

УДК 532.517.2+534.2

НЕЛИНЕЙНОЕ РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ С ВОЛНАМИ ТОЛЛМИНА — ШЛИХТИНГА

ЕЗЕРСКИЙ А. Б.

Исследование взаимодействия акустических полей со сдвиговыми течениями представляет интерес с точки зрения выяснения возможностей снижения аэродинамического шума [1], увеличения дальности струй [2], управления пограничными слоями [3]. Для решения этих вопросов необходимо выяснить элементарные механизмы взаимодействия акустических и гидродинамических возмущений. Известно, что звуковые волны могут трансформироваться в волны Толлмина — Шлихтинга (ТШ) на неоднородностях — острых кромках, краях обтекаемых пластин [3] — или из-за вязких напряжений [4]. В этих случаях воздействие звука наиболее эффективно тогда, когда его частота совпадает с частотой гидродинамических возмущений. Если течение дозвуковое, то скорость распространения гидродинамических возмущений значительно меньше скорости акустических волн. Тогда при совпадении частот длины волн сильно различаются и взаимодействие происходит локально. Накопивающиеся по пространству и времени взаимодействия можно организовать за счет нелинейных эффектов. При этом в резонансе с волной ТШ, частота которой ω_T , а волновое число k_T , будет складываться комбинационное возмущение, возникающее в результате нелинейного сложения высокочастотных звуковых волн (ω_1, k_1), (ω_2, k_2)

$$\omega_T = \omega_2 - \omega_1, \quad |k_T|^2 = k_T(k_2 - k_1)$$

Такой механизм взаимодействия изучается в настоящей работе. Нелинейные взаимодействия акустических мод при упрощающих предположениях — жидкость считалась невязкой, а профиль скорости сдвигового потока кусочно-линейным — исследовались ранее в [5]. В данной статье изучается взаимодействие звука и волн ТШ в потоках вязкой жидкости — в пограничном слое с профилем Блазиуса и в течении Пуазейля в плоском канале. Для этих течений исследованы основные эффекты: возбуждение волн ТШ с помощью ультразвуковых полей, рассеяние звуковых волн на волнах ТШ. Как показали оценки, такие эффекты могут быть использованы для управления переходом к турбулентности и для акустической диагностики волн ТШ.

1. При исследовании нелинейных взаимодействий будем считать, что характерная скорость потока U_0 много меньше скорости звука c : $U_0/c = M \ll 1$. В связи с тем что частота и скорости распространения звуковых волн и волн ТШ значительно различаются, можно сделать ряд упрощений. Так, можно пренебречь влиянием вязкости на структуру акустической волны. Действительно, при $M \ll 1$ учет малой вязкости, приводящей к затуханию акустических волн, необходим только на небольших расстояниях δ от твердых стенок ($\delta < (\nu/\omega_{1,2})^{1/2}$, ν — кинематическая вязкость), но здесь малы гидродинамические поля, следовательно, отсутствует взаимодействие. Потому для звуковых волн будем исходить из двумерных уравнений Эйлера, непрерывности и условия баротропности.

Для волн ТШ учет вязкости принципиален как для вычисления пространственной структуры полей в этих волнах, так и для определения инкремента, но при $M \ll 1$ сжимаемость жидкости несущественна.

С учетом сделанных предположений запишем уравнения для акустических (1.1)–(1.3) и гидродинамических (1.4)–(1.6) волн в первом порядке по теории возмущений

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + U(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} v \right) + c^2 \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} - \rho_0 \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.1)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + U(y) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + c^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - \rho_0 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U(y) \frac{\partial \rho}{\partial x} = - \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \quad (1.3)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + U(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial U(y)}{\partial y} v \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho_0 v \times$$

$$\times \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} - \rho_0 \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.4)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + U(y) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} - \rho_0 v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) =$$

$$= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - \rho_0 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (1.5)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \quad (1.6)$$

Здесь $U(y)$ — скорость основного потока, u, v — компоненты возмущения скорости, c^2 — скорость звука.

Рассмотрим возбуждение волн ТШ в пограничном слое с профилем скорости Блазиуса (фиг. 1). Акустические волны, падающие на пластину под углами θ_1 и θ_2 , можно записать через квазипотенциал φ_1 (см. [6]), если $M \ll 1$, а завихренность потока $|\Omega| = |\text{rot } U| \ll \omega_{1,2}$

$$u = \nabla \varphi_1 - \int [\text{rot } U \times \nabla \varphi] dt \quad (1.7)$$

Здесь φ — потенциал звуковых волн при отсутствии сдвига скорости. Из (1.7) имеем

$$u_{1,2} = \mp c^2 \frac{k_{1,2x}}{\omega_{1,2}} A_{1,2} \cos(k_{1,2y} y) E_{1,2} + O(M)$$

$$v_{1,2} = c^2 \frac{k_{1,2y}}{i\omega_{1,2}} A_{1,2} \sin(k_{1,2y} y) E_{1,2} + O(M)$$

$$\rho_{1,2} = \rho_0 A_{1,2} \cos(k_{1,2y} y) E_{1,2} + O(M)$$

$$E_{1,2} = e^{i(\omega_{1,2} t - k_{1,2x} x)}, \quad k_{1,2y} = k_{1,2} \cos \theta_{1,2}$$

$$k_{1,2} = k_{1,2} \sin \theta_{1,2}$$

Здесь $O(M)$ — добавки к плоским волнам, вызванные сдвигом скорости. Эти добавки являются определяющими при нелинейном взаимодействии волн.

Рассчитаем возбуждение волны ТШ распределенной внешней силой, возникающей из-за нелинейного сложения акустических волн. Из системы (1.4)–(1.6) для функции тока Ψ_T получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi_T - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Psi_T - v \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \Psi_T =$$

$$= u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) +$$

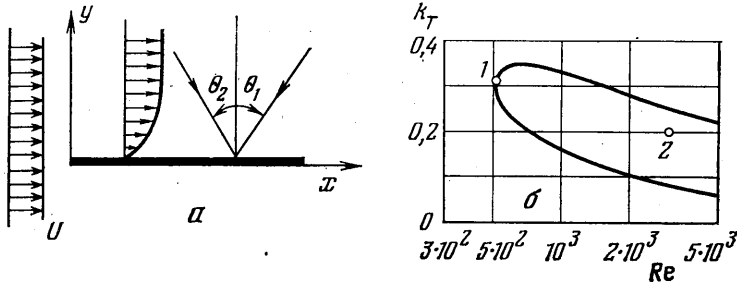
$$+ \frac{\partial U}{\partial y} \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \frac{\Delta}{\rho_0} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{1}{\rho_0}$$

$$\frac{\partial \Psi_T}{\partial x} = -v_T, \quad \frac{\partial \Psi_T}{\partial y} = u_T \quad (1.8)$$

Здесь u, v, p относятся к звуковым волнам, а u_T, u_T^- — к волне ТШ. Воспользовавшись (1.7), преобразуем правую часть (1.8) к виду

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \left(u \int \frac{\partial v}{\partial x} dt + v \int \frac{\partial v}{\partial y} dt \right) \quad (1.9)$$

Отметим, что при взаимодействии волн в потоке с кусочно-линейным профилем скорости воздействие акустических волн на волны течения сосредоточено на поверхности раздела жидкостей различной завихренности [5]. Этот результат получается из (1.9) как частный случай.



Фиг. 1

Подставляя в (1.8) функцию ψ_T в следующем виде, получим для $\psi(y)$ краевую задачу

$$\begin{aligned} \psi_T &= A_T(X, T) \psi(y) E_T + \mu \psi_{1T} + \mu^2 \psi_{2T} + \dots, \quad E_T = e^{i(\omega_T t - k_T x)} \\ i(\omega - k_T U) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_T^2 \right) \psi - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \psi - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} - 2k_T^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k_T^4 \psi \right) &= 0 \\ \psi(0) = \psi'(0) = \psi(\infty) = \psi'(\infty) &= 0, \quad \psi''(0) = 1 \end{aligned}$$

Здесь μ — малый параметр порядка u/U_0 , $X = \mu x$, $T = \mu t$ — медленные координаты и время, ψ_{1T}, ψ_{2T} — добавки. Уравнение (1.8) в первом порядке по μ имеет вид (волны ТШ считаются нейтрально устойчивыми)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \psi_{1,T}}{\partial T} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_{1,T}}{\partial x} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \psi_{1,T} &= \\ = \frac{\partial A}{\partial T} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_T^2 \right) \psi(y) - \frac{\partial A_T}{\partial X} \left(U \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 3k_T^2 \right) \psi(y) \right) - \\ - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \psi(y) + \frac{4ik_T}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_T^2 \right) \psi - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \left(u \int \frac{\partial v}{\partial x} dt + v \int \frac{\partial v}{\partial y} dt \right) & \\ x_H = \frac{x}{\delta^*}, \quad t_H = \frac{tU}{\delta^*}, \quad U_H = \frac{U}{U_0} & \quad (1.10) \end{aligned}$$

Здесь δ^* — толщина вытеснения в пограничном слое, U_0 — скорость набегающего на пластину потока. Для сокращения записи индексы H опущены.

Представим добавки в виде $\psi_{1T} = \psi_1(y) E_T$.

Для того чтобы ψ_{1T} была ограничена, необходимо, чтобы компонента правой части $e^{i(\omega_T t - k_T x)}$ (1.10) была ортогональна решению сопряженной задачи ψ^+

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_T^2 \right) (i\omega_T - ik_T U) \psi^+ - ik_T \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \psi^+ + \\ + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^4 \psi^+}{\partial y^4} - 2k_T^2 \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial y^2} + k_T^4 \psi^+ \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\psi^+(0) = \psi^{+'}(0) = \psi^+(\infty) = \psi^{+'}(\infty) = 0, \quad \psi^{+''}(0) = 1$$

Из этих условий получаем

$$\frac{\partial A_T}{\partial T} + v_T \frac{\partial A_T}{\partial X} = i\sigma_T A_1^* A_2$$

$$v_g = \left(\int_0^{\infty} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 3k_T^2 \psi \right) \psi^+ dy - \int_0^{\infty} U_{vv}'' \psi \psi^+ dy \right) \times$$

$$\times \left(\int_0^{\infty} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - k_T^2 \psi \right) \psi^+ dy \right)^{-1} + \frac{4ik_T}{\text{Re}}$$

$$\sigma_T = \frac{1}{M} \left(\int_0^{\infty} U_{vv}'' \Phi \psi^+ dy \right) \left(\int_0^{\infty} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - k_T^2 \psi \right) \psi^+ dy \right)^{-1}$$

$$\Phi = \beta_1 \beta_2 [-\cos(k_1 \alpha_1 y) \sin(k_2 \alpha_2 y) \alpha_2 + \cos(k_2 \alpha_2 y) \sin(k_1 \alpha_1 y) \alpha_1] +$$

$$+ \alpha_1 \alpha_2 [\sin(k_2 \alpha_2 y) \cos(k_1 \alpha_1 y) \alpha_1 - \sin(k_1 \alpha_1 y) \cos(k_2 \alpha_2 y) \alpha_2]$$

$$\alpha_{1,2} = \cos \theta_{1,2}, \quad \beta_{1,2} = \sin \theta_{1,2}$$

Здесь v_g — групповая скорость волн ТШ, σ_T — коэффициент воздействия звукового поля, A_1, A_2 — акустические махи звуковых волн.

Приведем некоторые оценки. Пусть волна с меньшей частотой ω_1 падает на пластину под углом $\theta_1 = \pi/4$ (фиг. 1, а). Угол падения второй волны θ_2 можно изменять в пределах $-\pi/4 < \theta_2 \leq \pi/2$. Условия синхронизма могут быть выполнены при любом из этих углов, если частоты звуковых волн равны

$$\omega_1 = ck_T / (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \quad \omega_2 = \omega_1 + \omega_T$$

Зависимости коэффициента σ_T от θ_2 для двух различных волн ТШ (точки 1 и 2 на фиг. 1, б) представлены на фиг. 2. Кривая 1 соответствует нейтрально устойчивой волне ТШ с $k_T = 0,309$ при $\text{Re} = 519$, а кривая 2 — неустойчивой волне ТШ, $k_T = 0,2$, $\text{Re} = 3000$. Приведем оценку интенсивности индуцированных звуком волн ТШ. Пусть, например, скорость воздушного потока $U_0 = 7$ м/с ($M = 0,02$). Толщина вытеснения δ^* при этом на расстоянии 50 см от края пластины равна $\delta^* = 1,72 (vx/U_0)^{0,5} = 0,18$ см, амплитуда акустических волн, падающих на пластину под углами $\theta_1 = 45^\circ$ и $\theta_2 = -32^\circ$, равна $A_1 = A_2 = 3 \cdot 10^{-3}$, что соответствует 145 дБ от уровня слышимости $2 \cdot 10^{-5}$ Па. Тогда под действием ультразвуковых волн с частотами 52,485 и 52,563 Гц амплитуда скорости волны ТШ с частотой 78 Гц (точка 1 на фиг. 1, б) нарастает на длине 20 см до $0,025 U_0$ (17,5 см/с), что достаточно для перехода к турбулентности. Отметим, что переход к турбулентности происходит, если амплитуда скорости волны ТШ в пограничном слое или в течении Пуазейля достигает 1,5–2,5% от U_0 [7, 8].

Для неустойчивых волн (точка 2 на фиг. 1, б) оценка условий перехода к турбулентности следующая. При скорости потока 34 м/с ($M = 0,1$) на расстоянии 150 см от края пластины ($\text{Re} = 3000$) при интенсивности звуковых волн 145 дБ переход к турбулентности происходит на расстоянии 30 см. Таким образом, с помощью интенсивных ультразвуковых полей можно индуцировать переход к турбулентности в реальных пограничных слоях.

2. В пограничном слое звуковые волны покидают область нелинейного взаимодействия и для них отсутствуют накапливающиеся по пространству эффекты. Такие эффекты будут, если организовать взаимодействие акустических и гидродинамических волн в канале, являющемся одновременно акустическим волноводом. Если на концах канала поддерживать постоянную разность давлений, то устанавливается параболический профиль скорости

$$U(y) = U_0 (1 - (y/\delta)^2) \quad (2.1)$$

В канале с жесткими стенками в нулевом по числу Маха приближении распространяются звуковые моды

$$\omega_1 = c \sqrt{k_1^2 + (\pi/2\delta)^2}, \quad \omega_2 = ck_2$$

Эти моды и волна ТШ образуют резонансную тройку. Если считать, что амплитуда звуковых волн является функцией медленных координат

и времени, то получим

$$\frac{\partial A_1}{\partial T} + \frac{1}{M} \frac{k_1}{k_2} \frac{\partial A_1}{\partial X} = i\sigma_1 A_2 A_T^*, \quad \frac{\partial A_2}{\partial T} + \frac{1}{M} \frac{\partial A_2}{\partial X} = i\sigma_2 A_1 A_T \quad (2.2)$$

$$\sigma_1 = -\frac{\pi}{2} k_1 I^*, \quad \sigma_2 = -\frac{\pi}{4} k_1 \frac{2kk_1 + 2kk_2 + k_2^2}{k_2^2} I$$

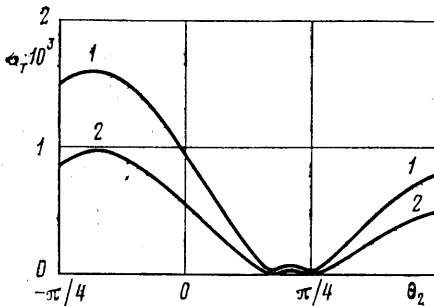
$$I = \int_{-1}^1 \psi \cos \frac{\pi}{2} y dy$$

Систему (2.2) нужно дополнить еще уравнением для амплитуды волны ТШ, которое получается так же, как для волн в пограничном слое

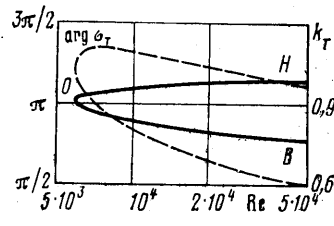
$$\frac{\partial A_T}{\partial T} + v_g \frac{\partial A_T}{\partial x} = i\sigma_T A_2 A_1^* \\ \sigma = \frac{1}{M} \frac{\pi k_1}{k_2} \left(\int_{-1}^1 \cos \left(\frac{\pi}{2} y \right) \psi^+ dy \right) \left(\int_{-1}^1 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - k_T^2 \psi \right) \psi^+ dy \right)^{-1} \quad (2.3)$$

Здесь использованы безразмерные переменные: за масштаб длины принята полуширина канала δ , за масштаб времени — δ/U_0 .

Система уравнений (2.2), (2.3) описывает трехволновое взаимодействие в канале, причем коэффициенты $\sigma_T, \sigma_{1,2}$ — комплексные. Заменой переменных $a_2 = \sigma_1 A_1$ можно сделать так, чтобы комплексным был один коэффициент σ_T . Если $\arg \sigma_T = 0$, то взаимодействие происходит так же, как в



Фиг. 2



Фиг. 3

консервативной среде, если $\arg \sigma_T = \pi$, то распадается, т. е. существенно уменьшать амплитуду будет не высокочастотная, а низкочастотная звуковая волна [9] (такой распад происходит в потоках с кусочно-линейным профилем скорости [5]). В данном случае среда диссипативная ($\arg \sigma_T$ может лежать в интервале от 0 до 2π), вследствие этого волновая энергия при взаимодействии не сохраняется. Изменение фазы коэффициента взаимодействия для волн ТШ, соответствующих нейтральной кривой (фиг. 3, штриховая линия), представлено на фиг. 3 сплошной линией, причем участок OH соответствует нижней ветви нейтральной кривой, а OB — верхней. Интересным является тот факт, что волны ТШ, соответствующие носу нейтральной $Re=5880, k_T=1,02$, взаимодействуют со звуковыми модами так же, как волны потока в течении с кусочно-линейным профилем.

Приведем оценки некоторых процессов, возможных при взаимодействии звуковых волн с волной ТШ в течении Пуазейля. Параметры течения возьмем из эксперимента [8]: скорость воздушного потока до 15 м/с, ширина канала 1,5 см ($Re \leq 8000$), длина 6 м.

С помощью акустических волн можно индуцировать переход к турбулентности. Так, при интенсивности звуковых волн 145 дБ с частотами $f_1 =$

$=13\ 000$, $f_2=13\ 070$ Гц переход от ламинарного режима к турбулентному при $Re=6000$ происходит на длине 2,5 м. Переход к турбулентности не наблюдается, если волны ТШ не возбуждать искусственно, так как в этом эксперименте очень малы начальные возмущения потока.

Для диагностики волн потока можно использовать рассеяние звуковых волн на волнах ТШ. Если, например, амплитуда звуковой волны с частотой $f_1=13$ кГц составляет 125 дБ, а амплитуда волны ТШ с частотой 70 Гц составляет 5 см/с ($\sim 0,4\% U_0$), то при $Re=6000$ амплитуда рассеянной звуковой волны с частотой $f_2=13\ 070$ Гц на расстоянии 75 см возрастает до 80 дБ.

Для диагностики нейтрально устойчивых волн ТШ, соответствующих носу нейтральной кривой $k_T=1,02$, $Re=5880$, можно использовать также распад низкочастотной звуковой волны на высокочастотную звуковую волну и волну ТШ. Обратный инкремент такого распада при интенсивности звуковой волны с частотой 13 кГц 140 дБ составляет 1,5 м.

В заключение автор выражает признательность М. И. Рабиновичу и А. Л. Фабриканту за полезные замечания, а Н. А. Завольскому за проведение численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гиневский А. С., Власов Е. В., Колесников А. В. Аэроакустические взаимодействия. М.: Машиностроение, 1978. 177 с.
2. Rocklwell D. O. The macroscopic nature of jet flows subjected to small amplitude periodic disturbances.— Chem. Engng Progr. Symp. Ser., 1971, v. 67, № 109, p. 99–107.
3. Довгаль А. В., Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я., Максимов В. П. Возникновение возмущений в пограничном слое.— В кн.: Развитие возмущений в пограничном слое. Новосибирск, 1979, с. 4–23.
4. Tam C. K. W. The excitation of Tollmien-Schlichting waves in low subsonic boundary layers by free-stream sound waves.— J. Fluid Mech., 1981, v. 109, p. 483–501.
5. Езерский А. Б. Нелинейное резонансное взаимодействие акустических вихревых волн в сдвиговых течениях.— Акуст. ж., 1981, т. 17, № 5, с. 741–748.
6. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 206 с.
7. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M. The three-dimensional nature of boundary-layer instability.— J. Fluid Mech., 1962, v. 12, № 1, p. 1–34.
8. Nishioka M., Iida S., Ichikawa Y. An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow.— J. Fluid Mech., 1975, v. 72, № 4, p. 731–751.
9. Рабинович М. И., Реутов В. П. Взаимодействие параметрически связанных волн в неравновесных средах.— Изв. вузов. Радиофизика, 1973, т. 16, № 6, с. 815–839.

Горький

Поступила в редакцию
15.XII.1981