

УДК 532.526.4/5

## К АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ОТРЫВА

СЫЧЕВ ВИК. В.

Рассмотрено течение несжимаемой жидкости в вязком пристеночном подслое турбулентного пограничного слоя в окрестности точки отрыва. На основании асимптотического анализа уравнений Рейнольдса, без использования каких-либо гипотез их замыкания, показано, что при больших числах Рейнольдса имеет место известный «закон степени  $1/2$ » для профиля скорости, а в результате действия большого самоиндуцированного градиента давления отрыву предшествует появление возвратных токов в тонком вязком подслое.

Асимптотический анализ уравнений Навье – Стокса при больших числах Рейнольдса ( $R$ ) привел к решению ряда задач о взаимодействии и отрыве ламинарного пограничного слоя в течениях жидкости и газа. Некоторые результаты в этом направлении были получены также для турбулентных течений. В работах [1–4] (см. также обзор [5]) было рассмотрено явление взаимодействия слабого скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем, а в работе [6] – отрыв турбулентного пограничного слоя от гладкой поверхности твердого тела в потоке несжимаемой жидкости. Асимптотический анализ уравнений Рейнольдса при  $R \rightarrow \infty$ , проведенный в этих работах, показывает что действие турбулентных и вязких напряжений существенно лишь в тонких пристеночных слоях и не оказывает влияния на процесс взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком. Поэтому основные результаты здесь были получены без использования гипотез замыкания уравнений Рейнольдса.

Настоящая работа является развитием работы [6] и посвящена асимптотическому анализу течения в слоях непосредственно примыкающих к поверхности тела в окрестности точки отрыва потока.

1. Исходное предположение, положенное в основу асимптотического рассмотрения отрыва турбулентного пограничного слоя, состоит в следующем. Предельное состояние поля течения при  $R \rightarrow \infty$  в окрестности точки отрыва ищется в классе отрывных течений идеальной жидкости со свободными линиями тока. Градиент давления вдоль поверхности тела и кривизна свободной линии тока при этом определяются выражениями (см., например, [7])

$$\frac{dp}{dx} = k_0(-x)^{-1/2} + \frac{16}{3}k_0^2 + O[(-x)^{1/2}], \quad x \rightarrow -0 \quad (1.1)$$

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad x > 0; \quad \kappa = k_0 x^{-1/2} + \kappa_0 + O(x^{1/2}), \quad x \rightarrow +0$$

Значение положительной постоянной  $k_0$  при этом остается конечным, а не стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ , как это имеет место при ламинарном отрыве [8]. Иначе говоря, при турбулентном отрыве предельное состояние поля течения не удовлетворяет условию Бриллюэна – Вилля о конечности кривизны свободной линии тока в точке отрыва. Это предположение выражает принципиальное различие ламинарного и турбулентного пределов обтекания (при  $R \rightarrow \infty$ ). Оно находится в полном соответствии с многочисленными экспериментальными данными, согласно которым переход к турбулентному режиму сопровождается смещением положения точки отрыва вниз по потоку (фиг. 1).

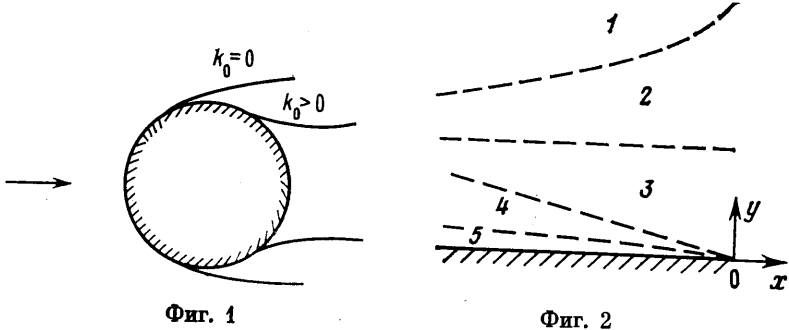
В (1.1) и всюду в дальнейшем  $x$  отсчитывается от точки отрыва  $x=0$  вдоль поверхности тела,  $\kappa_0$  — кривизна поверхности тела в точке отрыва. Используются безразмерные переменные: в качестве единицы измерения длины выбирается характерный размер тела  $L$ ; давление и компоненты вектора скорости отнесены соответственно к удвоенному скоростному напору  $\rho U_{00}^2$  и величине скорости  $U_{00}$  на свободной линии тока предельного потенциального течения;  $\rho$  — плотность среды.

Будем пользоваться уравнениями двумерного турбулентного пограничного слоя в форме

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dp}{dx} = \varepsilon \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + R^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.2)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Здесь  $p$ ,  $\psi$  и  $u$ ,  $v$  — соответственно осредненные безразмерные значения давления, функции тока и компонент вектора скорости вдоль осей  $x$ ,  $y$ ;



Фиг. 1

Фиг. 2

$y$  — координата, отсчитываемая по нормали к поверхности тела. Через  $\tau_{xy}$  будем обозначать безразмерное значение турбулентного напряжения Рейнольдса, отнесенного к  $\varepsilon \rho U_{00}^2$ ;  $\varepsilon$  — малый параметр, характеризующий относительную толщину турбулентного пограничного слоя, который есть величина порядка  $(\ln R)^{-1}$  [9, 10];  $R = U_{00}L/\nu \rightarrow \infty$ , где  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости.

Приведем теперь некоторые результаты работы [6], которые понадобятся в дальнейшем.

При приближении к точке отрыва, т. е. при  $x \rightarrow -0$ , из-за большого градиента давления (1.1) на внешней границе пограничного слоя (обл. I, фиг. 2) решение уравнений (1.2) ведет себя особым образом. В частности, толщина пограничного слоя увеличивается по логарифмическому закону. При этом равномерная пригодность разложений нарушается в области, где  $|x| = O(\varepsilon^{2/3})$ . Здесь определяющим становится взаимодействие течения в пограничном слое с внешним потенциальным потоком (обл. I, фиг. 3).

Вытесняющее действие пограничного слоя в области взаимодействия индуцирует большой локальный градиент давления ( $dp/dx = O(\varepsilon^{-1/3})$ ). Основной вклад в вытесняющее действие оказывает течение в нелинейной области III. Здесь, так же как и в основной части пограничного слоя (обл. II), действие турбулентных и тем более вязких напряжений в главных членах разложений отсутствует. Поэтому распределение давления в области взаимодействия находится из совместного рассмотрения решений в областях I—III и не требует привлечения каких-либо гипотез замыкания для исходных уравнений Рейнольдса.

Профиль осредненной скорости в областях 2 и 3 имеет форму профиля скорости в следе вблизи точки его разрушения [11]. Поэтому решение в этих областях представляет собой асимптотическое выражение эмпирического закона следа Коулза [12] вблизи точки отрыва.

Действие турбулентных напряжений в главных членах разложений при  $x \rightarrow -0$  впервые проявляется в области 4, где решение имеет вид

$$Y = \varepsilon^{-1}y, \quad \Psi = \varepsilon^{-1}\psi, \quad \Psi = (-x)^{5/4}F_0(\xi) + \dots$$

$$T_{xy} = \varepsilon\tau_{xy} = \varepsilon(-x)^{1/2}G_0(\xi) + \dots, \quad \xi = Y(-x)^{-1} \quad (1.3)$$

Подстановка этого разложения в (1.2), (1.1) дает

$$G_0' - \frac{5}{4} F_0 F_0'' + \frac{1}{4} F_0'^2 = k_0 \quad (1.4)$$

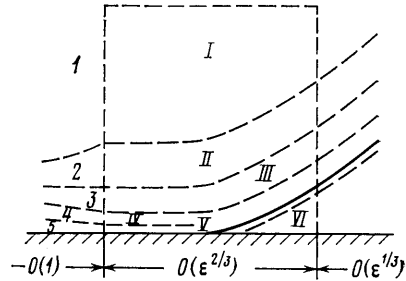
Из сращивания с решением в нелинейной области 3 следует, что при  $\xi \rightarrow \infty$

$$F_0(\xi) = 2k_0^{1/2} \xi + A_1 \xi^{1/2} + \dots, \quad G_0(\xi) = A_2 \xi^{1/2} + \dots, \quad A_2 = -9k_0^{1/2} A_1/4, \quad A_1 = \text{const} \quad (1.5)$$

Уравнение (1.4) не замкнуто. Для его замыкания необходимо воспользоваться какой-либо моделью турбулентности. Этот вопрос будет рассмотрен ниже в п. 4 данной работы.

При  $|x| = O(\varepsilon^{2/3})$  турбулентные напряжения становятся существенными в области IV, которая является продолжением области 4. Здесь решение, записанное в переменных подобия, есть

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon^{2/3} (2k_0 a_0)^{-1/3} x^*, & y - \varepsilon a_0^{-1} \Phi(x^*) H(x^*) &= \\ &= \varepsilon^{1/3} (2k_0)^{-1/3} a_0^{-1/3} Y^0, \\ \psi &= \varepsilon^{1/6} (2k_0)^{-1/6} a_0^{-1/6} \Psi^0(x^*, Y^0) + \dots \\ T_{xy} &= \varepsilon \tau_{xy} = \varepsilon^{4/3} \tau^0(x^*, Y^0) + \dots \\ p &= p_{00} + \varepsilon^{1/3} (2k_0)^{2/3} a_0^{-1/3} p_0^*(x^*, Y^0) + \dots, \\ & a_0 = \text{const} \end{aligned} \quad (1.6)$$



Фиг. 3

где  $p_{00}$  — безразмерное значение разности давлений на свободной линии тока (для предельного состояния) и в невозмущенном потоке,  $H(x^*)$  — функция Хэвисайда. Подставляя (1.6) в исходные уравнения Рейнольдса (или в (1.2)), получим

$$\frac{\partial \Psi^0}{\partial Y^0} \frac{\partial^2 \Psi^0}{\partial x^* \partial Y^0} - \frac{\partial \Psi^0}{\partial x^*} \frac{\partial^2 \Psi^0}{\partial Y^{02}} + \frac{dp^*}{dx^*} = \frac{\partial \tau^0}{\partial Y^0}, \quad p_0^*(x^*, Y^0) = p^*(x^*) \quad (1.7)$$

Выражения для функции давления  $p^*(x^*)$  и формы нулевой оторвавшейся линии тока  $\Phi(x^*)$ , как уже отмечалось, находятся из решения в областях I—III.

При  $x^* \rightarrow -\infty$  решение (1.6), (1.7) удовлетворяет условиям сращивания с (1.3), (1.4) для области 4. При  $x^* > 0$  область IV переходит в слой смешения, который отделяет оторвавшуюся часть пограничного слоя от области возвратного течения VI и который при  $x^* \rightarrow \infty$  описывается автомодельным решением Толлмина [13].

Заметим, что в отличие от настоящей работы в [6] решение для областей 4 и IV было представлено в переменных Мизеса.

2. Таким образом, из результатов работы [6] следует, что большой локальный градиент давления индуцируется вытесняющим действием течения в нелинейной области III. Поскольку поперечное изменение давления в пограничном слое в области взаимодействия в главном члене отсутствует, то для течения в чисто турбулентной области IV и в области, непосредственно примыкающей к поверхности тела, этот градиент является заданным.

Во всех описанных выше областях вязкие члены уравнений Рейнольдса являются внепорядковыми. В то же время ясно, что вблизи поверхности тела лежит подслой, в котором наряду с турбулентными напряжениями существенно действие сил вязкости.

Анализ течения в вязком подслое начнем с его рассмотрения перед областью взаимодействия, т. е. при  $x \rightarrow -0$  (обл. 5, фиг. 2, 3).

Поскольку самоиндуцированный градиент давления в окрестности точки отрыва велик, то его действие в вязком подслое будет существенным. (Невозможность реализации другого случая будет показана в конце п. 3 настоящей работы.) Вязкий подслей вблизи тела должен быть тонким и скорости в нем должны быть малы, так же как это имеет место в турбулентном пограничном слое при безотрывном режиме обтекания [9, 10].

Поэтому решение здесь (обл. 5) представим в виде

$$y = \Delta_0 y_0, u = \sigma_0 U_0(x, y_0) + \dots, T_{xy} = \varepsilon \tau_{xy} = \delta_0 T_0(x, y_0) + \dots, v = O(\sigma_0 \Delta_0) \quad (2.1)$$

где  $\Delta_0, \sigma_0, \delta_0$  — некоторые функции числа Рейнольдса, которые стремятся к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . (Разложение для функций  $U_0(x, y_0), T_0(x, y_0)$  при  $x \rightarrow -0$  будет получено ниже.)

Определяющими параметрами течения в вязком подслое являются градиенты давления  $dp_p/dx_p = \rho U_{00}^2 L^{-1} dp/dx$  (где  $dp/dx$  дается выражением (1.1)) и коэффициент вязкости  $\nu = U_{00} L R^{-1}$ . Поэтому единственной величиной с размерностью скорости будет  $(\nu \rho^{-1} dp_p/dx_p)^{1/2}$ . Индекс  $p$  означает, что берутся соответствующие размерные величины. Тогда для безразмерной скорости имеем

$$u = \frac{u_p}{U_{00}} \propto \left( \frac{\nu}{\rho} \frac{dp_p}{dx_p} \right)^{1/2} / U_{00} \propto R^{-1/2} \quad (2.2)$$

Из этого соотношения и выражения для скорости  $u$  (2.1) следует, что

$$\sigma_0 = R^{-1/2} \sigma_1(\varepsilon) \quad (2.3)$$

Присутствие в этом выражении  $\sigma_1(\varepsilon)$  следует из условия срачивания с решением в чисто турбулентной области 4.

Подставляя (2.1), (2.3) в (1.2), (1.1), исходя из баланса турбулентных и вязких напряжений с градиентом давления и производя интегрирование в полученном в результате уравнении, будем иметь

$$\delta_0 = \Delta_0, \quad \Delta_0 = \sigma_1^{1/2} R^{-1/2}, \quad \frac{\partial U_0}{\partial y_0} + T_0 = \frac{dp}{dx} y_0 + \tau_w \quad (2.4)$$

где  $\tau_w = \tau_w(x)$  — некоторая, пока произвольная функция. Из срачивания решений (1.3), (1.4) и (2.1), (2.3), (2.4) для областей 4 и 5 получим

$$F_0'(\xi) = d_0 \xi^{1/2} + \dots, \quad G_0(\xi) = k_0 \xi + \dots \quad (\xi \rightarrow 0) \quad (2.5)$$

$$U_0(x, y_0) = d_0 (-x)^{-1/2} y_0^{1/2} + \dots, \quad T_0(x, y_0) = k_0 (-x)^{-1/2} y_0 + \dots \quad (y_0 \rightarrow \infty)$$

$$\sigma_1 = \varepsilon^{-1/2}, \quad d_0 = \text{const}$$

Таким образом приходим к известному «закону степени  $1/2$ » для профиля скорости [14, 15]. (О последующих работах в этом направлении см. [16].) Из полученных выражений следует, что этот закон имеет место вблизи точки отрыва при  $R \rightarrow \infty$  и является универсальным в том смысле, что он получается из уравнений движения Рейнольдса без использования гипотез замыкания.

Аналогичное рассмотрение можно провести для вязкого подслоя в области взаимодействия при  $x^* < 0$  (обл. V, фиг. 3).

Исходя из тех же соображений, что и при анализе течения в области 5, представим решение в виде

$$y = \Delta_0^* y^*, \quad u = \sigma_0^* U_0^*(x^*, y^*) + \dots, \quad T_{xy} = \varepsilon \tau_{xy} = \delta_0^* T_0^*(x^*, y^*) + \dots, \quad v = O(\sigma_0^* \Delta_0^* \sigma^{-2/3}) \quad (2.6)$$

Разложение для давления имеет вид (1.6). Здесь функции  $\Delta_0^*, \sigma_0^*, \delta_0^*$ , как и раньше, стремятся к нулю при  $R \rightarrow \infty$ .

Анализ размерностей для течения в этой области приводит к соотношению (2.2), используя которое, на основании (2.6), (1.6) можем записать соотношение, аналогичное (2.3)

$$\sigma_0^* = \varepsilon^{-1/2} R^{-1/2} \sigma_1^*(\varepsilon) \quad (2.7)$$

Подставляя теперь разложение (2.6) вместе с (2.7) в уравнения Рейнольдса и исходя из баланса вязких и турбулентных напряжений с градиентом давления (1.6), (1.7), получим

$$\delta_0^* = \varepsilon^{-1/2} \Delta_0^*, \quad \Delta_0^* = \varepsilon^{1/2} \sigma_1^* R^{-1/2}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial U_0^*}{\partial y^*} + T_0^* = a_* \frac{dp^*}{dx^*} y^* + \tau_w^*, \quad a_* = (2k_0)^{1/2} a_0^{1/2}$$

Здесь  $\tau_w^* = \tau_w^*(x^*)$  определяет трение на поверхности тела.

Из сращивания решений для областей IV и V при  $Y^0 \rightarrow 0$  и  $y^* \rightarrow \infty$  находим, что

$$\sigma_1^* = \varepsilon^{-3/2}, \quad T_0^*(x^*, y^*) = a_* \frac{dp^*}{dx^*} y^* + O(1),$$

$$U_0^*(x^*, y^*) = r_0(x^*) y^{*1/2} + \dots \quad (y^* \rightarrow \infty) \quad (2.9)$$

Условие прилипания на поверхности тела дает  $U_0^* = T_0^* = 0$  при  $y^* = 0$ .

Установив вид решения для области V, можно найти теперь разложение для  $U_0(x, y_0)$ ,  $T_0(x, y_0)$ ,  $\tau_w(x)$  из (2.1), (2.4) при  $x \rightarrow -0$ . Для этого необходимо произвести сращивание решений (2.1), (2.3)–(2.5) и (2.6)–(2.9). В результате получим:

$$U_0^*(x^*, y^*) = (-x^*)^{-1/2} \chi_0^*(\xi^*) + \dots, \quad T_0^*(x^*, y^*) = (-x^*)^{-1/2} \varphi_0^*(\xi^*) + \dots$$

$$\tau_w^*(x^*) = b_0^* (-x^*)^{-1/2} + \dots, \quad p^*(x^*) = -(-x^*)^{1/2} + \dots,$$

$$\xi^* = y^* (-x^*)^{-1/2} \quad (x^* \rightarrow -\infty) \quad (2.10)$$

$$U_0(x, y_0) = (-x)^{-1/2} \chi_0(\xi) + \dots, \quad T_0(x, y_0) = (-x)^{-1/2} \varphi_0(\xi) + \dots$$

$$\tau_w(x) = b_0 (-x)^{-1/2} + \dots, \quad \xi = y_0 (-x)^{-1/2} \quad (x \rightarrow -0)$$

$$\xi = D_0^{-1} \xi^*, \quad \chi_0(\xi) = D_0 \chi_0^*(\xi^*), \quad \varphi_0(\xi) = D_0^2 \varphi_0^*(\xi^*),$$

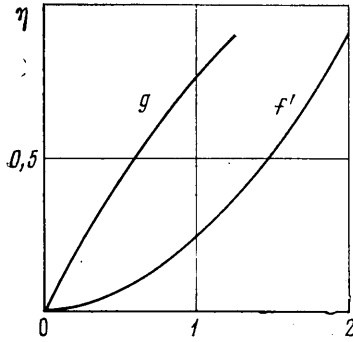
$$b_0 = D_0^2 b_0^*, \quad D_0 = (2k_0 a_0)^{-1/2}, \quad b_0 = \text{const}$$

3. Согласно полученным соотношениям (2.1), (2.3), (2.5), продольная составляющая вектора осредненной скорости в вязком подслое мала и при  $x \rightarrow -0$  есть величина порядка  $\varepsilon^{-2/3} R^{-1/2}$ . Однако по мере приближения к области взаимодействия ( $x \rightarrow -0$ ) величина этой составляющей, как это видно из (2.10), увеличивается по закону  $(-x)^{-1/2}$ . То же самое происходит с турбулентными напряжениями и поверхностным трением, величины которых малы, но увеличиваются при  $x \rightarrow -0$ :  $T_{xy} = O[\varepsilon^{-1/2} R^{-2/3} (-x)^{-1/2}]$ ,  $\tau_w = O[\varepsilon^{-1/2} R^{-2/3} (-x)^{-1/2}]$ . Поскольку вязкий подслей находится под действием большого неблагоприятного градиента давления (1.1), то жидкость в этом подслое не может ускориться в направлении движения внешнего потока. Это означает, что при  $x \rightarrow -0$  в вязком подслое неизбежно появление возвратного течения.

Таким образом, отрыву турбулентного пограничного слоя предшествует появление возвратного течения в тонком вязком подслое.

Описанная ситуация, как видно, существенно отличается от той, которая имеет место при ламинарном отрыве. Дело в том, что как в несжимаемой жидкости [8], так и в сверхзвуковом потоке газа [17, 18] градиент давления в окрестности точки ламинарного отрыва индуцируется вязким пристеночным подслоем. Поэтому обращение поверхностного трения в нуль означает отрыв подслоя, а вместе с ним и всего пограничного слоя. Турбулентный же пограничный слой, как известно, имеет значительно более «наполненный профиль» скорости, и градиент давления, приводящий к его отрыву от поверхности, индуцируется не тонким пристеночным

слоем, а нелинейной областью [6], которая имеет толщину порядка толщины исходного пограничного слоя. Действия этого положительного градиента на более медленные слои жидкости около поверхности тела достаточно для появления здесь возвратных токов еще до начала отделения (отрыва) пограничного слоя в целом.



Фиг. 4

Описанный выше характер течения при турбулентном отрыве подтверждается результатами экспериментальных исследований [19–21].

Покажем, что случай, когда градиент давления не входит в число определяющих параметров течения в вязком подслое, невозможен. Действительно, пусть вязкий член и член с турбулентным напряжением по порядку величины больше, чем градиент давления. Тогда течение в этой области описывается уравнением вида (2.8), в котором отсутствует член с градиентом давления.

Из сращения с решением в области IV на основании (1.6) при этом следует, что  $T_{xy} = \varepsilon^{1/2} \tau_w^*(x^*) + \dots$  при  $Y^0 \rightarrow 0$ . Поэтому трение на поверхности тела в этом случае есть величина порядка  $\varepsilon^{1/2}$ . В то же время известно [9, 10], что поверхностное трение вне окрестности точки отрыва — величина порядка  $\varepsilon^2$ . Следовательно, если бы такая ситуация могла реализоваться, то это означало бы, что в турбулентном пограничном слое при безотрывном обтекании поверхностное трение по порядку величины является меньшим, чем в окрестности точки отрыва.

4. Для получения решения в области 4 воспользуемся гипотезой пути смещения Прандтля

$$\tau_{xy} = K \left( Y \frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2, \quad K = \text{const}$$

Подставляя в это соотношение разложение (1.3), получим

$$G_0 = K (\xi F_0'')^2 \quad (4.1)$$

Из условия (2.5) следует, что при  $\xi \rightarrow 0$   $F_0(\xi) = 1/3 (k_0/K)^{1/2} \xi^{3/2} + \dots$

Использование гипотезы пути смещения не позволяет производить асимптотическое сращивание решений в областях 4 и 3, так как в последней эта гипотеза неприменима. Поэтому условия сращения решений (1.5), так же как, например, в задаче о слое смещения Толлмина [13], должны быть заменены условием их смыкания (склейки) вдоль некоторой заранее неизвестной линии  $\xi = \xi_0$ .

После преобразования  $\xi = K\eta$ ,  $F_0(\xi) = k_0^{1/2} K f(\eta)$  уравнения (1.4), (4.1) принимают вид

$$[(\eta f'')^2]' - \frac{5}{4} f f'' + \frac{1}{4} f'^2 = 1 \quad (4.2)$$

и не содержат постоянных  $k_0$ ,  $K$ . Тогда разложение при  $\eta \rightarrow 0$  запишется в виде

$$f(\eta) = 1/3 \eta^{3/2} + O(\eta^{5/2}) \quad (4.3)$$

Это разложение не содержит произвольных постоянных и, таким образом, представляет собой условие, которое определяет решение задачи.

При некотором  $\eta = \eta_0$  значение продольной составляющей вектора осредненной скорости в областях 3 и 4 должны совпадать. Поэтому условие склейки на основании (1.5) (с учетом сделанного преобразования) запишется в виде  $f'(\eta_0) = 2$ .

Решение уравнения (4.2) в соответствии с (4.3) представим в виде ряда

$$f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \eta^{n+1/2}, \quad \eta \in [0, \eta_0] \quad (4.4)$$

Подставляя (4.4) в (4.2), получим рекуррентное соотношение для коэффициентов

$$\begin{aligned} 8(n+1)(2n+1)(2n+3)c_n &= 2 \sum_{i=0}^{n-1} (2n-2i+1)(5n-6i-4)c_i c_{n-i-1} - \\ &- \sum_{i=1}^{n-1} (2i+1)(2i+3)(2n-2i+1)^2(2n-2i+3)c_i c_{n-i} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$n \geq 2, \quad c_0 = 1/3, \quad c_1 = 2/15$$

Значения  $c_n$  с ростом  $n$  быстро убывают, в частности  $c_2 = 1/378$ ,  $c_3 = 1/15876$ .

Суммирование рядов по формулам (4.4), (4.5) проводилось численно. На фиг. 4 представлены графики функций  $f'(\eta)$  и  $g(\eta) = (\eta f'')^2$ , которые определяют профиль осредненной скорости и турбулентное трение. Значение  $\eta_0$ , при котором выполняется условие склейки, оказалось равным 0,9004 и  $g(\eta_0) = 1,2314$ .

В заключение автор благодарит В. В. Сычева и А. И. Рубана за полезное обсуждение результатов работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Melnik R. E., Grossman B. Analysis of the interaction of a weak normal shock wave with a turbulent boundary layer. — AIAA Pap., 1974, № 74-598, 32 p.
2. Adamson T. C. Jr., Feo A. Interaction between a shock wave and a turbulent boundary layer in transonic flow. — SIAM J. Appl. Math., 1975, v. 29, № 1, p. 121-145.
3. Messiter A. F. Interaction between a normal shock wave and a turbulent boundary layer at high transonic speeds. Pt. 1. Pressure distribution. — ZAMP, 1980, v. 31, № 2, p. 204-226.
4. Liou M. S., Adamson T. C. Jr. Interaction between a normal shock wave and a turbulent boundary layer at high transonic speeds. Pt. 2. Wall shear stress. — ZAMP, 1980, v. 31, № 2, p. 227-246.
5. Adamson T. C. Jr., Messiter A. F. Analysis of two-dimensional interactions between shock waves and boundary layers. — Ann. Rev. Fluid Mech. V. 12. Palo Alto, Calif., 1980, p. 103-138.
6. Сычев В. В., Сычев Вук. В. О турбулентном отрыве. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т. 20, № 6, с. 1500-1512.
7. Ackenberg R. C. Boundary-layer separation at a free streamline. Pt. 1. Two-dimensional flow. — J. Fluid Mech., 1970, v. 44, № 2, p. 211-225.
8. Сычев В. В. О ламинарном отрыве. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 3, с. 47-59.
9. Yajnik K. S. Asymptotic theory of turbulent shear flows. — J. Fluid Mech., 1970, v. 42, № 2, p. 411-427.
10. Mellor G. L. The large Reynolds number asymptotic theory of turbulent boundary layers. — Int. J. Engng. Sci., 1972, v. 10, № 10, p. 851-873.
11. Сычев Вук. В. О разрушении плоского ламинарного следа. — Уч. зап. ЦАГИ, 1978, т. 9, № 6, с. 9-16.
12. Coles D. The low of the wake in the turbulent boundary layer. — J. Fluid Mech., 1956, v. 1, № 2, p. 191-226.
13. Tollmien W. Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge. — ZAMM, 1926, Bd. 6, № 6, S. 468-478.

14. Гиневский А. С., Солодкин Е. Е. Влияние поперечной кривизны поверхности на характеристики осесимметричного турбулентного пограничного слоя.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 6, с. 819—825.
15. Stratford B. S. The prediction of separation of the turbulent boundary layer.— J. Fluid Mech., 1959, v. 5, № 1, p. 1—16.
16. Kader B. A., Yaglom A. M. Similarity treatment of moving-equilibrium turbulent boundary layers in adverse pressure gradients.— J. Fluid Mech., 1978, v. 89, № 2, p. 305—342.
17. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 4, с. 53—57.
18. Stewartson K., Williams P. G. Self-induced separation.— Proc. Roy. Soc. London, A, 1969, v. 312, № 1509, p. 181—206.
19. Sandborn V. A., Kline S. J. Flow models in boundary-layer stall inception.— Trans. ASME, ser. D, J. Basic Eng., 1961, v. 83, № 3, p. 317—327.
20. Simpson R. L., Chew Y.-T., Shivaprasad B. G. The structure of a separating turbulent boundary layer. Pt. 1. Mean flow and Reynolds stresses.— J. Fluid Mech., 1981, v. 113, p. 23—51.
21. Kline S. J., Bardina J. G., Strawn R. C. Correlation and computation of detachment and reattachment of turbulent boundary layers on two-dimensional faired surfaces.— AIAA Pap., 1981, № 81—1220.

Москва

Поступила в редакцию  
18.III.1982