МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1983

УДК 532.526.2.013.2

О ВЛИЯНИИ ВДУВА В ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ОБТЕКАНИЕ КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ КОНУСА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

КОРНИЕНКО Е. С., ШМАНЕНКОВ В. Н.

На примере сверхзвукового обтекания острого конуса, колеблющегося около нулевого угла атаки, изучается влияние вдува на нестационарные характеристики пограничного слоя. Решена задача о взаимодействии невязкого внешнего течения с ламинарным пограничным слоем. Показано, что вдув, пропорциональный тепловому потоку, улучшает демпфирование колебаний конуса. Опережение вдувом теплового потока по фазе усиливает этот эффект.

Решение задачи о взаимодействии идеального потока с пограничным слоем разделим на три этапа. Сначала решаются уравнения невязкого газа в предположении, что толщина пограничного слоя равна нулю. Затем из уравнений пограничного слоя определяется нормальная компонента скорости v_δ на расстоянии δ (δ — граница области вязкого течения) от поверхности тела. На третьем этапе, при решении уравнений идеального газа, на границе δ задается условие $v=v_\delta$.

Введем связанную с конусом декартову систему координат, ось x_3 которой совпадает с осью конуса, и сферическую систему координат r, θ, φ

$$x_1=r\cos\varphi\sin\theta,\quad x_2=r\sin\varphi\sin\theta,\quad x_3=r\cos\theta$$

Уравнения движения идеального газа в направлениях координатных линий r, θ, φ имеют в правых частях дополнительные инерционные слагаемые

$$2v\dot\alpha+r_0\sin\theta\ddot\alpha,\quad -2u\dot\alpha+(r_0\cos\theta-r)\ddot\alpha$$

$$2(v\sin\theta-u\cos\theta)\frac{\partial\dot\alpha}{\partial\varphi}+(r_0-r\cos\theta)\frac{\partial\ddot\alpha}{\partial\varphi}$$

$$\dot\alpha=\frac{\partial\alpha}{\partial t},\quad \alpha=\alpha_2\cos\varphi-\alpha_1\sin\varphi,\quad \alpha_3=0$$

Здесь u, v, w — компоненты скорости вдоль координатных линий r, θ, φ; α_i — угол малого поворота конуса вокруг оси x_i; t — время; $r=r_0$ — координата центра колебаний, расположенного на оси конуса.

На ударной волне сохраняются следующие величины:

$$v_\tau,\quad \rho(v_n-D),\quad p+\rho v_n(v_n-D)$$
$$pD+\rho(v_n-D)(h+{}^1/_2v_n^2)$$

Здесь v_τ, v_n — касательная и нормальная к поверхности ударной волны составляющие скорости, D — скорость поверхности скачка вдоль собственной нормали.

На поверхности $\theta_\delta=\theta_0+\delta/r$ задается условие $v=v_\delta$. (На первом этапе расчета $\delta=v_\delta=0$.)

Уравнения движения газа в пограничном слое на конусе, совершающем малые колебания около нулевого угла атаки, в переменных Блазиуса имеют вид

$$\rho x\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-r_0\sin\theta_0\ddot{\alpha}\right]=-v^0\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{R}{x}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

$$\rho x\left[\frac{\partial w}{\partial t}+u\cos\theta_0\frac{\partial w}{\partial x}+2u\frac{\partial\dot{\alpha}}{\partial\varphi}+(x\cos\theta_0-r_0)\frac{\partial\ddot{\alpha}}{\partial\varphi}\right]=-v^0\frac{\partial w}{\partial\eta}-\frac{1}{\sin\theta_0}\frac{\partial p}{\partial\varphi}-$$

$$-\rho uw+\frac{R}{x}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)$$

$$v^\circ=\rho v\sqrt{R}+{}^1/_2\rho u\eta,\quad x=r\cos(\theta-\theta_0)$$

$$\eta=\sqrt{R}\,\mathrm{tg}\,(\theta-\theta_0)$$

Здесь u — составляющая скорости в направлении x, p — давление; $R=\rho_\infty u_\infty r/\mu_\infty$ — число Рейнольдса, ρ_∞, u_∞, μ_∞ — плотность, скорость, вязкость набегающего потока; Pr — число Прандтля, θ_0 — угол полураствора конуса. На границе $\eta_\delta=(\delta/x)\sqrt{R}$ задается условие непрерывности функций u, w, ρ, h. На поверхности $\eta=0$ используется условие постоянства энтальпии и пропорциональности нормального вдува тепловому потоку с учетом возможного сдвига фазы

$$u=w=0,\quad h=h_w,\quad v^\circ=\frac{RI\mu}{x\,\mathrm{Pr}}\frac{\partial h(t+\tau)}{\partial\eta}$$

$$I=\frac{\rho_{wc}v_{wc}}{q_{wc}}=\mathrm{const}$$

Здесь τ — время опережения вдувом теплового потока, q_w — тепловой поток.

В идеальном потоке и в пограничном слое используется уравнение состояния совершенного газа $\varkappa p=(\varkappa-1)\rho h$.

Обе системы уравнений и граничные условия при линеаризации по малому параметру $\alpha=\alpha_0e^{i\omega t}$ разделяются по всем четырем переменным: r, θ, φ, t (соответственно x, η, φ, t), если каждую из искомых функций u, v, ρ и т. д. и w представить в виде

$$\begin{aligned}F(r,\theta,\varphi,t)&=F_c(\theta)+\alpha\sum S^nF_n(\theta)+O(\alpha^2)\\ w(r,\theta,\varphi,t)&=\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi}\sum S^nw_n(\theta)+O(\alpha^2)\end{aligned}\qquad(1)$$

Здесь $S=r\omega/u_\infty$ — число Струхаля, α_0 — амплитуда малых колебаний.

Поскольку указанные системы уравнений не имеют собственных решений, значения n определяются видом граничных условий и инерционными членами в уравнениях движения. На первом и втором этапах решения $n=0,\ 1,\ 2,\dots$ На третьем этапе, когда учитывается конечность толщины пограничного слоя, $n=-{}^1/_2,\ {}^1/_2,\ {}^3/_2\dots$ Подставляя (1) в уравнения и в граничные условия, описывающие обтекание конуса, и пренебрегая членами порядка α^2, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения основного (стационарного, индекс c) течения и рекуррентную систему линейных дифференциальных уравнений для коэффициентов $F_n(\theta)$ при соответствующих степенях n числа Струхаля S.

Начиная с $n=3$ неоднородность системы уравнений нарушают только рекуррентные слагаемые с индексом $n-1$, а ее решения затухают как $1/n!$. Это дает основание утверждать, что ряд (1) сходится. Однако на практике имеет смысл рассматривать только те первые слагаемые ряда, которые больше остаточного члена $O(\alpha^2)$. В соответствии с этим при низких частотах колебаний принимаются во внимание только первые два слагаемых ряда с индексами 0 и 1, которые играют основную роль при расчете частоты и декремента затухания колебаний тел.

В результате решения краевой задачи определяются следующие нестационарные характеристики потока на поверхности конуса: давление p, компоненты напряжения трения T и W, тепловой поток Q. В частности, давление p в соответствии с (1) выражается в виде

$$p=\rho_\infty u_\infty^2\left[p_c+\frac{\Delta p_c}{\sqrt{R}}+\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\left(p_n+\frac{\Delta p_n}{\sqrt{R}}\right)S^n\right] \tag{2}$$

Здесь Δp_n — поправка к давлению, соответствующая решению уравнений пограничного слоя с индексом n. Интегрируя (2) по поверхности конуса, получим силу F и момент сил M относительно точки r_0

$$F_i=\rho_\infty u_\infty^2 r_k^2\sin\theta_0 f_i,\quad M_i=\rho_\infty u_\infty^2 r_k^2\sin\theta_0(r_k m_i-r_0 f_j),\ i\neq j$$

$$f_1\cos\varphi+f_2\sin\varphi=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{p_n\cos\theta_0}{n+2}+\frac{1}{\sqrt{R}}\left(\frac{T_n\sin\theta_0+W_n}{n+{}^3/_2}-\frac{\Delta P_n\cos\theta_0}{n+1}\right)\right]S^n \tag{3}$$

$$m_1\cos\varphi+m_2\sin\varphi=\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{p_n}{n+3}+\frac{1}{\sqrt{R}}\left(\frac{\Delta p_n}{n+2}-\frac{W_n}{n+{}^5/_2}\right)\right]S^n$$

Здесь m_i, f_i — проекции безразмерных моментов и силы на оси x_i, r_k — длина образующей конуса.

Для определения влияния вдува на демпфирование колебаний конуса рассмотрим модельную задачу о сублимации и прогреве материала под действием нестационарного теплового потока. Сдвиг фазы Φ нестационарной составляющей вдува $\rho V\sim q\exp[i(\omega t+\Phi)]$ относительно теплового потока определяется из уравнений теплопроводности и баланса тепла [1] на границе $n_w(t)$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\lambda}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial n^2}$$

$$n=n_w: T=T_w=\text{const},\quad \varepsilon\rho_w v_w-\lambda\frac{\partial T}{\partial n}=q_c+qe^{i\omega t},\quad |q|\ll q_c$$

$$n=\infty: T=0$$

$$\Phi=\operatorname{arctg}\frac{-\operatorname{Im}g(\nu)}{\varepsilon/(cT_w)+\operatorname{Re}g(\nu)} \tag{4}$$

$$g(\nu)=\frac{i}{\nu}[1-(1+2i\nu)^{1/2}],\quad \nu=\frac{2\lambda\omega}{\rho c v_c^2}$$

Здесь $v=v_c+V=\dot{n}_w$ — скорость уноса, ε и T_w — теплота и температура сублимации, λ, ρ, c — теплопроводность, плотность и теплоемкость материала, q — амплитуда колебаний теплового потока. Из (4) следует, что $0\leqslant\Phi\leqslant\pi/4$. Таким образом, при большом тепловом потоке, когда можно пренебречь внутренним разложением материала [1], вдув опережает тепловой поток по фазе. Этот результат был подтвержден расчетом по методу [2]. Он остается справедливым при учете излучения и нестационарности температуры сублимации.

Анализ системы уравнений, описывающих обтекание конуса, показывает, что при малых сдвигах фазы Φ коэффициенты ряда (1) при $n=0$

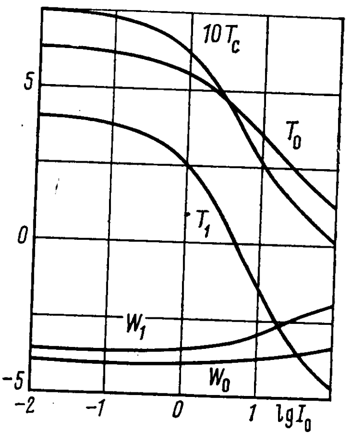
определяются по формуле

$$F_0(\Phi)=F_0(0)+i\Phi Q_0 I_0 \xi_F(I_0) \qquad (5)$$

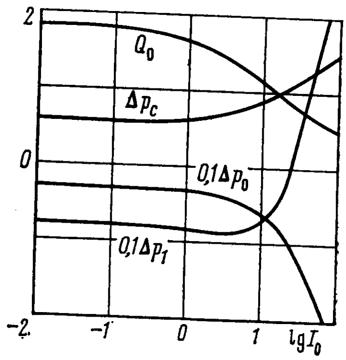
В частности, $\xi_{\Delta p}\approx\mathrm{const}>0$.

Сформулированная краевая задача решается методом пристрелки. В качестве примера приводятся результаты расчета T_c, T_0, T_1, W_0, W_1 (фиг. 1), Δp_c, Δp_0, Δp_1, Q_0 (фиг. 2) в зависимости от коэффициента I_0 при $\theta_0=10°$, $r_0=0$, $M_\infty=6$, $\varkappa=1{,}4$ (в этом случае $p_1=0{,}4$), $\Phi=0$, $h_w/h_{0\infty}=0{,}5$, $\mu\sim h^{0{,}685}$.

Для конуса, колеблющегося около вершины ($r_0=0$) при низкой частоте, декремент затухания γ колебаний определяется мнимой частью первых



Фиг. 1



Фиг. 2

двух членов ряда (3) для m и формулой (5)

$$\gamma\sim\left[\frac{p_1}{4}+\frac{1}{\sqrt{R}}\left(\frac{\Delta p_1}{3}-\frac{W_1}{3{,}5}\right)\right]S+\frac{\Phi Q_0 I_0 \xi_{\Delta p}}{2\sqrt{R}} \qquad (6)$$

Влияние пограничного слоя имеет порядок $1/\sqrt{R}$, причем положительные слагаемые (6) улучшают демпфирование, а отрицательные — ухудшают. Как видно из фиг. 1, 2, пограничный слой при слабом вдуве ухудшает демпфирование колебаний конуса. При обтекании клина, как показано в [3], этот эффект сильнее. По мере роста I_0 оба дополнительных слагаемых в (6) растут и демпфирование улучшается. При достаточно сильном вдуве коэффициент демпфирования становится больше, чем рассчитанный без учета вязкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полежаев Ю. В., Юревич Ф. Б.* Тепловая защита. М.: Энергия, 1976. 392 с.
2. *Савелов М. В., Тимошенко В. П.* Нестационарная фильтрация газа в двухслойном теплозащитном покрытии.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 6, с. 74–79.
3. *Корниенко Е. С., Шманенков В. Н.* О влиянии вдува на характеристики нестационарного пограничного слоя на колеблющемся клине в сверхзвуковом потоке.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 1, с. 171–175.

Москва

Поступила в редакцию
4.I.1982