

УДК 532.526

ЛАМИНАРНАЯ ЗАКРУЧЕННАЯ СТРУЯ С УЧЕТОМ СИЛ ПЛАВУЧЕСТИ

КОРОВКИН В. Н., СОКОВИШИН Ю. А.

Исследованию закрученных затопленных вязких струй посвящено большое количество работ, достаточно подробный анализ которых содержится в монографиях [1-3]. Тем не менее закрученные струи со свободной конвекцией остались неизученными. В настоящей статье найдено точное и приближенное автомодельное решение задачи о закрученной струе - источнике вязкой жидкости, распространяющейся вертикально вверх (вниз) под действием архимедовых сил и начального импульса.

1. Уравнения и граничные условия для описания движения осесимметричной закрученной струи с учетом сил плавучести в рамках модели ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости имеют вид [4-6]:

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \pm \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \theta^n \\
 \frac{\partial}{\partial x}(ru) + \frac{\partial}{\partial r}(rv) &= 0, \quad \frac{w^2}{r} = \frac{\partial P}{\partial r} \\
 u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{vw}{r} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} \\
 u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial r} &= \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\rho = \rho_\infty [1 - \beta(\Delta T)^n], \quad \text{Gr} = \frac{g\beta d^3 |T_0 - T_\infty|^n}{\nu^2}, \quad \text{Re} = \frac{u_0 d}{\nu}$$

$$r=0: \quad v = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial \theta}{\partial r} = w = 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad u, \theta, P, w \rightarrow 0 \tag{1.2}$$

Для нахождения нетривиального решения задачи (1.1) необходимо задание интегральных условий, которые получены путем интегрирования уравнений (1.1) с учетом граничных условий

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \int_0^\infty (u^2 + P) r \, dr &= \pm \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \int_0^\infty \theta^n r \, dr \\
 2\pi \int_0^\infty u \theta r \, dr &= Q_0, \quad 2\pi \int_0^\infty u w r^2 \, dr = L_0
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Система (1.1)–(1.3) записана в безразмерных переменных: u, v, w — составляющие вектора скорости, P, θ — избыточное давление и температура, x, r — продольная и поперечная координаты (в принятой системе координат ось x направлена вертикально вверх (вниз)). В качестве масштабных коэффициентов приняты: $u_0, (u_0 \nu / d)^{1/2}$ — скорость, $d, (d \nu / u_0)^{1/2}$ —

длина, $T_0 - T_\infty$ — температура, ρu_0^2 — давление; ν — коэффициент кинематической вязкости, g — ускорение силы тяжести, β , n — параметры среды [4], ρ — плотность, u_0 , T_0 — скорость и температура струи в начальном сечении, Gr , Re — числа Грасгофа и Рейнольдса. Отметим, что знаки плюс и минус в правой части первого уравнения (1.1) относятся к случаям, когда архимедовы подъемные силы соответственно способствуют (струя развивается вертикально вверх) и противодействуют (струя развивается вертикально вниз) вынужденному течению.

2. Найдем сначала приближенное автомодельное решение. Представим функцию тока ψ , скорость закрутки w , избыточное давление P и температуру θ в виде рядов

$$\begin{aligned} \psi(x, \eta) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i(\eta) x^{\alpha_i+2}, & \theta(x, \eta) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i d_i(\eta) x^{\alpha_i} \\ w(x, \eta) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i b_i(\eta) x^{\alpha_i-1}, & P(x, \eta) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i a_i(\eta) x^{\alpha_i-3} \\ \eta &= \frac{r^2}{4x^2}, & \varepsilon &= \pm 2 \frac{Gr}{Re^2}, & (3-n)i-1 &= \alpha_i \end{aligned} \quad (2.1)$$

Подставляя разложения (2.1) в уравнения (1.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (\eta f_0'')' + \frac{1}{2} (f_0 f_0')' &= 0 \\ \frac{1}{Pr} (\eta d_0')' + \frac{1}{2} (f_0 d_0)' &= 0 \\ (\eta b_0')' + \frac{1}{2} (f_0 b_0)' - \frac{1}{4\eta} b_0 (1-f_0) &= 0, & 2a_0' \eta &= b_0^2 \\ (\eta f_i'')' + \frac{1}{2} f_0 f_i'' - \frac{1}{2} (\alpha_i-1) f_0' f_i' + \frac{1}{2} (\alpha_i+2) f_0'' f_i &= N_i \\ \frac{1}{Pr} (\eta d_i')' + \frac{1}{2} f_0 d_i' - \frac{1}{2} \alpha_i f_0' d_i &= M_i \\ (\eta b_i')' + \frac{1}{2} f_0 b_i' - \frac{1}{2} \alpha_i f_0' b_i - \frac{1}{4\eta} b_i (1-f_0) &= K_i \\ 2\eta a_i' &= L_i, & L_i &= 2b_0 b_i + \sum_{j=1}^{i-1} b_j b_{i-j} \\ N_i &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} [(\alpha_i - \alpha_j - 1) f_j' f_{i-j}' - (\alpha_j + 2) f_j f_{i-j}''] - \Phi_i \\ M_i &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i [(\alpha_i - \alpha_j - 1) f_j' d_{i-j} - (\alpha_j + 2) f_j d_{i-j}'] \\ K_i &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i [(\alpha_i - \alpha_j - 1) f_j' b_{i-j} - (\alpha_j + 2) f_j (b_{i-j}' + \frac{1}{2\eta} b_{i-j})] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= d_0^n, & \Phi_2 &= n d_1 d_0^{n-1} \\ \Phi_3 &= n d_2 d_0^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} d_1^2 d_0^{n-2}, \dots & (i=1, 2, 3 \dots)\end{aligned}$$

Функции $f_0(\eta)$, $d_0(\eta)$, $b_0(\eta)$, $a_0(\eta)$ имеют вид [1, 7]

$$\begin{aligned}f_0 &= \frac{4\alpha\eta}{1+\alpha\eta}, & d_0 &= \frac{c_1}{(1+\alpha\eta)^{2Pr}}, & b_0 &= \gamma \frac{\sqrt{\alpha\eta}}{(1+\alpha\eta)^2} \\ a_0 &= -\frac{\gamma^2}{6} \frac{1}{(1+\alpha\eta)^3}, & \alpha &= \frac{3K_0}{16\pi}, & \gamma &= \frac{3\sqrt{\alpha}L_0}{8\pi}, & c_1 &= \frac{(2Pr+1)Q_0}{8\pi}\end{aligned}\quad (2.3)$$

Аналитическое решение системы (2.2) в общем случае едва ли возможно. Пусть $nPr=2$. Рассмотрим четвертое уравнение (2.2). Для его решения удобно перейти к новой переменной $z=(1+\alpha\eta)^{-1}$ и ввести новую функцию $y_i=z^4 f_i'''$.

Тогда для $y_i(z)$ получим уравнение

$$z(z-1)y_i'' + (2z+1)y_i' + 2(3-n)iy_i = z^3 \left(\frac{N_i}{\alpha^2 z^3} \right)''$$

Решение этого уравнения может быть представлено в виде суммы решений соответствующего однородного дифференциального уравнения и частного интеграла. Соответствующее этому уравнению однородное дифференциальное уравнение в общем случае не имеет ограниченных решений в интервале $0 < z < 1$, так как коэффициент при y_i не входит в число собственных значений гипергеометрического уравнения [8]: $-2(3-n)i = -k(k+1)$, $k=0, 1, 2, \dots$. Следовательно, единственным ограниченным решением однородного уравнения будет $y_i=0$. Заметим, что аналогичные результаты получаются и при анализе остальных уравнений. Таким образом, решение уравнений системы (2.2) сводится к нахождению их частных интегралов

$$\begin{aligned}f_{i+1} &= \lambda_i (f_i' \eta - 2if_i), & d_{i+1} &= \lambda_i (d_i' \eta - 2id_i) \\ b_{i+1} &= \lambda_i \left(b_i' \eta + \frac{1}{2}(1-4i)b_i \right), & a_{i+1} &= \lambda_i (a_i' \eta + (1-2i)a_i) \\ \lambda_i &= \frac{c_i^n}{8(3-n)(i+1)\alpha^2}, & i &= 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (2.4)$$

Тогда u , w , P , θ определяются следующими выражениями

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{2} \left\{ f_0' x^{-1} + x^{2-n} \sum_{i=0}^{\infty} [\lambda_i (f_i'' \eta + (1-2i)f_i') \varepsilon^{1+i} x^{\alpha i+1}] \right. \\ w &= b_0 x^{-2} + x^{2-n} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\lambda_i \left(b_i' \eta + \frac{1}{2}(1-4i)b_i \right) \varepsilon^{1+i} x^{\alpha i} \right] \\ \theta &= d_0 x^{-1} + x^{2-n} \sum_{i=0}^{\infty} [\lambda_i (d_i' \eta - 2id_i) \varepsilon^{1+i} x^{\alpha i+1}] \\ P &= a_0 x^{-4} + x^{2-n} \sum_{i=0}^{\infty} [\lambda_i (a_i' \eta + (1-2i)a_i) \varepsilon^{1+i} x^{\alpha i-2}]\end{aligned}\quad (2.5)$$

Заметим, что полученные решения (2.4) удовлетворяют соответствующим интегральным условиям

$$\int_0^{\infty} \left(f_0' d_i + \sum_{j=1}^i f_j' d_{i-j} \right) d\eta = 0$$

$$\int_0^{\infty} \left(f_0' b_i + \sum_{j=1}^i f_j' b_{i-j} \right) \eta^{1/2} d\eta = 0$$

$$(3-n) i \int_0^{\infty} \left(2f_0' f_i' + \sum_{j=1}^{i-1} f_j' f_{i-j}' \right) d\eta = 2 \int_0^{\infty} \Phi_i d\eta$$
(2.6)

3. Найдем точное автомодельное решение. Отметим, что степенная зависимость распределения характерных величин вдоль струи в виде

$$u \sim x^p, \quad r \sim x^q, \quad \theta \sim x^e, \quad P \sim x^s, \quad w \sim x^n$$

справедлива лишь на некотором, достаточно большом удалении от источника. Это обстоятельство объясняется тем, что получающееся при этом решение [9] не зависит от величины начального импульса K_0 , что, вообще говоря, характерно для течений над точечными или линейными источниками тепла [10]. В настоящей работе рассмотрен другой способ получения функций распределения характерных величин вдоль струи, изложенный в [11, 12]. Предположим, что исходные функции тока, температуры, давления и закрутки, представлены в виде

$$\psi(x, \eta) = f(\eta) p(x), \quad \theta(x, \eta) = d(\eta) \varepsilon(x)$$
(3.1)

$$w(x, \eta) = b(\eta) \omega(x), \quad P(x, \eta) = a(\eta) \kappa(x), \quad \eta = \frac{r^2}{4} q(x)$$

Применяя преобразования (3.1) к уравнениям системы (1.1), получим

$$\begin{aligned} (\eta f_{\eta\eta})_{\eta} p q^2 + \frac{1}{2} f f_{\eta\eta} p q^2 p_x - \frac{1}{2} f_{\eta}^2 p q (p q)_x \pm 2 \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \varepsilon^n d^n = 0 \\ \frac{1}{\text{Pr}} (\eta d_{\eta})_{\eta} q \varepsilon + \frac{1}{2} f d_{\eta} q \varepsilon p_x - \frac{1}{2} f_{\eta} d p q \varepsilon_x = 0 \\ (\eta b_{\eta})_{\eta} q \omega + \frac{1}{2} f b_{\eta} q \omega p_x - \frac{1}{2} f_{\eta} d p q \omega_x + \frac{1}{4} f_{\eta} b p q \omega + \\ + \frac{1}{4\eta} f b q \omega p_x - \frac{1}{4\eta} b q \omega = 0, \quad b^2 \omega^2 = 2\eta a_{\eta} \kappa \end{aligned}$$
(3.2)

Рассмотрим первые два уравнения системы (3.2) при $n \text{Pr} = 2$. Выберем коэффициенты переменными

$$\begin{aligned} p q^2 = A(x) [1 + m(x) \varphi(x)], \quad p q^2 p_x = B(x) [1 + k(x) \varphi(x)] \\ p q (p q)_x = C(x) [1 + l(x) \varphi(x)], \quad \varphi(x) = \pm \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \frac{c_1^n}{8\alpha^2} \varepsilon^n \end{aligned}$$

Тогда два первых уравнения системы (3.2) допускают решение вида

$$f = \frac{4\alpha\eta}{1+\alpha\eta}, \quad d = \frac{c_1}{(1+\alpha\eta)^{2\text{Pr}}}, \quad p = x, \quad \varepsilon = x^{-1}$$

$$q = x^{-2} \sqrt{1 \pm \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \frac{c_1^n}{2(3-n)\alpha^2} x^{3-n}}, \quad \alpha = \frac{3K_0}{16\pi}, \quad c_1 = \frac{(2\text{Pr}+1)Q_0}{8\pi}$$
(3.3)

Учитывая (3.3), находим решение остальных уравнений

$$b = \gamma \frac{\sqrt{\alpha\eta}}{(1+\alpha\eta)^2}, \quad a = -\frac{\gamma^2}{6} \frac{1}{(1+\alpha\eta)^3}, \quad \omega = \frac{\sqrt{q}}{p}, \quad \gamma = \frac{q}{p^2}, \quad \gamma = \frac{3\sqrt{\alpha}L_0}{8\pi} \quad (3.4)$$

Окончательно, собирая полученные результаты, приходим к виду расчетных формул составляющих вектора скорости u , w , давления P и температуры θ в закрученных вертикальных струях

$$u = \frac{2\alpha}{(1+\alpha\eta)^2} xq, \quad w = \gamma \frac{\sqrt{\alpha\eta}}{(1+\alpha\eta)^2} \sqrt{q} x^{-1} \quad (3.5)$$

$$P = -\frac{\gamma^2}{6} \frac{1}{(1+\alpha\eta)^3} qx^{-2}, \quad \theta = \frac{c_1}{(1+\alpha\eta)^{2Pr}} x^{-1}$$

4. При анализе соотношений (3.5) необходимо рассматривать два случая. В первом, когда температура струи ниже, чем температура среды, струя, движущаяся вертикально вниз под действием сил плавучести, подтормаживается и имеет сечение, где струя полностью размывается

$$x_* = \left(\frac{Gr}{Re^2} \frac{c_1^n}{2(3-n)\alpha^2} \right)^{1/(n-3)}$$

при этом $\theta(x_*, \eta)$ имеет конечное значение. Во втором случае температура струи выше температуры среды. В результате непрерывного действия подъемных сил пробивная способность струи, развивающейся вертикально вверх, увеличивается

$$E_0 = \pi \int_0^\infty u^2 r dr \sim$$

$$\sim x^{-1} \left[1 + \frac{Gr}{Re^2} \frac{c_1^n}{2(3-n)\alpha^2} x^{3-n} \right]$$

Здесь E_0 — поток кинетической энергии.

Нетрудно показать, что решения (2.4)

как для f_i , d_i , b_i , a_i , так и для всех последующих f_i , d_i , b_i , a_i легко получаются из точного решения (3.5). Действительно, решения (3.5), например для функции тока ψ , в обозначениях (2.1) представимы в виде $\psi = f_0(\eta q x^2)x$. Разлагая это решение в ряд по $t = \pm 2(Gr/Re^2)x^{3-n}$

$$\psi^\circ = \psi/x = (\psi^\circ)_{t=0} + \left(\frac{\partial \psi^\circ}{\partial t} \right)_{t=0} \cdot t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi^\circ}{\partial t^2} \right)_{t=0} \cdot t^2 + \dots$$

получаем в нулевом и первом приближениях

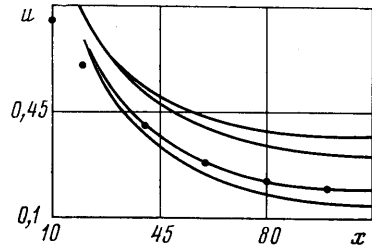
$$(\psi^\circ)_{t=0} = f_0(\eta), \quad \left(\frac{\partial \psi^\circ}{\partial t} \right)_{t=0} = f_1(\eta) = \frac{c_1^n}{8(3-n)\alpha^2} f_0' \eta \text{ и т. д.}$$

Таким образом, ряды (2.5) сходятся к (3.5) при всех

$$\left| \frac{Gr}{Re^2} \frac{c_1^n}{2(3-n)\alpha^2} x^{3-n} \right| \ll 1$$

При $Gr/Re^2 = 0$ формулы (3.5) переходят в выражения (2.3) для закрученной струи без учета сил плавучести [1, 7].

Полученные соотношения (3.5) называют обобщенными автомодельными решениями. Существенным достоинством данных выражений является возможность расчета вертикальной закрученной струи при заданном импульсе K_0 в начальном сечении. Кроме того, автомодельные решения естественной конвекции из (3.5) получаются как частный случай ($x \rightarrow \infty$)



$$u = \frac{2\alpha}{(1+\alpha\eta)^2} x^{(1-n)/2}, \quad w = \gamma \frac{\sqrt{\alpha\eta}}{(1+\alpha\eta)^2} x^{-(5+n)/4} \quad (4.1)$$

$$P = -\frac{\gamma^2}{6(1+\alpha\eta)^3} x^{-(5+n)/2}, \quad \theta = \frac{c_1}{(1+\alpha\eta)^{2Pr}} x^{-1}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{Gr}{Re^2} \frac{c_1^n}{2(3-n)}}, \quad c_1 = \frac{(2Pr+1)Q_0}{8\pi}, \quad \gamma = \frac{3\sqrt{\alpha}L_0}{8\pi}$$

Из (4.1) можно вывести следующие теоретические законы затухания закрученных струй для зоны свободно конвективного потока:

$$u \sim x^{1/2(1-n)}, \quad w \sim x^{-1/4(5+n)}, \quad P \sim x^{-1/2(5+n)}, \quad \theta \sim x^{-1}$$

Отметим, что температура на оси струи, определяемая формулами (2.5) и (3.5), не зависит от числа Gr/Re^2 .

На фигуре представлено изменение максимальных скоростей вдоль оси струи при различных числах Gr/Re^2 ($n=1$, $Pr=2$). Кривые 1-4 соответствуют следующим значениям параметра $N=c_1Gr/(4\alpha^2 Re^2)=0; 0,75 \cdot 10^{-4}; 5 \cdot 10^{-4}; 5 \cdot 10^{-4}$. Как видно из фигуры, при небольших числах x струя ведет себя подобно струйному течению без влияния архимедовых сил. При увеличении x характеристика затухания $u(x, 0)$ на оси начинает отклоняться от той, которая соответствует неплавучей струе. Здесь же точками нанесены результаты численных решений [13]. Фигура так же сопоставляет полученные точное (кривая 3) и приближенное (кривая 4) аналитические решения.

Вычисление $u(x, 0)$ по формуле (2.5) проводилось с помощью нелинейного преобразования [14]

$$e_1(S_i) = \frac{S_{i+1}S_{i-1} - S_i^2}{S_{i+1} + S_{i-1} - 2S_i} \quad (4.2)$$

(S_i - частичные суммы числовой последовательности) к первым трем слагаемым ряда, которое давало лучшее совпадение с точным решением (3.5), чем арифметическое суммирование. Преимущество использования преобразования (4.2) в том, что величина $e_1(S_i)$ может сходиться значительно быстрее, чем S_i . Кроме того, когда в некоторых случаях S_i не сходится, величина $e_1(S_i)$ может сходиться к аналитическому продолжению сумм сходящегося ряда (2.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М.: Наука, 1965. 431 с.
2. Азмедов Р. Б., Балагула Т. Б., Рашидов Ф. К., Сакаев А. Ю. Аэродинамика закрученной струи. М.: Энергия, 1977. 240 с.
3. Гольдштик М. А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
4. Gebhart V. Buoyancy induced fluid motions characteristic of applications in technology. - Trans. Asme. J. Fluid Eng., 1979, v. 101, № 1, p. 5-28.
5. Mollendorf J. C., Gebhart V. An experimental and numerical study of the viscous stability of a round laminar vertical jet with and without thermal buoyancy for symmetric and asymmetric disturbances. - J. Fluid Mech., 1973, v. 61, № 2, p. 367-399.
6. Mollendorf J. C., Johnson R. S., Gebhart V. Several plume flows in pure and saline water at its density extremum. - J. Fluid Mech., 1981, v. 113, p. 269-282.
7. Лойцянский Л. Г. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью. - ПММ, 1953, т. 17, № 1, с. 3-16.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1965. 294 с.
9. Yih C.-S., Wu F. Round buoyant laminar and turbulent plumes. - Phys. Fluids, 1981, v. 24, № 5, p. 794-801.
10. Тернер Д. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с.
11. Рус В. В., Соколович Ю. А., Степанов В. Ф. Свободная конвекция в затопленной плоской струе. - Инж.-физ. ж., 1969, т. 16, № 4, с. 647-652.
12. Moreau R. M. Jet libre, plan laminaire, d'un fluide incompressible en presence d'un champ magnetique transversal. - Compt. Rend. Acad. Sci., Paris, 1963, v. 256, № 11, p. 2294-2296; № 23, p. 4849-4852.
13. Küblebeck K., Straub J., Bloß S., Criquell U. Experimentall und numerische Untersuchung laminarer axisymmetrischer Freistrahlen mit und ohne Auftrieb. - Wärme- und Stoffübertrag, 1978, v. 11, № 2, p. 131-144.
14. Shanks D. J. Non-linear transformations of divergent and slowly convergent sequences. - J. Math. Phys., 1955, v. 34, № 1, p. 1-42.

Новополоцк, Ленинград

Поступила в редакцию
18.III.1982