табл. 1, где $\delta=60°$).

Таблица 1

ω_0	$p=1$			$p=2$		
	$M=4$	5	6	4	5	6
0,127	2,450	2,449	2,449	10,95	10,03	9,804
0,620	2,520	2,518	2,518	10,89	9,055	8,284
0,857	2,904	2,903	2,902	10,74	7,764	7,156
1,414	3,094	3,093	3,092	10,67	6,892	6,421
1,933	4,018	4,016	4,015	10,02	6,123	5,383
2,705	5,462	5,459	5,458	9,650	6,524	6,020

Таблица 2

k	$p=1$	2	3	4	5	6
1	1,000	0,067	0,031	0,019	0,009	0,008
2	0,017	1,000	0,005	0,003	0,002	0,002
3	0,034	0,067	1,000	0,059	0,023	0,009

На фиг. 2 и 3 показаны зависимости $\omega_{mp}(\omega_0)$ при $\delta=45°$ (фиг. 2), $\delta=60°$ (фиг. 3) и различных значениях параметров m, p. Видно, что при $\omega_0>0$ происходит расщепление частот колебаний ω_{mp} для фиксированного $|m|$. При этом $\omega_{|m|p}<\omega_{-|m|p}$, т.е. частоты колебаний обратных волн ($m<0$) больше соответствующих частот колебаний прямых волн ($m>0$). Пунктиром на этих графиках показана прямая $\omega=2\omega_0$. При увеличении ω_0 частоты $\omega_{-11}(\omega_0)$ растут, оставаясь больше $2\omega_0$, а для $m>0$ частоты прямых волн убывают.

Насколько удачно сделан выбор координатных функций, видно из табл. 2 коэффициентов a_{pk} ($p=1$, 2, 3), построенной для случая $\delta=75°$, $\omega_0=0{,}857$, $M=6$, $m=1$. Эти коэффициенты быстро убывают с ростом k, причем главный вклад в каждую моду колебаний вносят координатные функции с тем же номером, что и номер p у ω_{mp}.

На фиг. 4 изображены формы собственных колебаний $\mathbf{v}_{mp}\cdot\mathbf{n}(s)$ для $m=1$, $\delta=60°$, $\omega_0=0{,}62$; цифрами обозначены значения p. Для других значений этих параметров характер собственных колебаний аналогичный.

Ниже приведены значения $L_1M_1^{-1}$ (см. (2.1)) при $p=1$ для $\delta=60°$:

ω_0	0,127	0,179	0,220	0,280	0,404	0,857
$L_1M_1^{-1}$	1,24	1,21	1,19	1,16	1,11	1,06

Автор благодарит Копачевского Н. Д. за помощь при написании статьи и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
2. *Копачевский Н. Д., Радякин Н. К.* О малых колебаниях идеальной капиллярной жидкости, вращающейся в осесимметричном сосуде.– В кн.: Вопросы вычисл. математики и техники. Киев: Наукова думка, 1976. с. 3–25.
3. *Копачевский Н. Д.* Применение метода С. Л. Соболева в задаче о колебаниях идеальной капиллярной вращающейся жидкости.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 2, с. 426–439.
4. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.– Усп. мат. н., 1957, т. 12, в. 5, с. 3–122.
5. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М., 1968. 232 с.
6. *Радякин Н. К.* Об определении частот колебаний маловязкой жидкости, вращающейся в осесимметричном сосуде.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 2, с. 128–133.
7. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики.– Изв. АН СССР. Сер. матем., 1964, т. 18, № 1, с. 3–50.
8. *Соболев С. Л.* О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью.– ЖЭТФ, 1960, № 3, с. 20–55.
9. *Дяченко М. П.* Колебания тяжелого симметричного волчка с полостью, частично заполненной жидкостью: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. Киев: Ин-т механики, 1972. 120 с.
10. *Копачевский Н. Д.* О существовании поверхностных волн в задаче о нормальных колебаниях идеальной жидкости, вращающейся в частично заполненном сосуде.– Функциональный анализ и его приложения, 1978, т. 12, вып. 2, с. 84–85.
11. *Копачевский Н. Д.* Малые движения и нормальные колебания системы тяжелых вязких вращающихся жидкостей. Харьков, 1978. 54 с. (Препр. физ.-техн. ин-т низк. температур № 33).
12. *Михлин С. Г.* Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с.

Харьков

Поступила в редакцию 18.III.1982