**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1983**

УДК 532.5.013.4:536.2

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ НА НЕЛИНЕЙНУЮ СТАБИЛИЗАЦИЮ АКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕЙ СРЕДЫ В ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ

ВОРОБЬЕВ А. П.

Задача определения амплитуд неустойчивых акустических колебаний, устанавливающихся в ограниченной тепловыделяющей среде вследствие перекачки энергии от неустойчивой моды к затухающим при их нелинейном взаимодействии, рассматривалась в [1]. Рассмотрение было проведено применительно к газу с объемным тепловыделением, заполняющему канал конечной длины, в предположении, что параметры газа в стационарном состоянии постоянны по объему.

В настоящей работе в нелинейном приближении проведено исследование устойчивости слабонеоднородного тепловыделяющего газа, заполняющего канал конечной длины, по отношению к акустическим колебаниям, распространяющимся вдоль его оси в направлении градиентов стационарных параметров. Показано, что пространственная неоднородность газа приводит к нарушению резонанса возбуждаемых акустических колебаний, что в свою очередь приводит к более высокому уровню установившихся колебаний по сравнению со случаем пространственно однородной среды.

1. Исследование акустической устойчивости тепловыделяющего газа проводится на основе уравнений газодинамики при выполнении условий локального термодинамического равновесия и диффузионном описании лучистых тепловых потоков

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathbf{V}=0,\qquad \rho T\left(\frac{\partial S}{\partial t}+\mathbf{V}\nabla S\right)=\rho\varepsilon-\alpha_{\text{т}}(T-T_w)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right),$$

$$p=\rho RT,\qquad \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V},\nabla)\mathbf{V}=-\frac{1}{\rho}\nabla p,\qquad S=c_v\ln p\rho^{-\gamma}$$

Здесь ε — постоянное тепловыделение на единицу массы газа, z — координата вдоль оси канала, λ — коэффициент лучистой теплопроводности, $\alpha_{\text{т}}$ — коэффициент теплообмена через боковую стенку, T_w — температура боковой стенки канала.

Влиянием вязкости пренебрегается вследствие малости вязкой диссипации акустических колебаний по сравнению с диссипацией лучистой теплопроводностью, которая принимается постоянной.

В стационарном состоянии газ предполагается неподвижным. Стационарное состояние достигается при равенстве тепловыделения $\rho\varepsilon$ теплоотводу как через боковые стенки канала, происходящему, например, по закону Ньютона, так и в осевом направлении за счет теплопроводности. Такое представление теплоотвода при большом отношении длины канала к поперечному размеру позволяет свести задачу о колебаниях к одномерной, считая параметры газа в поперечном направлении постоянными.

Отметим индексом 1 отклонения соответствующих параметров от их стационарных значений. Введем безразмерные переменные и безразмерные параметры, характеризующие усиление и затухание акустических колебаний

$$\eta=\frac{p_1}{\rho a^2},\qquad u=\frac{V_1}{a},\qquad \tau=\frac{a_0t}{L},\qquad \xi=\frac{z}{L}$$

$$\Gamma=(2-\gamma)\frac{\varepsilon}{c_pT_0}\frac{L}{a_0}. \quad \frac{1}{\mathrm{Pe}}=\frac{\varkappa_0}{a_0L}\left(\varkappa_0=\frac{\lambda_0}{c_p\rho_0}\right), \quad \frac{\rho}{\rho_0}=1+\varphi(\xi)$$

Стационарные параметры, отмеченные индексом 0, отнесем к среднему значению. Как и в [1], ограничимся квадратичным приближением, т. е. в уравнениях для колебаний сохраним лишь линейные и квадратичные члены. Используем квазиадиабатическое приближение, т. е. будем считать тепловыделение и теплопроводность малыми: Γ, $1/\mathrm{Pe}\ll 1$. Кроме того, потребуем, чтобы отклонение стационарной плотности, а следовательно, и температуры от среднего значения и производная этого отклонения по продольной координате были малы, т. е. $|\varphi|$, $|\partial\varphi/\partial\xi|\ll 1$. Пренебрежем температурой стенки T_w по сравнению с температурой тепловыделяющего газа T.

При принятых допущениях колебания давления подчиняются уравнению

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2}-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{1+\varphi}\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)=\left(\Gamma+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pe}}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\frac{\partial\eta}{\partial\tau}+\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\frac{u^2-\eta^2}{2}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\frac{u^2+\gamma\eta^2}{2} \tag{1.1}$$

которое дополняется при акустически закрытых торцах канала граничным условием $\partial\eta/\partial\xi|_s=0$. При вычислении правой части уравнения (1.1) использовались линейные соотношения между колебательными величинами для однородной консервативной среды. Так, связь между u и η дается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=-\frac{\partial\eta}{\partial\xi}$$

Среднюю плотность ρ_0 удобно выбрать так, чтобы

$$\int_0^1\varphi\,d\xi=0 \tag{1.2}$$

2. Линейная консервативная задача при наличии градиента плотности в осевом направлении

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2}-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{1+\varphi}\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)=0, \quad \left.\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right|_s=0$$

допускает частное решение в виде $\eta=\eta(\xi)\exp(i\omega\tau)$, где функция $\eta(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{1+\varphi}\frac{d\eta}{d\xi}\right)+\omega^2\eta=0, \quad \left.\frac{d\eta}{d\xi}\right|_s=0 \tag{2.1}$$

Можно показать, что краевая задача (2.1) порождает систему собственных функций $\{\eta_n\}$ и собственных чисел $\{\omega_n\}$, причем собственные функции, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.

С помощью методов теории возмущений найдем собственные функции и собственные числа задачи (2.1) при слабом отклонении плотности среды от среднего значения, считая, что $\varphi(\xi)$ пропорциональна малому параметру α [2]. При этом уравнение (2.1) с точностью до членов порядка α принимает вид

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\omega^2\eta=\alpha\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\frac{d\eta}{d\xi}-\omega^2\varphi\eta\right) \tag{2.2}$$

Если $\alpha=0$, то собственные функции и собственные числа соответственно будут равны $\eta_n=\cos n\pi\xi$, $\omega_n^2=n^2\pi^2$, $n=1, 2, \ldots$

При малых α положим

$$\omega_n^2 = n^2\pi^2 + \alpha\mu_{n1} + \ldots, \quad \eta_n = \cos n\pi\xi + \alpha\eta_{n1} + \ldots$$

Подставляя эти разложения в уравнение (2.2) и приравнивая члены при одинаковых степенях α, получим

$$\begin{gathered}\frac{d^2\eta_{n1}}{d\xi^2} + n^2\pi^2\eta_{n1} = f_n(\xi) - \mu_{n1}\cos n\pi\xi \\ \left.\frac{d\eta_{n1}}{d\xi}\right|_s = 0, \qquad f_n(\xi) = -n\pi\frac{d}{d\xi}(\varphi\sin n\pi\xi)\end{gathered} \tag{2.3}$$

Задача нулевого порядка удовлетворяется тождественно. Будем считать, что η_{n1} может быть выражена в виде ряда по собственным функциям нулевого порядка

$$\eta_{n1} = \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm}\cos m\pi\xi \tag{2.4}$$

Подставляя разложение (2.4) в уравнение (2.3), домножая полученное выражение на $\cos k\pi\xi$ и интегрируя по ξ от 0 до 1, получаем

$$\frac{\pi^2}{2}(n^2-k^2)C_{nk} = \int_0^1 f_n(\xi)\cos k\pi\xi\, d\xi - \mu_{n1}\int_0^1 \cos n\pi\xi\cos k\pi\xi\, d\xi$$

откуда определяются коэффициенты разложения и поправка к собственному числу

$$C_{nk} = \frac{2}{\pi^2(n^2-k^2)}\int_0^1 f_n(\xi)\cos k\pi\xi\, d\xi, \quad k\neq n$$

$$\mu_{n1} = 2\int_0^1 f_n(\xi)\cos n\pi\xi\, d\xi$$

Производя интегрирование и используя условие (1.2), получаем, что собственные функции и собственные числа краевой задачи (2.1) с точностью до членов порядка α имеют вид

$$\eta_n = \cos n\pi\xi - 2\alpha{\sum}'\frac{nk}{n^2-k^2}\left(\int_0^1\varphi(\xi)\sin n\pi\xi\sin k\pi\xi\, d\xi\right)\cos k\pi\xi$$

$$\omega_n = n\pi\left(1 + \frac{\alpha}{2}\int_0^1\varphi(\xi)\cos 2n\pi\xi\, d\xi\right)$$

Штрих в сумме означает, что $k\neq n$.

Отметим, что частоты собственных колебаний при наличии градиента стационарной плотности не составляют в общем случае гармонического ряда. В частности, степень негармоничности двух первых мод собственных колебаний, или их расстройка, равна

$$\omega_2 - 2\omega_1 = \pi\alpha\int_0^1(\cos 4\pi\xi - \cos 2\pi\xi)\varphi(\xi)\, d\xi$$

3. Нелинейное уравнение (1.1) в операторной форме представляется в виде

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2}-M\eta=P\eta+N(\eta,u),\qquad \left.\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right|_{s}=0 \tag{3.1}$$

где M — линейный самосопряженный оператор консервативной задачи, P — линейный оператор, включающий в себя только неконсервативные члены, N — нелинейный оператор.

Решение уравнения ищется методом вариации произвольных постоянных в сочетании с разложением по собственным функциям линейной консервативной задачи [2]

$$\eta=\frac{1}{2}\sum A_n\eta_n(\xi)\,e^{i\omega_n\tau}+K,\qquad u=\frac{i}{2}\sum\frac{1}{\omega_n}A_n\frac{d\eta_n}{d\xi}e^{i\omega_n\tau}+K \tag{3.2}$$

где K означает комплексно-сопряженную часть.

Коэффициенты разложения A_n будем считать медленно меняющимися функциями времени

$$\left|\frac{\partial A_n}{\partial\xi}\right|\ll\omega_n|A_n| \tag{3.3}$$

Подставим разложения (3.2) в уравнение (3.1), используя условие (3.3) и условие

$$M\eta_n+\omega_n^2\eta_n=0$$

Умножив полученное выражение на η_k, проинтегрировав по ξ от 0 до 1 и произведя замену $A_n=B_n\exp(-i\delta_n\tau)$, $\delta_n=\omega_n-n\pi$, получим

$$\frac{i\omega_k}{2}\left[\frac{\partial B_k}{\partial\tau}-(\alpha_k+i\delta_k)B_k\right]e^{ik\pi\tau}+K=$$

$$=-\frac{1}{8}\sum_{n,m}\left[c^{+}_{nmk}B_nB_me^{i(n+m)\pi\tau}+c^{-}_{nmk}B_nB_m{}^*e^{i(n-m)\pi\tau}\right]+K \tag{3.4}$$

Здесь * — знак комплексной сопряженности,

$$\alpha_n=\frac{1}{2}\Gamma\left(1-\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pe}\,\Gamma}n^2\pi^2\right),\qquad c^{\pm}_{nmk}=\int_0^1(a^{\pm}_{nm}-\omega_k{}^2b^{\pm}_{nm})\,\eta_k\,d\xi$$

$$a^{\pm}_{nm}(\xi)=(\omega_n\pm\omega_m)^2\left(\gamma\eta_n\eta_m\mp\frac{1}{\omega_n\omega_m}\frac{d\eta_n}{d\xi}\frac{d\eta_m}{d\xi}\right)$$

$$b^{\pm}_{nm}(\xi)=\eta_n\eta_m\pm\frac{1}{\omega_n\omega_m}\frac{d\eta_n}{d\xi}\frac{d\eta_m}{d\xi}$$

Приравнивая члены левой и правой частей уравнения (3.4), имеющие одну и ту же временную зависимость, получаем систему уравнений относительно коэффициентов B_n.

Для нахождения уровня акустических колебаний вблизи границы устойчивости ограничимся взаимодействием двух мод колебаний, первая из которых неустойчива по линейному приближению, а вторая затухает [1]. Для этого случая из (3.4) получаем систему двух уравнений

$$\frac{\partial B_1}{\partial\tau}=(\alpha_1+i\delta_1)B_1-\frac{c^{-}_{211}+c^{-}_{121}}{4i\omega_1}B_1{}^*B_2 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial \tau}=(\alpha_2+i\delta_2)B_2-\frac{\overset{+}{c}_{112}}{4i\omega_2}B_1^2$$

Вычисление коэффициентов уравнений системы (3.5) приводит с точностью до главных членов к выражениям

$$\overset{-}{c}_{211}+\overset{-}{c}_{121}=4\pi\beta+O(\alpha), \qquad \overset{+}{c}_{112}=8\pi\beta+O(\alpha)$$

где $\beta=\pi(\gamma+1)/8$ — коэффициент, близкий к единице.

Введя в рассмотрение действительные амплитуды и фазы, т. е. полагая $B_n=p_n \exp(i\theta_n)$, получаем

$$\frac{\partial p_1}{\partial \tau}=\alpha_1 p_1-\beta p_1 p_2 \sin\Delta, \qquad \frac{\partial p_2}{\partial \tau}=\alpha_2 p_2+\beta p_1^2 \sin\Delta$$
$$\frac{\partial \Delta}{\partial \tau}=\gamma_1+\beta\left(\frac{p_1^2}{p_2}-2p_2\right)\cos\Delta \tag{3.6}$$
$$\Delta=\theta_2-2\theta_1, \quad \gamma_1=\delta_2-2\delta_1=\omega_2-2\omega_1$$

Система (3.6) совпадает с полученной в [1] с той лишь разницей, что в указанной работе коэффициент γ_1, характеризующий степень негармоничности двух первых мод колебаний, обусловлен граничными импедансами, а здесь является следствием пространственной неоднородности стационарной плотности.

Пусть первая мода неустойчива по линейному приближению ($\alpha_1>0$), а вторая затухает за счет диссипации лучистой теплопроводностью ($\alpha_2<0$).

Стационарное решение системы (3.6) дается в виде

$$p_1=\frac{\sqrt{(1-x)(4x-1)}}{2\beta}A, \qquad p_2=\frac{1-x}{2\beta}A$$
$$A=\sqrt{\Gamma^2+\left(\frac{2}{3}\frac{\gamma_1}{2x-1}\right)^2}, \qquad x=\frac{\pi^2(\gamma-1)}{\mathrm{Pe}\,\Gamma} \tag{3.7}$$

Параметр x характеризует удаление системы от границы устойчивости: значение $x=1$ соответствует границе устойчивости, при $x<1$ основная мода неустойчива.

Если $\gamma_1\neq 0$, то уровень колебаний больше по сравнению со случаем пространственно-однородной среды ($\gamma_1=0$). Увеличение уровня колебаний вблизи границы устойчивости определяется отношением двух малых параметров: степени негармоничности колебаний γ_1 и параметра Γ, характеризующего усиление колебаний. Если γ_1 превышает Γ хотя бы в несколько раз, то уровень акустических колебаний, устанавливающийся в тепловыделяющей среде с градиентом плотности, примерно во столько же раз будет превосходить уровень, устанавливающийся в однородной среде. Указанное увеличение уровня происходит вследствие нарушения гармоничности колебаний, а искажение их пространственной формы по сравнению со случаем однородной среды не является определяющим.

4. Численный пример. Рассмотрим конкретный случай неоднородности газа. Пусть отклонение плотности от среднего значения задано в виде

$$\varphi(\xi)=\alpha\left(1-\frac{\pi}{2}\sin\pi\xi\right) \tag{4.1}$$

где α – малый параметр. При этом стационарная температура максимальна в среднем сечении канала и спадает к торцам.

Степень негармоничности двух первых мод колебаний составляет $|\gamma_1|=|\omega_2-2\omega_1|=4\pi\alpha/15$.

Для оценки влияния неоднородности среды на уровень акустических колебаний воспользуемся параметрами тепловыделяющей среды, приведенными в [3]: $p=5$ МПа, $\rho=4$ кг/м^3, $T=1{,}36\cdot10^4$ К, $\gamma=1{,}67$, $\rho\varepsilon=0{,}44\cdot10^6$ Вт/м^3, $\lambda=38$ Вт/м·К.

При указанных параметрах критическая длина волны колебаний составляет $\lambda_*=1$ м. Колебания с длиной волны больше критической являются неустойчивыми. Если длина канала превышает половину критической длины волны, т. е. более 0,5 м, то низшая мода колебаний неустойчива. Примем длину канала равной, например, 0,6 м, тогда вторая мода устойчива. При указанных значениях параметров среды и длине канала $x=0{,}69$ и $\Gamma=0{,}49\cdot10^{-3}$. При этом относительная амплитуда установившихся колебаний на первой моде для однородной среды, т. е. при $\gamma_1=0$, составляет $p_1=1{,}7\cdot10^{-4}$.

Пусть отклонение стационарной плотности от среднего значения задано в виде (4.1), и примем, например, параметр $\alpha=0{,}1$. В частности, это означает, что стационарная температура в центре канала на 6% выше, а у торцов на 10% ниже по сравнению со средним значением. При этом степень негармоничности составляет $|\gamma_1|=0{,}91\cdot10^{-1}$.

Амплитуда установившихся колебаний на первой моде, посчитанная по (3.7), составляет $p_1=0{,}59\cdot10^{-1}$, что существенно превышает уровень, полученный для пространственно-однородной среды.

Результаты, полученные в настоящей работе, а также в работе [1], позволяют сделать вывод о существенном влиянии степени негармоничности акустических мод колебаний на величину уровня, устанавливающегося при их нелинейном взаимодействии. А именно уровень колебаний возрастает при нарушении резонанса взаимодействующих мод, т. е. при появлении частотной расстройки. Сделанный вывод не зависит от физической причины, вызвавшей расстройку колебаний, будь то граничные импедансы или пространственная неоднородность среды.

Автор скорбит о безвременной кончине К. И. Артамонова, его внимание, поддержка и плодотворные идеи во многом способствовали развитию работ по взаимодействию неустойчивых акустических волн в тепловыделяющей среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артамонов К. И., Воробьев А. П.* Нелинейная стабилизация неустойчивых акустических колебаний в ограниченной тепловыделяющей среде.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 6, с. 34–41.
2. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
3. *McNeil H., Becker M.* Acoustic instabilities in a constant flux gas core nuclear rocket.–AIAA Journal, 1970, v. 8, No 2, p. 354–357. (Рус. пер. *Макнейл Г., Бекер М.* Акустическая неустойчивость газового реактора ядерного ракетного двигателя с постоянным нейтронным потоком.– Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, № 2, с. 203–208).

Москва

Поступила в редакцию 22.II.1982