**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1983**

УДК 532.529

КОРРЕЛЯЦИЯ ПУЛЬСАЦИОННЫХ СКОРОСТЕЙ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ В СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

ГАВИН Л. Б., НАУМОВ В. А.

Система уравнений, описывающая струйные турбулентные двухфазные течения на основе теории взаимопроникающих континуумов, включает уравнение сохранения импульса дисперсной фазы [1, 2]. Это уравнение содержит корреляционный момент поля пульсационных скоростей дисперсной фазы, который представляется в [3] как произведение среднеквадратичных значений пульсационных составляющих скоростей частиц, найденных в рамках теории пути смешения. В работе [4] впервые для определения указанного корреляционного момента используется метод пространственно-временного осреднения. Однако использование в [4] сложного спектрального представления пространственно-временной корреляции скоростей среды, а также предположения о линейном законе аэродинамического сопротивления не позволяют применять полученные в [4] формулы для расчета турбулентных газовых струй с тяжелыми частицами.

В настоящей работе указанный корреляционный момент получен путем осреднения произведения пульсационных скоростей дисперсных частиц для закона межфазного взаимодействия, определяемого стандартной кривой сопротивления, с учетом осредненного скольжения составляющих фаз как в продольном, так и в поперечном направлениях. При этом эйлерова пространственно-временная корреляция скоростей среды вдоль траектории движения частицы аппроксимируется экспоненциальной зависимостью, предложенной в [5].

1. Рассматриваются двухфазные течения с малым объемным содержанием дисперсной фазы, так что столкновением частиц можно пренебречь. Уравнение движения сферической частицы имеет вид [6]:

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\mathbf{V}_p}{dt}=\frac{3}{4}\frac{c_f}{\delta}|\mathbf{V}_r|\mathbf{V}_r+\frac{1}{2}\frac{d\mathbf{V}_r}{dt}+\frac{d\mathbf{V}}{dt}+$$

$$+\frac{9}{\delta}\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int\limits_0^t\frac{d\mathbf{V}_r}{d\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}},\quad \mathbf{V}_r=\mathbf{V}-\mathbf{V}_p,\quad \lambda=\frac{\rho}{\rho_p} \tag{1.1}$$

Здесь δ — диаметр частицы, ρ — истинная плотность, $\mathbf{V}$ — мгновенная скорость, ν — коэффициент кинематической вязкости газа. Параметры несущей фазы без индекса, индекс «p» относится к параметрам дисперсной фазы. Первый член в правой части (1.1) учитывает силу сопротивления, второй — эффект присоединенной массы, третий — влияние градиента давления, четвертый — дополнительное сопротивление, обусловленное нестационарностью обтекания (сила Бассе). Коэффициент сопротивления сферической частицы в широком диапазоне чисел Рейнольдса можно представить [2] в виде:

$$c_f=24(1+b_1\sqrt{\mathrm{Re}^*}+b_2\,\mathrm{Re}^*)/\mathrm{Re}^* \tag{1.2}$$

$$\mathrm{Re}^*=\delta|\mathbf{V}_r|/\nu,\quad b_1=0{,}179,\quad b_2=0{,}013$$

Учитывая для общности слагаемые порядка λ и предполагая, что влияние силы Бассе в первом приближении может быть учтено соответствующим изменением коэффициента аэродинамического сопротивления

[5, 6], после подстановки (1.2) в (1.1) получим

$$\frac{d\mathbf{V}_p}{dt}=\beta\,(1+b_1\sqrt{\overset{*}{\mathrm{Re}}}+b_2\overset{*}{\mathrm{Re}})\mathbf{V}_r+\psi\,\frac{d\mathbf{V}}{dt} \tag{1.3}$$

$$\psi=1{,}5\rho/(\rho_p+0{,}5\rho),\qquad \beta=12\psi\nu/\delta^2$$

Представляя актуальную относительную скорость как сумму осредненного и пульсационного значений $\mathbf{V}_r=\langle\mathbf{V}_r\rangle+\mathbf{V}_r'$ и удерживая величины порядка малости не выше $o(|\mathbf{V}_r'|/|\langle\mathbf{V}_r\rangle|)$, получим

$$|\mathbf{V}_r|\simeq V_r(1+\langle\mathbf{V}_r\rangle\cdot\mathbf{V}_r'/V_r^2),\qquad V_r\equiv|\langle\mathbf{V}_r\rangle| \tag{1.4}$$

$$|\mathbf{V}_r|^{1/2}\simeq V_r^{1/2}(1+0{,}5\langle\mathbf{V}_r\rangle\cdot\mathbf{V}_r'/V_r^2)$$

Осредняя (1.3) и вычитая из уравнения для актуальных значений скорости, с учетом (1.4) будем иметь

$$\frac{d\mathbf{V}_p'}{dt}=\gamma\mathbf{V}_r'+\frac{\gamma_0}{V_r^2}[\,(\langle\mathbf{V}_r\rangle\cdot\mathbf{V}_r')\,\mathbf{V}_r-\langle(\langle\mathbf{V}_r\rangle\cdot\mathbf{V}_r')\,\mathbf{V}_r'\rangle\,]+\psi\frac{d\mathbf{V}'}{dt}$$

$$\gamma=\beta\,(1+b_1\,\mathrm{Re}^{1/2}+b_2\,\mathrm{Re});\qquad \gamma_0=\beta\,(0{,}5b_1\,\mathrm{Re}^{1/2}+b_2\,\mathrm{Re}),\qquad \mathrm{Re}=\delta V_r/\nu \tag{1.5}$$

С учетом симметрии течения относительно оси струи x, пренебрегая в (1.5) малыми слагаемыми, запишем проекцию уравнения на i-ю ось

$$\frac{dV_{pi}'}{dt}=\gamma_{ii}V_{ri}'+\gamma_{ij}V_{rj}'+\psi\frac{dV_i}{dt}\qquad (i,j=x,y;\ j\neq i) \tag{1.6}$$

$$\gamma_{ii}=\gamma+\gamma_0V_{ri}^2/V_r^2,\qquad \gamma_{ij}=\gamma_0V_{ri}V_{rj}/V_r^2,\qquad V_{ri}\equiv\langle\mathbf{V}_r\rangle_i$$

Запишем уравнение (1.6) в интегральной форме

$$V_{pi}'(t)=(V_{ri}'(0)-\psi V_i'(0))\exp(-\gamma_{ii}t)+\psi V_i'(t)+$$

$$+(1-\psi)\,\gamma_{ii}\int_0^t V_i'(\tau)E_i(\tau)\,d\tau+\gamma_{ij}\int_0^t V_{rj}(\tau)E_i(\tau)\,d\tau \tag{1.7}$$

$$E_i(\tau)=\exp\,(-\gamma_{ii}(t-\tau))$$

где $V_i'(\tau)$, $V_j'(\tau)$ — эйлеровы пульсационные скорости среды вдоль траектории частицы. Отметим, что в [5] подобное уравнение используется для частного случая $\psi=\gamma_{ij}=0$. В дальнейшем будем рассматривать большие t, когда влиянием начальных условий можно пренебречь.

2. Перемножив проекции пульсационной составляющей скорости частиц, определяемые по (1.7), для $i=x$, y, проведем осреднение по ансамблю частиц и по времени

$$\langle u_p'(t)\,v_p'(t)\rangle=\psi^2\langle u'(t)\,v'(t)\rangle+\sum_{k=1}^{8}I_k \tag{2.1}$$

$$I_1=\psi(1-\psi)\,\gamma_{xx}\int_0^t E_x(\tau)\,\langle u'(\tau)\,v'(t)\rangle d\tau$$

$$I_2=\psi(1-\psi)\,\gamma_{yy}\int_0^t E_y(\tau)\,\langle u'(t)\,v'(\tau)\rangle d\tau$$

$$I_3=(1-\psi)^2\gamma_{xx}\gamma_{yy}\int_0^t E_x(\tau)\,d\tau\int_0^t E_y(s)\,\langle u'(\tau)\,v'(s)\rangle ds$$

$$I_4=\psi\gamma_{xy}\int\limits_0^t E_y(\tau)\langle u_r'(\tau)u'(t)\rangle d\tau$$

$$I_5=\psi\gamma_{xy}\int\limits_0^t E_y(\tau)\langle u_r'(\tau)u'(t)\rangle d\tau$$

$$I_6=(1-\psi)\gamma_{xx}\gamma_{xy}\int\limits_0^t E_x(\tau)d\tau\int\limits_0^t E_y(s)\langle u_r'(s)u'(\tau)\rangle ds$$

$$I_7=(1-\psi)\gamma_{yy}\gamma_{xy}\int\limits_0^t E_x(\tau)d\tau\int\limits_0^t E_y(s)\langle v_r'(s)v'(\tau)\rangle ds$$

$$I_8=\gamma_{xy}^2\int\limits_0^t E_x(\tau)d\tau\int\limits_0^t E_y(s)\langle u_r'(s)v_r'(s)\rangle ds$$

Рассматривая задачу в предположении справедливости гипотезы о локальной однородности и изотропности турбулентности, эйлерову пространственно-временную корреляцию скоростей среды вдоль траектории частицы будем аппроксимировать, как и в [5], экспоненциальной зависимостью

$$R_{ij}(\tau)\equiv\langle V_i'(t)V_j'(t+\tau)\rangle/\langle V_i'(t)V_j'(t)\rangle=\exp(-\varphi_{ij}|\tau|) \qquad (2.2)$$

Тогда, сделав в интеграле I_1 замену переменной $s=t-\tau$, после интегрирования будем иметь

$$I_1=\psi(1-\psi)\gamma_{xx}z_x^{xy}\langle u'v'\rangle(1-\exp(-\varphi_{xy}t))$$

$$z_k^{ij}=\frac{1}{\varphi_{ij}+\gamma_{kk}}$$

Для достаточно больших t интегралы I_1, I_2 имеют вид

$$I_1=\psi(1-\psi)\gamma_{xx}z_x^{xy}\langle u'v'\rangle; \qquad I_2=\psi(1-\psi)\gamma_{yy}z_x^{xy}\langle u'v'\rangle \qquad (2.3)$$

На основании опытных данных при отсутствии поперечного осредненного скольжения фаз в [5] по свойствам пространственно-временных корреляций предлагается аппроксимировать $R_{xx}(\tau)$ зависимостью

$$R_{xx}(\tau)=R_*(\tau)R_0(r_1(\tau))R_0(|r_2(\tau)|) \qquad (2.4)$$

где R_*, R_0 — лагранжев временной и эйлеров пространственный коэффициенты корреляции скоростей несущей фазы; $r_1(\tau)=\langle r'^2(\tau)\rangle^{1/2}-\langle r_p'^2(\tau)\rangle^{1/2}$, $r_2(\tau)=\langle r(\tau)\rangle-\langle r_p(\tau)\rangle$ — пульсационное и осредненное скольжение фаз. Заметим, что представление (2.4) хорошо согласуется с физическим смыслом. При отсутствии осредненного скольжения $R_0(|r_2(\tau)|)=1$, и отличие $R_{xx}(\tau)$ от лагранжевой корреляции объясняется пульсационным скольжением фаз. Если и оно отсутствует, частицы полностью увлекаются средой и $R_{xx}(\tau)=R_*(\tau)$.

Если аппроксимировать R_* и R_0 экспоненциальными зависимостями, то

$$R_{xx}(\tau)=\exp\left[-\left(\frac{\tau}{T_*}+\frac{r_1(\tau)}{\Lambda_0}+\frac{|r_2(\tau)|}{\Lambda_0}\right)\right] \qquad r_2(\tau)=\langle u_r\rangle\tau \qquad (2.5)$$

где T_*, Λ_0 — лагранжев временной и эйлеров пространственный интегральные масштабы турбулентности. В [5] получено, что $r_1(\tau)$ пропорционально τ; учитывая, что в случае тяжелых частиц основную роль в правой части (2.5) под знаком экспоненты играет последнее слагаемое, два первых слагаемых, не зависящих от осредненного скольжения, обозначим через $a\tau$. Выражение для показателя экспоненты примет вид $\varphi_{xx}=a+$ $+\langle u_r\rangle/\Lambda_0$.

В качестве первого шага к определению показателей пространственно-временных корреляций φ_{ij} в общем случае, когда имеется существенное осредненное скольжение фаз как в продольном, так и в поперечном на-

y/r	$\langle u_r\rangle/u_z$	$10^2 e/u_z^2$	$10^3 K$	$10^3 K_p$	$10^3 K_p^*$
0	0,307	0,480	0	0	0
1,04	0,298	0,606	2,103	0,078	0,094
2,08	0,279	0,709	2,607	0,099	0,181
3,12	0,191	0,590	2,131	0,092	0,123
4,16	0,005	0,376	1,176	0,090	0,084
5,20	0	0,161	0,218	0,021	0,046
7,28	0	0,005	0	0	0

правлениях, можно предположить, что зависимость (2.4) остается справедливой. Тогда, используя результаты, полученные в [5] для частного случая $\langle v_r\rangle=0$, будем иметь

$$\varphi_{xx}=\frac{c_1\sqrt{e}+V_r}{\Lambda_0},\quad \varphi_{yy}=\frac{(c_1\sqrt{e}+V_r)^2}{(c_1\sqrt{e}+{}^1/_2V_r)\Lambda_0} \tag{2.6}$$

где c_1 — эмпирическая константа. Заметим, что для использования формул (2.6) необходимо решать уравнение переноса энергии турбулентных пульсаций газа e с учетом влияния частиц. Интегральный эйлеров масштаб будем считать пропорциональным макромасштабу $\Lambda_0=c_2\Lambda$.

Замена переменной в I_3 и устремление $t\to\infty$ приводит к выражению

$$I_3=(1-\psi)^2\gamma_{xx}\gamma_{yy}\int\limits_0^\infty \exp(-\gamma_{xx}\tau)\,d\tau\int\limits_{-\infty}^\infty \exp(-\gamma_{yy}(\tau-s))\langle u'(t)v'(t+s)\rangle ds \tag{2.7}$$

Отметим, что выражение, аналогичное (2.7), получено в [4] для линейного закона аэродинамического сопротивления ($\psi=0$, $\gamma_{xx}=\gamma_{yy}=\gamma$). Выполняя интегрирование в (2.7) с учетом (2.2), получим

$$I_3=(1-\psi)^2\gamma_{xx}\gamma_{yy}(z_x^{xy}+z_y^{xy})\langle u'v'\rangle/g,\qquad g=\gamma_{xx}+\gamma_{yy} \tag{2.8}$$

При нахождении оставшихся интегралов необходимо учесть, что $\varphi_{ij}\gg$ $\gg\gamma_{ij}$ при любых i, j. Тогда отбрасывая члены порядка малости выше $o(\gamma_{ij}/\varphi_{ij})$, будем иметь

$$\begin{gathered} I_4=\psi\gamma_{xy}z_x^{yy}\langle v'^2\rangle,\qquad I_5=\psi\gamma_{xy}z_y^{xx}\langle u'^2\rangle \\ I_6=(1-\psi)\gamma_{xx}\gamma_{xy}(z_x^{xx}+z_y^{xx})\langle u'^2\rangle/g \\ I_7=(1-\psi)\gamma_{yy}\gamma_{xy}(z_x^{yy}+z_y^{yy})\langle v'^2\rangle/g \\ I_8=\gamma_{xy}^2(z_x^{xy}+z_y^{xy})\langle u'v'\rangle/g \end{gathered} \tag{2.9}$$

Таким образом, формулы (2.1), (2.3), (2.8), (2.9) определяют корреляционный момент $\langle u_p'v_p'\rangle$.

3. При $\rho\ll\rho_p$, $\psi\to0$ выражение (2.1) упростится

$$\begin{gathered}\langle u_p'v_p'\rangle=\langle u'v'\rangle(\gamma_{xx}\gamma_{yy}+\gamma_{xy}^2)(z_x^{xy}+z_y^{xy})/g+ \\ +\gamma_{xy}[\gamma_{xx}(g+2\varphi_{xx})\langle u'^2\rangle z_y^{xx}z_x^{xx}+\gamma_{yy}(g+2\varphi_{yy})z_y^{yy}z_x^{yy}\langle v'^2\rangle]/g\end{gathered} \tag{3.1}$$

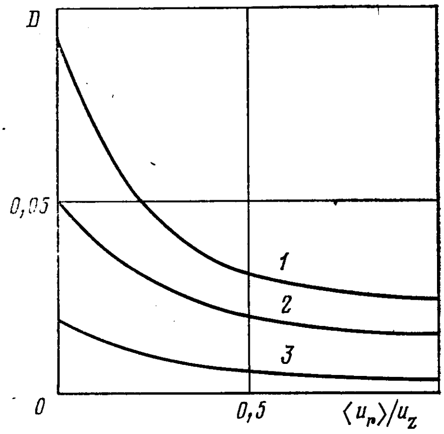
Если отсутствует осредненное скольжение поперек струи ($\langle v\rangle=\langle v_p\rangle$, $\gamma_{xy}=0$), то (3.1) принимает вид

$$\langle u_p'v_p'\rangle=\langle u'v'\rangle\gamma_{xx}\gamma_{yy}(z_x^{xy}+z_y^{xy})/g \qquad (3.2)$$

При равенстве осредненных скоростей фаз и в поперечном направлении (3.2) сводится к виду

$$\langle u_p'v_p'\rangle=\langle u'v'\rangle\gamma/(a+\gamma) \qquad (3.3)$$

Очень мелкие частицы полностью увлекаются средой в среднем и пульсационном движении, тогда, как видно из (2.5), $a\to 1/T_*$; при этом γ неограниченно возрастает, и из (3.3) следует $\langle u_p'v_p'\rangle=\langle u'v'\rangle$. Для очень тяжелых и крупных частиц γ_{ii}, $\gamma_{ij}\to 0$, пространственно-временные корреляции $R_{ij}(\tau)$ становятся менее персистентными, значит φ_{ij} возрастают для всех i, j; тогда из (3.1) следует $\langle u_p'v_p'\rangle\to 0$.



На фигуре представлены полученные по (3.2) зависимости отношения $D=\langle u_p'v_p'\rangle/\langle u'v'\rangle$ при $\langle v_r\rangle=0$ от разности осредненных продольных скоростей фаз и размера частиц. В соответствии с [7] скорость газа на оси струи на срезе сопла $u_z=35$ м/с; радиус сопла $r=0{,}015$ м; $\rho_p/\rho=7345$. Расчет проведен при $e/u_z^2=0{,}0016$; $\Lambda_0/r=0{,}4$.

На фигуре обозначения соответствуют следующим размерам частиц: *1* – $\delta=45\cdot10^{-6}$ м; *2* – $\delta=60\cdot10^{-6}$ м; *3* – $\delta=100\cdot10^{-6}$ м. Видно, что с увеличением продольного осредненного скольжения фаз величина D существенно снижается, уменьшение размера частиц ведет к возрастанию D.

Для расчета корреляционного момента поля пульсационных скоростей газа использовалась общепринятая гипотеза $\Lambda=c_3y_u$; $\langle u'v'\rangle=-\Lambda\sqrt{e}\partial\langle u\rangle/\partial y$, где y_u – ордината, при которой продольная скорость газа достигает половины осевого значения. При этом в отличие от работ [1–3] решалось уравнение переноса энергии турбулентных пульсаций с учетом влияния дисперсной фазы. Ниже приведены результаты расчета корреляционных моментов $K=\langle u'v'\rangle/u_z^2$; $K_p=\langle u_p'v_p'\rangle/u_z^2$ для сечения струи $x/r=40$ при условиях истечения [7], $\delta=45\cdot10^{-6}$ м и начальном расходе частиц $\varkappa_z=1$; K_p^* получен по теории [3].

Из таблицы видно, что величины K_p и K_p^* близки. Отметим, что расчет $\langle u_p'v_p'\rangle$ по формуле (3.2) требует значительно меньших вычислений, чем по методу [3].

Таким образом, предложенный метод определения корреляционного момента поля пульсационных скоростей дисперсной фазы может быть успешно использован при расчетах двухфазных турбулентных струй.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зуев Ю. В., Лепешинский И. А.* Математическая модель двухфазной турбулентной струи.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 6, с. 69–77.
2. *Картушинский А., Фришман Ф.* Численный расчет двухфазной турбулентной затопленной струи.– Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1980, т. 29, № 4, с. 423–426.
3. *Абрамович Г. Н., Гиршович Т. А.* Турбулентные струи, несущие твердые или капельно-жидкие примеси.– В кн.: Парожидкостные потоки. Минск: Изд. Ин-та тепло- и массообмена АН БССР, 1977, с. 155–175.
4. *Pismen L. M., Nir A.* On the motion of suspended particles in stationary homogeneous turbulence.– J. Fluid Mech., 1978, v. 84, № 1, p. 193–206.
5. *Шрайбер А. А., Милютин В. Н., Яценко В. П.* Гидромеханика двухкомпонентных потоков с твердым полидисперсным веществом. Киев: Наук. думка, 1980. 252 с.
6. *Komasawa L., Kuboi R., Otake T.* Fluid and particle motion in turbulent dispersion. Pt 2. Influence of turbulence of liquid on the motion of suspended particles.– Chem. Engng. Sci., 1974, v. 29, № 3, p. 651–657.
7. *Гиршович Т. А., Картушинский А. И., Лаатс М. К., Леонов В. А., Мульги А. С.* Экспериментальное исследование турбулентной струи, несущей тяжелые примеси.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 5, с. 26–31.

Калининград

Поступила в редакцию
27.X.1981