МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1983

УДК 532.527

ДИНАМИКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ВИХРЯ

ПЕРЕПЕЛКИН В. В., ПЕТРОВ А. Г.

Рассматривается двумерное течение идеальной несжимаемой жидкости. Внутри эллипса течение имеет постоянную завихренность, а вне его – потенциальное течение с циркуляцией. Такое движение описывается уравнениями Лагранжа для динамической системы с бесконечным числом степеней свободы. Для системы с четырьмя степенями свободы получено и исследовано на устойчивость новое стационарное решение.

1. Введение. Плоскую задачу о движении вихря постоянной интенсивности, равномерно распределенного в некоторой односвязной области безграничной идеальной несжимаемой жидкости, рассматривал еще В. Дж. М. Рэнкин, Г. Кирхгоф, С. А. Чаплыгин и др.

В. Дж. М. Рэнкин нашел простейшее точное решение – круговой вихрь [1,2] Г. Кирхгоф получил точное решение задачи о равномерном вращении эллиптического вихря в покоящейся на бесконечности жидкости [3]. А. Е. Лав [4] рассматривал задачу устойчивости этого решения путем линеаризации уравнений возмущенного движения. Было показано, что при отношении длин осей эллипса $\chi>3$ движение неустойчиво по отношению к третьей моде возмущения эллиптической границы. С. А. Чаплыгин применительно к проблеме речных водоворотов нашел более общее решение о вращении и пульсации эллиптического вихря в сдвиговом потоке [5]. В работе [6] были найдены точные стационарные движения эллиптического вихря в линейном по координатам потоке. (Эти решения легко могут быть получены из результата, найденного С. А. Чаплыгиным.) Была исследована устойчивость этих движений. В работе этих авторов [7] результаты [6] применялись для выяснения структуры турбулентного потока.

В настоящее время в связи с интенсивным исследованием Мирового океана большое внимание уделяется такому крупномасштабному явлению, как ринги Гольфстрима [8]. Для изучения этого явления была предложена гидродинамическая модель ринга, как распределенного в некоторой области вихря постоянной интенсивности [9]. Задача сводилась к решению системы бесконечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений, и был предложен приближенный метод ее решения.

В [9] изучались динамические уравнения системы с двумя степенями свободы, определяющие вращение и деформацию эллипса с неподвижным центром. Частным случаем получалось решение Кирхгофа.

Ниже изучаются более общие динамические уравнения, учитывающие и перемещение центра эллипса. Получена новая однопараметрическая серия стационарных движений эллиптического вихря. Эллипс вращается вокруг собственного центра как твердое тело с постоянной угловой скоростью, а центр эллипса вращается по круговой орбите с той же угловой скоростью. Причем бóльшая ось эллипса направлена к центру круговой орбиты. Для этой серии условие непрерывности давления на границе эллипса выполняется приближенно. Погрешность характеризуется максимальным отклонением от нуля безразмерной невязки давления, которая оказывается достаточно малой в области устойчивых стационарных движений.

2. Постановка задачи. Рассматривается следующее двумерное движение идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ [9].

В некоторой односвязной области Ω^- (фиг. 1), ограниченной контуром $\partial\Omega$, поле скоростей имеет постоянный вихрь $\omega={}^1/_2\operatorname{rot} v$. Во внешней же области Ω^+ течение является потенциальным. Нормальная компонента скорости на границе $\partial\Omega$ непрерывна и равна скорости перемещения контура по нормали. Циркуляция скорости Γ предполагается непрерывной при переходе через контур $\partial\Omega$ и, следовательно, равной $2\pi a^2\omega$, где πa^2 – неизменная при движении площадь области Ω^-.

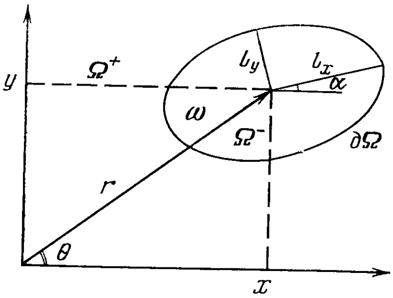
На давление накладывается условие непрерывности на контуре

$$p^+-p^-|_{\partial\Omega}=0 \tag{2.1}$$

Задача определения движения такой жидкой системы в приближении эллиптического вихря сведена к решению динамических уравнений Лагранжа [9]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,\qquad i=1,\dots,4 \tag{2.2}$$

Если в качестве обобщенных координат эллипса q_i взять безразмерные координаты x, y центра эллипса, угол наклона α полуоси длиной l_x к оси x и величину A, определяющую деформацию эллипса: $A=(\chi-1)/(2\sqrt{\chi})$, $\chi=l_x/l_y$, то функцию Лагранжа L, вычисленную в [9], можно представить в следующем безразмерном виде:



Фиг. 1

$$L=T-\operatorname{Im}(\bar{z}\dot{z})+{}^1/_2A^2+L_\alpha \tag{2.3}$$

$$T=(1+A^2)\,|\dot{z}|^2-A\sqrt{1+A^2}\operatorname{Re}(\dot{z}^2e^{-2i\alpha})$$

$$L_\alpha=f_0+f_1\dot{\alpha}+f_2\dot{\alpha}^2$$

$$f_0=\frac{1}{2}\ln(1+A^2)-\frac{1}{4(1+2A^2)}$$

$$f_1=\frac{1}{2(1+2A^2)}-2A^2,$$

$$f_2=\frac{2A^2(1+A^2)^2}{1+2A^2}$$

$$z=x+iy,\quad \bar{z}=x-iy$$

где безразмерные координаты x, y и время t выражаются через соответствующие размерные величины x', y', t' по формулам $x=x'/a$, $y=y'/a$, $t=\omega t'$.

Согласно [9], условие (2.1) заменяется при этом на пять условий ортогональности

$$\oint (p^+-p^-)\,w_i\,dl=0,\qquad i=0,1,2,3,4 \tag{2.4}$$

$$w_0=1,\ w_1=\sin\beta,\ w_2=\cos\beta,\ w_3=\sin 2\beta,\ w_4=\cos 2\beta$$

где $\beta\in[0,2\pi]$ — параметр, определяющий положение точки на границе эллипса $\partial\Omega$.

Безразмерная величина

$$\Delta p=(p^--p^+)/\rho\omega^2a^2 \tag{2.5}$$

характеризует погрешность приближенного решения.

3. Интегралы уравнений движения. Можно заметить по виду функции Лагранжа (2.3), что система (2.2) допускает четыре первых интеграла движения — законы сохранения обобщенного импульса, кинетического момента и энергии.

Закон сохранения импульса следует из того факта, что $\partial L/\partial\bar{z}$ является полным дифференциалом по времени

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{z}}=\frac{d}{dt}\left(i\frac{z}{2}\right)$$

Отсюда и из (2.2) получим закон сохранения импульса

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{z}}}-iz=I \tag{3.1}$$

Произведя дифференцирование функции T, определенной в (2.3), получим интеграл (3.1) в виде

$$(1+A^2)\dot{z}-A\sqrt{1+A^2}\,\dot{\bar{z}}e^{2i\alpha}=iz+I \tag{3.2}$$

Интеграл энергии существует в силу того, что функция Лагранжа L не зависит явно от времени

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\dot{z}+\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{z}}}\dot{\bar{z}}+\frac{\partial L}{\partial \dot{A}}\dot{A}+\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\dot{\alpha}-L=E \tag{3.3}$$

Учитывая (3.1) и то, что функция T однородна по $\dot{z}$ и $\dot{\bar{z}}$, уравнение (3.3) можно переписать в виде

$$\operatorname{Re}(I\dot{\bar{z}})+\operatorname{Im}(\dot{z}\bar{z})+{}^1/_2A^2+f_2\dot{\alpha}^2-f_0=E \tag{3.4}$$

Закон сохранения обобщенного кинетического момента следует из теоремы Э. Нётер [10], согласно которой он соответствует инвариантному преобразованию $z^*=ze^{i\gamma}$, $\alpha^*=\alpha+\gamma$, где γ – произвольное число, и имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}+i\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}z-i\frac{\partial L}{\partial\dot{\bar{z}}}\bar{z}=K$$

Учитывая (3.1), этот интеграл можно привести к следующей форме:

$$2\operatorname{Im}(I\bar{z})+2f_2\dot{\alpha}+f_1+|z|^2=K \tag{3.5}$$

4. Стационарные решения. Считая $I=0$ и переходя к полярным координатам r, θ (фиг. 1), уравнения (3.2), (3.4), (3.5) можно привести к виду

$$\dot{\theta}=1-\frac{A}{\sqrt{1+A^2}}\cos 2(\theta-\alpha),\qquad \frac{\dot{r}}{r}=-\frac{A}{\sqrt{1+A^2}}\sin 2(\theta-\alpha) \tag{4.1}$$

$$2f_2\dot{\alpha}+f_1+r^2=K$$

$$r^2\dot{\theta}+{}^1/_2A^2+f_2\dot{\alpha}^2-f_0=E \tag{4.2}$$

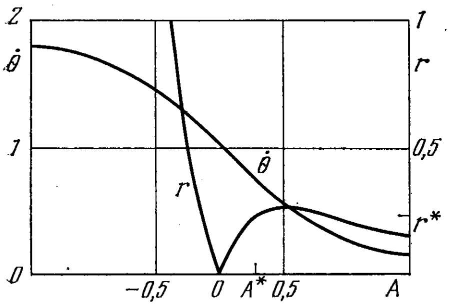
$$z=re^{i\theta},\qquad \dot{z}=(\dot{r}+ir\dot{\theta})e^{i\theta} \tag{4.3}$$

Из этих уравнений следует, что существует стационарное движение $\dot{r}=0$, $\dot{A}=0$ при $r=\text{const}\neq0$ и оно возможно только тогда, когда

$$\alpha=\theta,\quad \dot{\alpha}=\dot{\theta}=1-A/\sqrt{1+A^2} \tag{4.4}$$

Зависимость r от A можно получить из уравнения Лагранжа, соответствующего координате A, $\partial L/\partial A=0$. Выражение для L получается из (2.3) заменой (4.3)

$$L=r^2\dot{\theta}^2(1+A^2+A\sqrt{1+A^2})-r^2\dot{\theta}+L_\alpha \tag{4.5}$$



Фиг. 2

Тогда зависимость $r^2=r^2(A)$ будет иметь вид

$$r^2=-(1+A^2)^{3/2}(f_0'+f_1'\dot{\alpha}+f_2'\dot{\alpha}^2),$$

$$f_i'=\frac{df_i}{dA} \tag{4.6}$$

Графики $r(A)$ и $\dot{\theta}(A)$ представлены на фиг. 2.

В предположении, что центр эллиптического вихря неподвижен, в [9] были получены два других стационарных решения: $A=\text{const}$, $z=0$

$$\dot{\alpha}=1/(2+2A^2) \tag{4.7}$$

$$\dot{\alpha}=\frac{2+5A^2+4A^4}{2(1+A^2)(1+3A^2+4A^4)} \tag{4.8}$$

Решение (4.7) было найдено еще Кирхгофом, который показал, что при этом скорость и давление жидкости непрерывны на границе эллипса. Иначе говоря, в смысле выполнения условия (2.1) решение Кирхгофа является точным.

Стационарные же решения (4.8) и (4.4), (4.6) в этом смысле являются приближенными. Для невязки давления в этих случаях выполняются лишь условия (2.4).

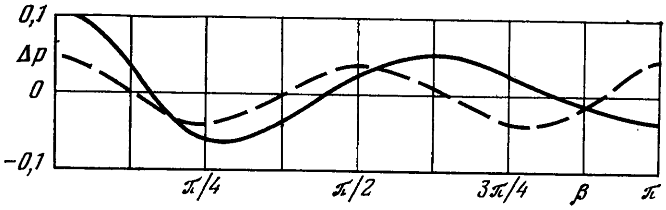
На фиг. 3 представлены характерные графики распределения безразмерной невязки давления (2.5), $\Delta p = \Delta p(\beta)$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$, при фиксированном значении $\chi = 1{,}5$. При $\beta \in [\pi, 2\pi]$ распределение значений Δp симметрично распределению Δp при $\beta \in [0, \pi]$ относительно прямой $\beta = \pi$.

На фиг. 4 даны графики зависимости величины $P = (\max\limits_{\beta} \Delta p - \min\limits_{\beta} \Delta p)/2$ от χ.

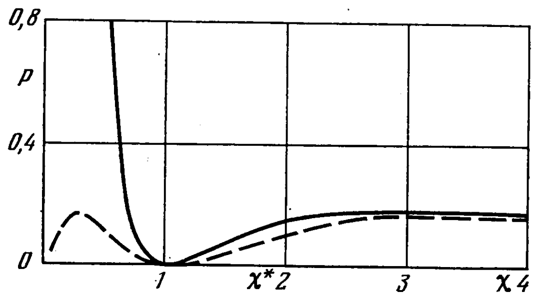
Штриховые линии на графиках соответствуют решению (4.8), сплошные — решению (4.4), (4.6).

Исследуя решение (4.4), (4.6), можно эффективно выделить две области $A<0$ $(\chi<1)$ и $A>0$ $(\chi>1)$. В случае $A=0$ $(\chi=1)$ решение тривиально — это неподвижный круговой вихрь Рэнкина.

По фиг. 4 можно заметить, что в случае $\chi<1$ $(A<0)$ величина P очень быстро уходит в бесконечность, для χ же, больших единицы $(A>0)$, эта



Фиг. 3



Фиг. 4

функция ограничена и не превышает 0,2. Следовательно, можно сделать вывод, что для $\chi<1$ решение (4.4), (4.6) даже приближенно не будет описывать действительное течение. Это решение будет иметь смысл только для $\chi \geqslant 1$.

5. Устойчивость движения. Будем называть движение системы устойчивым, если оно устойчиво по переменным r и A при постоянных значениях импульса и кинетического момента.

В связи с этим определением достаточно рассмотреть случай $I \equiv 0$, так как отличие от нуля обобщенного импульса I приводило бы к тому, что координаты центра вихря с течением времени уходили бы как угодно далеко от первоначального своего значения и, следовательно, движение было бы неустойчиво по r.

Следует также отметить, что рассматриваемая система не является диссипативной и, как следствие этого, говорить об асимптотической устойчивости не имеет смысла.

Интеграл энергии (4.2) позволяет исследовать стационарную точку A_0, r_0, $\dot{\alpha}_0$, определяемую уравнениями (4.4), (4.6) на устойчивость прямым методом Ляпунова [11]. Исключая из (4.2) переменные $\dot{\theta}$ и $\dot{\alpha}$, с помощью соотношений

$$\dot{\theta} = 1 - \sqrt{\frac{A^2}{1+A^2} - \frac{\dot{r}^2}{r^2}}, \qquad \dot{\alpha} = \frac{K - r^2 - f_1}{2f_2}$$

следующих из (4.1), получим

$$F(r,A,\dot r,\dot A)=E,\quad F=r^2\left(1-\sqrt{\frac{A^2}{1+A^2}-\frac{\dot r^2}{r^2}}\right)+\frac{\dot A^2}{2}+\frac{(K-r^2-f_1)^2}{4f_2}-f_0$$

Если в качестве функции Ляпунова взять функцию $V=F-E_0$, где E_0 — энергия в точке стационарного решения r_0, A_0, то $dV/dt=0$ и, следовательно, остается проверить положительность V в малой ε-окрестности решения. Для этого достаточно исследовать на положительность функцию V', получаемую из V разложением арифметического корня по степеням $\dot r$ и учетом лишь степеней не выше второй

$$V'={}^1/_2\dot r^2\sqrt{1+A^2}/|A|+{}^1/_2\dot A^2+U(A,\ r)-U(A_0,\ r_0)\tag{5.1}$$

$$U(A,r)=r^2\left(1-\frac{A}{\sqrt{1+A^2}}\right)+\frac{(K-r^2-f_1)^2}{4f_2}-f_0$$

Функция V' положительна в окрестности A_0, r_0 при

$$U_{AA}>0,\qquad U_{rr}>0,\qquad U_{AA}U_{rr}-(U_{Ar})^2>0\tag{5.2}$$

Производные берутся в точке решения A_0, r_0.

При выполнении условий (5.2) функция Ляпунова знакоположительна и, следовательно, по теореме Ляпунова [11], стационарное решение A_0, r_0 устойчиво.

В силу того что исследуется устойчивость по возмущениям, не изменяющим импульс I и момент K, можно было бы воспользоваться также теоремой Рауса [12] и в результате получить те же условия устойчивости (5.2).

Вычисления показывают, что условия (5.2) выполняются при

$$1\leqslant\chi<\chi^*,\qquad \chi^*\approx1{,}746,\qquad A^*\approx0{,}282\tag{5.3}$$

Отсюда и из (4.6) следует, что $0\leqslant r<0{,}233$. Однако из теоремы Ляпунова нельзя сделать вывод, что при остальных значениях деформации χ движение неустойчиво. Для выяснения этого вопроса можно исследовать решение на устойчивость по первому приближению [11], взяв в качестве уравнений движения уравнения (4.1) и уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot A}\right)-\frac{\partial L}{\partial A}=0\tag{5.4}$$

где L определена формулой (4.5).

Из уравнений (4.1) следуют линеаризованные уравнения

$$\delta\dot\theta=-\frac{\delta A}{(1+A_0{}^2)^{3/2}}\tag{5.5}$$

$$\frac{\delta\dot r}{r_0}=-\frac{2A_0(\delta\theta-\delta\alpha)}{\sqrt{1+A_0{}^2}}\tag{5.6}$$

$$\delta\dot\alpha=-\frac{r_0}{f_2}\delta r-\frac{(f_1{}'+2\dot\alpha_0f_2{}')\delta A}{2f_2}\tag{5.7}$$

Для дальнейшего удобно продифференцировать (5.6) по времени

$$\frac{\delta\ddot r}{r_0}=-\frac{2A_0(\delta\dot\theta-\delta\dot\alpha)}{\sqrt{1+A^2}}\tag{5.8}$$

Из (5.4) получим

$$\delta\ddot A=a_1\delta A+a_2\delta r+a_3\delta\theta+a_4\delta\dot\alpha\tag{5.9}$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 — коэффициенты, зависящие от A_0.

Учитывая (5.5) и (5.7), уравнения (5.8) и (5.9) представим в виде

$$\delta\ddot{A}+c_1\delta A+c_2\delta r=0,\qquad \delta\ddot{r}+b_1\delta A+b_2\delta r=0$$

Они составляют замкнутую систему уравнений. Коэффициенты c_1, c_2, b_1, b_2 зависят от A_0.

Решая соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^4+\lambda^2(c_1+b_2)+c_1b_2-b_1c_2=0$$

получим, что при $\chi<1$ и $\chi>1{,}746$ хотя бы для одного λ_i, $i=1, 2, 3, 4$, действительная часть $\operatorname{Re}\lambda_i>0$. Это означает, что решение неустойчиво в этой области. Действительные части λ_i для всех i в области (5.3), как и следовало ожидать в связи с отсутствием диссипации, оказываются равными нулю.

Значит, решение (4.4), (4.6) устойчиво только при χ, удовлетворяющем условию (5.3).

Решение Кирхгофа (4.7) устойчиво по координате A [9]. Используя функцию Ляпунова V, можно доказать устойчивость этого решения по совокупности переменных A и r. Действительно, в точке решения (4.7) после вычислений получим, что для любого A выполняются условия $U_{AA}>0$, $U_{rr}>0$, $U_{Ar}=0$.

Отсюда и следует устойчивость решения Кирхгофа по A и r.

В линейном приближении решение Кирхгофа устойчиво относительно произвольного возмущения границы эллипса при $\chi<3$ [4], при этом все корни характеристического уравнения оказались чисто мнимыми. Однако из устойчивости в линейном приближении, вообще говоря, нельзя сделать вывод об устойчивости нелинейной системы. Поэтому доказательство устойчивости решения Кирхгофа по отношению к переменным A и r, полученное на основе прямого метода Ляпунова, является новым существенным дополнением к результату [4].

Авторы благодарят Л. И. Седова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976. 573 с.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.– Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
3. *Кирхгоф Г.* Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.
4. *Love A. E.* On the stability of certain vortex motions.– Proc. Lond. Math. Soc. (1), 1894, v. 25, p. 18–32.
5. *Чаплыгин С. А.* О пульсирующем цилиндрическом вихре.– Собр. соч. Т. 3. Л.: Изд-во АН СССР, 1933, с. 264–275.
6. *Moore D. W., Saffman P. G.* Aircraft wake turbulence and its detection. N. Y.: Plenum Press, 1971. 339 p.
7. *Moore D. W., Saffman P. G.* The density of organized vortices in a turbulent mixing layer.– J. Fluid. Mech., 1975, v. 69, pt 3, p. 465–473.
8. *Монин А. С., Кошляков М. Н.* Синоптические вихри, или волны Россби, в океане. Эксперимент и основы теории.– В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука, 1979, с. 258–291.
9. *Петров А. Г.* О движении рингов Гольфстрима.– Океанология, 1980, т. 20, вып. 6, с. 965–973.
10. *Айзерман М. А.* Классическая механика. М.: Наука, 1980. 367 с.
11. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 207 с.
12. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М., 1967. 141 с. (АН СССР. Вычисл. центр. Матем. методы в динамике космич. аппаратов. Вып. 4).

Москва

Поступила в редакцию
2.III.1982