

УДК 532.526

**ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
В ЛАМИНАРНОМ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СЛЕДЕ**

ТРИГУБ В. Н.

Методом сращиваемых асимптотических разложений исследуется взаимодействие осесимметричного следа за тонким телом с внешним потенциальным потоком в несжимаемой жидкости. Показано, что при определенных условиях для описания течения применима трехслойная схема, причем возмущения потока в главном приближении удовлетворяют уравнению Кортевега – де Вриза. Рассмотрены известные решения этого уравнения в виде уединенной и кноидальной волны. Получены также уравнения более высоких приближений асимптотической последовательности.

Целью настоящей работы является выяснение структуры асимптотических разложений при свободном взаимодействии тонкой осесимметричной нити заторможенной жидкости с внешним потенциальным потоком и применение полученных результатов к течению в тонком осесимметричном следе. Описание взаимодействия тонкого следа с потенциальным потоком в осесимметричном случае осложнено наличием особенности в разложении потенциала при $r \rightarrow 0$. Порядки величин при сращивании для этого случая были указаны в работе [1], однако уравнение, полученное там, является композитным, а асимптотическая структура разложения остается неясной.

Взаимодействие исследуется в рамках трехслойной схемы, впервые предложенной в работах [2, 3] для сверхзвуковых течений. В [4] показано, что при фиксированном неблагоприятном градиенте давления критическая точка в следовом профиле является в общем случае особой и решение не может быть продолжено далее. Решение, приведенное в данной работе, построено при самоиндуцированном градиенте давления и позволяет непрерывно перейти в зону обратных токов.

Из-за наличия особенности в потенциале взаимодействие в главном приближении оказывается локальным, а нелокальность проявляется лишь в последующих приближениях.

При этом локальные возмущения затухают вверх по потоку экспоненциально. В этом заключается существенное отличие взаимодействия тонких осесимметричных слоев от плоских, где взаимодействие нелокально [5].

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкий сильно заторможенный след в несжимаемой жидкости, в котором скорость на оси u_a гораздо меньше скорости внешнего потока U_e ($u_a \ll U_e$). Введем цилиндрическую систему координат (r, z) с осью z , направленной по потоку вдоль оси симметрии. Все размеры отнесем к характерной длине обтекаемого тела L , компоненты скорости — к невозмущенному значению ее над областью взаимодействия U_e , возмущения давления — к ρU_e^2 , где ρ — плотность жидкости. Число Рейнольдса $Re = U_e L / \nu = \varepsilon^{-2}$; ν — коэффициент вязкости.

Уравнения Навье – Стокса в этой системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial z} &= \varepsilon^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} &= \varepsilon^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial (ru)}{\partial z} + \frac{\partial (rv)}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь u — аксиальная скорость, v — радиальная.

Введем функцию тока Ψ так, чтобы $vr = -\partial\Psi/\partial z$; $ur = \partial\Psi/\partial r$ и перейдем к переменным (Ψ, z)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(p + \frac{u^2}{2} \right) - vr \frac{\partial p}{\partial \Psi} &= \varepsilon^2 \left[u \frac{\partial}{\partial \Psi} (ur^2 \frac{\partial u}{\partial \Psi}) + O \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial z} + ur \frac{\partial p}{\partial \Psi} &= \varepsilon^2 \left[ur \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u \frac{\partial (ru)}{\partial \Psi} \right) + O \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \right] \\ v &= u \frac{\partial r}{\partial z}, \quad r \frac{\partial r}{\partial \Psi} = \frac{1}{u} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Члены вида $O(\partial^2/\partial z^2)$ в дальнейшем не понадобятся. Условимся также о следующих обозначениях: $\sum_{i=1} u_i$ означает, что процесс построения

членов указанного вида можно продолжать сколь угодно долго; пусть по определению $O^*(\tau^n)$ на пределе $\tau \rightarrow 0$, $n > 0$, для всякого $\alpha > 0$ $O(\tau^{n+\alpha}) \ll O^*(\tau^n) \ll O(\tau^{n-\alpha})$. Тогда члены вида $\tau^n \ln^m(\tau^{-1})$, $\tau^n \ln(\ln(\tau^{-1}))$ и т. д. можно обозначать $O^*(\tau^n)$.

2. Область завихренного потока. Предположим, что при предельном переходе $Re \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ длина области взаимодействия $\Delta \rightarrow 0$, причем $\tau = \varepsilon/\Delta \rightarrow 0$. Для рассмотрения слабо возмущенного движения в завихренной области совершим предельный переход ($z = \Delta x$, $\Psi = \varepsilon^2 \psi$, $t = \tau^4 \ln^2(\tau^{-1}) t^*$; $\tau \rightarrow 0$, $\tau^5 \ln^2(\tau^{-1}) \gg \varepsilon$, ψ , t^* , $\kappa \sim O(1)$) в уравнениях (1.2) при следующих асимптотических разложениях функций по τ

$$\begin{aligned} u &= U_0(\psi) + \tau^4 \ln^2 \frac{1}{\tau} \sum_{i=1} \left(\ln \frac{1}{\tau} \right)^{-i+1} U_{i1} + O^*(\tau^6) \\ p &= p_0 + \tau^4 \ln^2 \frac{1}{\tau} \sum_{i=1} \left(\ln \frac{1}{\tau} \right)^{-i+1} p_{i1} + O^*(\tau^6) \\ \frac{r}{\varepsilon} &= Y = R_0(\psi) + \tau^2 \ln \frac{1}{\tau} \sum_{i=1} \left(\ln \frac{1}{\tau} \right)^{-i+1} R_{0i} + \\ &+ \tau^4 \ln^2 \frac{1}{\tau} \sum_{i=1} \left(\ln \frac{1}{\tau} \right)^{-i+1} R_{i1} + O^*(\tau^6) \\ v &= \tau^3 \ln \frac{1}{\tau} \sum_{i=1} \left(\ln \frac{1}{\tau} \right)^{-i+1} V_{0i} + \\ &+ \tau^5 \ln^2 \frac{1}{\tau} \sum_{i=1} \left(\ln \frac{1}{\tau} \right)^{-i+1} V_{i1} + O^*(\tau^6) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Условие $\tau^5 \ln^2(\tau^{-1}) \gg \varepsilon$ обеспечит отсутствие вязких членов во всех областях, масштаб t выбран так, чтобы нестационарные члены входили лишь в уравнения нижнего слоя. Что же касается вида разложений, то он выбирается из условий срачивания с внешним потенциальным потоком. В результате указанного предельного перехода получаем следующие линейные уравнения для членов разложения (2.1):

$$p_{i1} + U_0 U_{i1} = 0, \quad \frac{\partial p_{i1}}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial p_{i1}}{\partial \psi} \cdot R_0 = - \frac{\partial V_{0i-1}}{\partial x}, \quad i=2, \dots$$

$$V_{0i} = U_0 \frac{\partial R_{0i}}{\partial x}, \quad V_{1i} = U_0 \frac{\partial R_{1i}}{\partial x}, \quad \frac{dR_0^2}{d\psi} = \frac{2}{U_0}, \quad \frac{\partial (R_0 R_{0i})}{\partial \psi} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(R_0 R_{1k} + \frac{1}{2} \sum_{i+j=k+1} R_{0i} R_{0j} \right) = -\frac{U_{1k}}{U_0^2}, \quad k=1, \dots$$

Определим некоторые функции, которые однозначно определяются заданием начального профиля $U_0(\psi)$

$$F_0(\psi) = \int_0^\psi \left(\frac{1-U_0}{U_0} \right) d\psi, \quad F_1(\psi) = \int_\psi^\infty \left(\frac{1-U_0^3}{U_0^3} \right) d\psi$$

$$F_2(\psi) = \int_\psi^\infty \left(\frac{1}{2(\psi+\delta)} - \frac{U_0}{R_0^2} \right) d\psi, \quad \delta = F_0(\infty) \quad (2.3)$$

$$F_3(\psi) = -\int_\psi^\infty \left[\frac{F_2(\psi)}{U_0^3} + \ln(\psi+\delta) \left(\frac{1-U_0^3}{2U_0^3} \right) \right] d\psi$$

Относительно начального профиля $U_0(\psi)$ полагаем следующее: при $\psi \rightarrow \infty$ $U_0 \rightarrow 1$ экспоненциально; при $\psi \rightarrow 0$ $U_0 \sim \alpha(4\psi\alpha^{-1})^{1/2}$. Последнее означает, что разложение профиля до взаимодействия при $Y \rightarrow 0$ имеет вид $U_0 = \alpha Y^2 + O(Y^3)$. Отметим, что при $\psi \rightarrow \infty$ F_1, F_2, F_3 стремятся к нулю экспоненциально.

Выпишем лишь те решения уравнений (2.2), которые понадобятся в дальнейшем. Для единообразия записи определим $A_0 = 0$.

$$R_{0i} = -\frac{A_i}{R_0}, \quad V_{0i} = -A_i' \frac{U_0}{R_0}, \quad V_{1i} = U_0 \frac{\partial R_{1i}}{\partial x}$$

$$R_{1k} = -\frac{B_k}{R_0} - \sum \frac{A_i A_j}{R_0^3} + \frac{p_{1k}^\circ}{R_0} (\psi - F_1) + \frac{A_{k-1}''}{R_0} \left[\frac{1}{2} (\psi + \delta) (\ln(\psi + \delta) - 1) + F_3 \right]$$

$$p_{1i} = p_{1i}^\circ + A_{i-1}'' \left(F_2 + \frac{1}{2} \ln(\psi + \delta) \right) \quad (2.4)$$

$$U_{1i} = -\frac{p_{1i}^\circ}{U_0} - \frac{A_{i-1}''}{U_0} \left(\frac{1}{2} \ln(\psi + \delta) + F_2 \right); \quad i, k = 1, \dots$$

Здесь $R_0^2 = 2\psi + 2F_0(\psi)$; A_i, B_i, p_{1i}° — неопределенные функции от x, t^* ; штрих означает дифференцирование по x .

Для сращения с потенциальным потоком потребуются разложения при $\psi \rightarrow \infty$

$$R_0 = Y + O\left(\tau^2 \ln \frac{1}{\tau}\right)$$

$$v = \tau^3 \ln \frac{1}{\tau} \sum \left(\ln \frac{1}{\tau} \right)^{-i+1} \left(-\frac{A_i'}{Y} \right) + O^*(\tau^5) \quad (2.5)$$

$$u = 1 + \tau^4 \ln^2 \frac{1}{\tau} \sum \left(\ln \frac{1}{\tau} \right)^{-i+1} \left[-p_{1i}^\circ + A_{i-1}'' \left(\frac{1}{2} \ln 2 - \ln y \right) \right] + O^*(\tau^6)$$

3. Внешний потенциальный поток. Предполагается, что завихренная область при $\psi \rightarrow \infty$ переходит в потенциальный поток. Рассмотрим цилиндр, где $r \sim z$ и завихренность отсутствует. Совершим предельный переход

($z=\Delta x$; $r=\Delta \cdot \eta$; $\tau \rightarrow 0$, $x, \eta \sim O(1)$) при следующих разложениях функции:

$$\begin{aligned} u &= 1 + \tau^4 \ln \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\ln \frac{1}{\tau} \right)^{-i+1} u_i^{\circ}(x, \eta) + O^*(\tau^6) \\ v &= \tau^4 \ln \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\ln \frac{1}{\tau} \right)^{-i+1} v_i^{\circ}(x, \eta) + O^*(\tau^6) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Решение уравнения Лапласа можно выписать в виде потенциала источников, распределенных на оси $r=0$

$$u_i^{\circ} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \quad v_i^{\circ} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}, \quad \varphi_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_i' d\xi}{[(x-\xi)^2 + \eta^2]^{3/2}} \quad (3.2)$$

Здесь S_i' — неизвестная интенсивность распределения. Для сращения с завихренной областью требуется разложение скоростей при $\eta \rightarrow 0$. В [6] приведено разложение потенциала при $\eta \rightarrow 0$ для финитного распределения источников на отрезке $[0, l]$

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2\pi} S'(x) \ln \frac{\eta}{2} - \frac{1}{4\pi} \left\{ S'(0) \ln x + S'(l) \ln(l-x) + \right. \\ &+ \left. \int_0^x S''(\lambda) \ln(x-\lambda) d\lambda - \int_x^l S''(\lambda) \ln(\lambda-x) d\lambda \right\} + O(\eta^2 \ln \eta) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Можно показать, что при предположении достаточной гладкости (отсутствие разрывов второй производной) и достаточной скорости затухания S_i при $x \rightarrow \pm\infty$ разложения скоростей при $\eta \rightarrow 0$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} v_i^{\circ} &= \frac{S_i'(x)}{2\pi\eta} + O(\eta \ln \eta) \\ u_i^{\circ} &= \frac{S_i''(x)}{2\pi} \ln \frac{\eta}{2} - g_i(x) + O(\eta^2 \ln^2 \eta) \\ g_i &= \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dx} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} S_i''(\xi) \operatorname{sign}(x-\xi) \ln|x-\xi| d\xi \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_i'''(\xi) \operatorname{sign}(x-\xi) \ln|x-\xi| d\xi \end{aligned} \quad (3.4)$$

Сращивание (2.5) и (3.4) дает

$$\begin{aligned} \frac{S_i'}{2\pi} &= -A_i', \quad p_{i1}^{\circ} = -A_i'', \quad p_{i1}^{\circ} = -A_i'' - A_{i-1}'' \left(\frac{1}{2} \ln 2 - g_{i-1} \right) \\ g_{i-1} &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} A_{i-1}'''(\xi) \operatorname{sign}(x-\xi) \ln|x-\xi| d\xi \end{aligned} \quad (3.5)$$

4. Нелинейный слой на оси. Линейные возмущения давления в завихренном потоке оказывают нелинейное воздействие в области малых скоростей при $\psi = O(\tau^4 \ln^2 \tau^{-1})$. Для рассмотрения движения в нелинейном слое совершим предельный переход ($r = \sigma \epsilon y$, $\sigma = \tau \ln^{1/2}(\tau^{-1})$, $\tau \rightarrow 0$, $x, y \sim O(1)$)

в уравнениях (1.1) при следующих разложениях функций:

$$u = \tau^2 \ln \frac{1}{\tau} \sum_{i=1} \left(\ln \frac{1}{\tau} \right)^{-i+1} u_i(x, y) + O^*(\tau^4) \quad (4.1)$$

$$v = \sigma \tau^3 \ln \frac{1}{\tau} \sum_{i=1} \left(\ln \frac{1}{\tau} \right)^{-i+1} v_i(x, y) + O^*(\sigma \tau^4)$$

$$p = p_0 + \tau^4 \ln^2 \frac{1}{\tau} \sum_{i=1} \left(\ln \frac{1}{\tau} \right)^{-i+1} p_i(x) + O^*(\tau^6)$$

В результате получим уравнения, в которых p_i , а также граничные условия при $y \rightarrow \infty$ следует определить из сращения

$$\frac{\partial(u_i y)}{\partial x} \pm \frac{\partial(v_i y)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t^*} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = - \frac{dp_1}{dx} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t^*} + \frac{\partial(u_1 u_k)}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_k}{\partial y} + v_k \frac{\partial u_1}{\partial y} = - \frac{dp_k}{dx} -$$

$$- \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i, j \neq 1}} \left(u_i \frac{\partial u_j}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_j}{\partial y} \right)$$

Рассмотрим поведение решений (2.4) при $\psi \rightarrow 0$

$$U_0 = \alpha \left(\frac{4\psi}{\alpha} \right)^{1/2} + O(\psi^{3/4}), \quad R_0 = \left(\frac{4\psi}{\alpha} \right)^{1/4} + O(\psi^{1/2})$$

$$F_1 = \frac{1}{2\alpha^{3/2} (4\psi)^{1/2}} + O(\psi^{-1/4}), \quad F_2 = F_2(0) + O(\psi)$$

$$F_3 = - \left[F_2(0) + \frac{1}{2} \ln \delta \right] \frac{1}{2\alpha^{3/2} (4\psi)^{1/2}} + O(\psi^{-1/4})$$

Тогда разложения (2.4) при предельном переходе ($\psi = \tau^4 \ln^2(\tau^{-1}) \psi^*$; $\tau \rightarrow 0$, $\psi^* \sim O(1)$) имеют вид

$$\left(\frac{r}{\varepsilon} \right)^2 = Y^2 = \tau^2 \ln \frac{1}{\tau} \left\{ \left(\frac{4\psi^*}{\alpha} \right)^{1/2} - \sum_{k=1} \left(\ln \frac{1}{\tau} \right)^{-k+1} \left[2A_k + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{2p_{1k}^{\circ} + A_{k-1}'' (2F_2(0) + \ln \delta)}{2\alpha^{3/2} (4\psi^*)^{1/2}} \right] \right\} + O^*(\tau^3)$$

$$u = \tau^2 \ln \frac{1}{\tau} \left\{ \alpha \left(\frac{4\psi^*}{\alpha} \right)^{1/2} - \sum_{k=1} \left(\ln \frac{1}{\tau} \right)^{-k+1} \left[\frac{2p_{1k}^{\circ} + A_{k-1}'' (2F_2(0) + \ln \delta)}{2\alpha^{3/2} (4\psi^*)^{1/2}} \right] \right\} +$$

$$+ O^*(\tau^3), \quad K = \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{\delta} \right) - F_2(0) \right]$$

$$p = p_0 + \tau^4 \ln^2 \frac{1}{\tau} \sum_{k=1} \left(\ln \frac{1}{\tau} \right)^{-k+1} [-A_k'' - KA_{k-1}'' + g_{k-1}] + O^*(\tau^6)$$

Отсюда находим граничные условия и неизвестные функции для (4.2)

$$p_k = -A_k'' - KA_{k-1}'' + g_{k-1} \quad (4.3)$$

$$u_1 \rightarrow \alpha y^2 + 2\alpha A_1, \quad u_i \rightarrow 2\alpha A_i \text{ при } y \rightarrow \infty$$

Иследуем более подробно простейший случай, когда добавки к скорости A_i зависят лишь от x и t^* . Преобразование

$$A_i \rightarrow \alpha^{-i/5} \left(\frac{3}{2}\right)^{3/5} A_i, \quad x \rightarrow \alpha^{-2/5} \left(\frac{3}{2}\right) x, \quad t^* \rightarrow 2\alpha^{-1/5} \left(\frac{3}{2}\right)^{3/5} t$$

приводит к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} + 6A_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} = \frac{\partial^3 A_1}{\partial x^3} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial A_k}{\partial t} + 6 \frac{\partial}{\partial x} (A_i A_k) = \frac{\partial}{\partial x} (A_k'' + L(A_{k-1}'')) + 3 \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i, j \neq 1}} A_i A_j$$

$$L(\Phi) = \left[K + \ln \left(\alpha^{-2/5} \left(\frac{3}{2}\right)^{3/5} \right) \right] \Phi + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi'(\xi) \operatorname{sign}(x-\xi) \ln|x-\xi| d\xi$$

$$u_1 = y^2 + A_1, \quad u_i = A_i, \quad v_i = -\frac{y}{2} A_i'$$

Видно, что A_1 удовлетворяет известному уравнению Кортевега — де Вриза [7].

Рассмотрим стационарные решения этого уравнения (в случае возмущения, движущегося с постоянной скоростью, это эквивалентно переходу в систему координат, движущуюся вместе с возмущением). Выполнив интегрирование, получим

$$(A_1')^2 = 2(A_1 - a)(A_1 - b)(A_1 - c) = 2R(A_1) \quad (4.5)$$

Корни многочлена R могут совпадать, два из них могут быть комплексно-сопряженными. Физический смысл имеют только те области A_1 , где $R \geq 0$. Если потребовать, чтобы A_1 было ограничено, то остаются две возможности: а) область, ограниченная нулем первого порядка слева и второго порядка справа, б) область, ограниченная нулями первого порядка с двух сторон (фиг. 1). Обращение R в нуль соответствует в случае нуля первого порядка экстремуму A_1 , а в случае нуля второго порядка — экспоненциальному выходу A_1 на константу. Значение A_1 , тождественно равное одному из корней R , также является решением (4.5).

Известное решение в виде солитона соответствует случаю а) и имеет вид

$$A_1 = u_\infty (1 - 3 \operatorname{ch}^{-2}(\sqrt{3u_\infty/2}x)) \quad (4.6)$$

Случай б) соответствует также хорошо известному периодическому решению в виде кноидальной волны. Заметим, что можно рассматривать и решения меньшей гладкости, в частности, содержащие переход с экстремума на постоянное значение A_1 . В случае б) таких точек разрыва должно быть по меньшей мере две. Однако разрыв второй производной A_1 приводит к логарифмической особенности в давлении (3.3), и для выяснения возможности существования таких переходов требуется дополнительный асимптотический анализ течения в окрестности точки разрыва.

В решение (4.6) входит произвольная постоянная u_∞ . Совершив преобразование переменных, получим уравнения, содержащие единственный

параметр β

$$A_k \rightarrow u_\infty A_k, \quad x \rightarrow u_\infty^{1/2} x$$

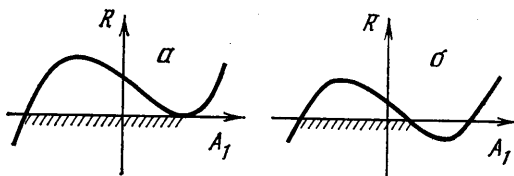
$$A_k'' - 6A_1 A_k = -\beta A_{k-1}'' - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} A_{k-1}'''(\xi) \operatorname{sign}(x-\xi) \ln|x-\xi| d\xi -$$

$$-3 \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i,j \neq 1}} A_i A_j, \quad \beta = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\delta u_\infty} - F_2(0)$$

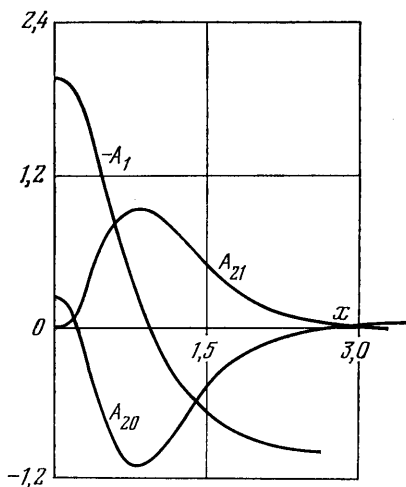
$$A_1 = 1 - 3 \operatorname{ch}^{-2}(\sqrt{3}/2 x), \quad k=2, \dots$$

Уравнение для A_2 исследовалось численно.

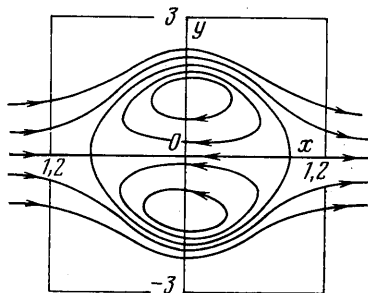
В связи с наличием логарифмической особенности в подынтегральном выражении при вычислении интеграла использовалась специальная не-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

равномерная сетка ([8, с. 714]). В уравнении для A_2 суммирование $A_i A_j$ в правой части отсутствует и решение можно представить в виде суммы решения A_{20} при $\beta=0$ и A_{21} при $\beta=1$ и отсутствии интеграла в правой части: $A_2 = A_{20} + \beta A_{21}$. В качестве граничных условий были взяты: $A_2'(0) = 0$ — условие симметрии и условие затухания при $x \rightarrow \infty$. Затухание A_{21} будет экспоненциальным, а A_{20} — алгебраическим. Графики функций A_1 , A_{20} , A_{21} приведены на фиг. 2.

Картина линий тока для главного приближения изображена на фиг. 3. Таким образом, физически решение в виде солитона соответствует кольцу замкнутых линий тока, движущемуся вверх по потоку со скоростью u_∞ , или, что то же самое, кольцу замкнутых линий тока в набегающем потоке $u = u_\infty + y^2$.

Возможен также несколько иной взгляд на полученный результат. Пусть в системе координат, связанной с телом, разложение скорости

вблизи оси имеет вид $u = u_0 + y^2$, где $u_0 = O(1)$. Перейдя в систему координат, движущуюся вниз по потоку со скоростью U_0 , можно повторить предыдущее рассмотрение. Однако при этом скорость движения солитона относительно тела будет $u = u_0 - u_\infty$ при $u_0 = O(1)$, $u_\infty \ll 1$ — возмущение будет двигаться вниз по потоку.

В заключение укажем некоторые основные особенности взаимодействия тонкого осесимметричного слоя с потенциальным потоком.

1. Из-за наличия особенности в разложении потенциала при $r \rightarrow 0$ взаимодействие в главном приближении является локальным, выражения, включающие интегралы вдоль зоны взаимодействия, входят лишь в дальнейшие приближения.

2. Первые два логарифмически близкие члены разложения индуцируют в общем случае бесконечную последовательность логарифмически близких членов. Последовательность может оборваться только если, начиная с некоторого шага, уравнения для нижнего слоя окажутся однородными. По-видимому, это возможно лишь при специально подобранном распределении толщины вытеснения.

3. В связи с наличием особенности в разложении скорости при $r \rightarrow 0$ в завихренном слое, начиная со второго приближения, $\partial p / \partial \psi \neq 0$. Это приводит к тому, что, начиная со второго приближения, в уравнения нижнего слоя входят интегральные характеристики невозмущенного профиля ($F_2(0)$, δ).

Автор благодарит В. Я. Нейланда за внимание, проявленное к работе, и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Leibovich S.* Weakly non-linear waves in rotating fluids.— *J. Fluid Mech.*, 1970, v. 42, № 4, p. 803–822.
2. *Нейланд В. Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке.— *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1969, № 4, с. 53–57.
3. *Stewartson K., Williams P. G.* Self-induced separation.— *Proc. Roy. Soc. A*, 1969, v. 312, № 509, p. 181–206.
4. *Сычев Вик. В.* О некоторых особенностях в решениях уравнений пограничного слоя на подвижной поверхности.— *ПММ*, 1980, т. 44, вып. 5, с. 831–838.
5. *Рубан А. И., Сычев В. В.* Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости.— *Успехи механики*, 1979, т. 2, № 4, с. 57–95.
6. *Goldstein S.* Lectures on fluid mechanics. L.— N. Y.: Interscience Publ., 1960, p. 181–195.
7. *Уизем Д. Б.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977, с. 443–453.
8. *Справочник по специальным функциям.* М.: Наука, 1979, с. 714.

Москва

Поступила в редакцию
18.III.1982