По мере дальнейшего увеличения разреженности для высот $H=110$ км наблюдается тенденция к значительному преимуществу характеристик осесимметричных конфигураций по сравнению с характеристиками звездчатых тел. Наконец, на высотах $H=130$ км, где течение при гиперзвуковых скоростях с числом $M\approx20$ становится по свойствам близким к гиперзвуковому свободномолекулярному, характеристики всех геометрических конфигураций по лобовому сопротивлению незначительно различаются между собой, для теплопотока это различие более существенно.

Приведенные результаты расчета косвенно подтверждаются экспериментальными исследованиями [8], в которых было отмечено, что осесимметричные графитовые головки баллистических снарядов в плотных слоях земной атмосферы, аблируя, принимают форму складчатой поверхности, подобной звездообразным телам с затуплением.

Вследствие принятого в расчетах малого значения температурного фактора ($t_w=0{,}01$) влиянием вторичных течений и многократных отражений, возникающих на боковой поверхности звездчатых тел, на суммарные аэродинамические и тепловые характеристики можно пренебречь.

На основе проведенных расчетов можно сформулировать следующие выводы.

Звездчатые конфигурации среднего и большого удлинения с числом лучей 3, 4 при числах $M\approx20$ эффективны в относительно плотном газе (в атмосфере Земли до высот порядка 70 км).

С увеличением степени разреженности предпочтительными являются осесимметричные тела с плоским круговым притуплением, либо частично оптимальные тела звездчатой формы с малым числом лучей ($n=2$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гонор А. Л., Крайко А. Н.* Некоторые результаты исследования оптимальной формы при сверх- и гиперзвуковых скоростях.– В кн.: Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969, с. 456–489.
2. *Ведерников Ю. А., Гонор А. Л., Зубин М. А., Остапенко Н. А.* Аэродинамические характеристики звездообразных тел при числах $M=3-5$.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 4, с. 88–93.
3. *Гусаров А. А., Дворецкий В. М., Иванов М. Я., Левин В. А., Черный Г. Г.* Теоретическое и экспериментальное исследование аэродинамических характеристик пространственных тел.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 3, с. 97–102.
4. *Бунимович А. И.* Соотношения между силами, действующими на тела, движущиеся в разреженном газе, в потоке света и в гиперзвуковом ньютоновском потоке.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 4, с. 89–95.
5. *Галкин В. С., Ерофеев А. И., Толстых А. И.* Приближенный метод расчета аэродинамических характеристик тел в гиперзвуковом потоке разреженного газа.– Тр. ЦАГИ, 1977, вып. 1833, с. 6–10.
6. *Кузьменко В. И.* Приближенный метод расчета конвективного теплообмена при гиперзвуковом обтекании разреженным газом.– В кн.: Динамика разреженного газа и пограничного слоя, с. 33–41. ВИНИТИ, № 4218–80 ДЕП 25.09.1980.
7. Таблицы стандартной атмосферы. ГОСТ 4401-64.
8. *Реда Д. К., Рейпер Р. М.* Экспериментальное исследование асимметрии фронта перехода на поверхности аблирующего наконечника, движущегося с гипервуковой скоростью.– Ракетная техника и космонавтика, 1979, т. 17, № 11, с. 61–68.

Москва

Поступила в редакцию 30.III.1982

УДК 533.6.011.55

К АНАЛИТИЧЕСКОМУ ОПИСАНИЮ ГИПЕРЗВУКОВОЙ СТРУИ ГАЗА, ИСТЕКАЮЩЕЙ В ПОКОЯЩУЮСЯ СРЕДУ ИЛИ В СПУТНЫЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ПОТОК

ГИЛИНСКИЙ М. М., ЗАК Л. И.

В работе [1] было дано приближенное аналитическое решение задачи о сверхзвуковой струе идеального термодинамически совершенного газа, истекающей из расширяющегося сопла как в затопленное пространство с заданным давлением p_a, так и в спутный сверхзвуковой поток. Рассматривался случай расчетного или перерасширенного сопла $p_a\geqslant p_c$ (p_c – давление на срезе сопла). Были сделаны следующие предположения: течение газа в сопле изоэнергетическое, скорость течения значительно превышает скорость звука, угол раствора сопла мал. При сделанных предположениях и использовании метода плоских сечений [2] решение указанной задачи сводилось к интегрированию интегродифференциального уравнения

$$k_1 t^{-\gamma(1+\nu)} - k + t^{-(1+\nu)} \left(\frac{R}{t} - \dot{R} \right)^2 - \frac{\dot{R}}{R^\nu} \int_1^t \frac{R^\nu}{\tau^{1+\nu}} \left(\frac{R}{\tau} - \dot{R} \right) d\tau = 0 \qquad (1)$$

$$k_1 = \frac{p_c}{\rho_c V_1^2 \theta_0^2} = \frac{1}{\gamma M_c^2 \theta_0^2}, \qquad k = \frac{p_a}{\rho_c V_1^2 \theta_0^2}$$

где $R = R(t)$ – закон распространения внутреннего «бочкообразного» скачка уплотнения; $\nu=0$, 1, 2 – для течений с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами.

В [1] не было обращено внимания на тот факт, что интеграл в левой части (1) берется, и уравнение (1) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно неизвестной $R(t)$

$$k_1 t^{-\gamma(1+\nu)} - k + t^{-(1+\nu)} \left(\frac{R}{t} - \dot{R} \right)^2 + \frac{1}{\nu+1} \frac{\dot{R}}{R^\nu} \left[\left(\frac{R}{t} \right)^{1+\nu} - 1 \right] = 0 \qquad (2)$$

После несложных преобразований вместо уравнения (2) получим интегральное уравнение

$$R^{\nu+2} - (\nu+2) R t^{1+\nu} + (1+\nu) t^{2+\nu} + (2+\nu) t^{\nu+2} \int_1^t \left[\int_1^t R^\nu t^{2-\nu} f(t)\, dt \right] \frac{dt}{t^2} = 0 \qquad (3)$$

$$f(t) = (1+\nu) t^{\nu-1} (k_1 t^{-\gamma(1+\nu)} - k)$$

В плоском случае ($\nu=0$) двойной интеграл можно вычислить и получить

$$R^2 - 2Rt + t^2 + 2 \left(\frac{k_1}{\gamma-1} + k \right) t^2 - \frac{2k_1}{(2-\gamma)(\gamma-1)} t^{3-\gamma} + \left(\frac{2k_1}{2-\gamma} - k \right) t - kt^3 = 0 \qquad (4)$$

Продифференцировав (4), получим выражение для наклона скачка

$$\frac{dR}{dt} = 1 - \frac{G_1 (3-\gamma) t^{2-\gamma} + 3kt^2 - 4G_2 t + G_3}{2\sqrt{G_1 t^{3-\gamma} + kt^3 - 2G_2 t^2 + G_3 t}}$$

$$G_1 = \frac{2k_1}{(\gamma-1)(2-\gamma)}, \qquad G_2 = \frac{k_1}{\gamma-1} + k, \qquad G_3 = k - \frac{2k_1}{2-\gamma}$$

В случае истечения струи газа из конического сопла ($\nu=1$) уравнение (3) перепишем в виде, удобном для итерирования

$$R = \frac{R^3}{3t^2} + \frac{2}{3} t + 2t \int_1^t \left[\int_1^t Rt (k_1 t^{-2\gamma} - k)\, dt \right] \frac{dt}{t^2}$$

Если в качестве нулевой итерации взять $R_0 = a\sqrt{t} + t - at^{3/2}$, $a = \sqrt{k - k_1}$, то для первой получим

$$R_1 = \frac{R_0^3}{3t^2} + \frac{2}{3} t + c_1 t^{5/2 - 2\gamma} + c_2 t^{3-2\gamma} + c_3 t^{7/2 - 2\gamma} - \frac{8ak}{15} t^{5/2} - \frac{k}{3} t^3 + \frac{8ak}{35} t^{7/2} + Et - D$$

$$c_1 = \frac{8ak_1}{(5-4\gamma)(3-4\gamma)}, \qquad c_2 = \frac{k_1}{(3-2\gamma)(1-\gamma)}, \qquad c_3 = -\frac{8ak_1}{(7-4\gamma)(5-4\gamma)}$$

$$D = \frac{8ak}{35} + \frac{2k}{3} - \frac{8ak_1}{(5-4\gamma)(7-4\gamma)} - \frac{2k_1}{3-2\gamma}$$

$$E = -\frac{8ak_1}{(5-4\gamma)(3-4\gamma)} - \frac{k_1}{1-\gamma} + \frac{8ak}{15} + k$$

Из выражения (4) получим трансцендентное уравнение

$$G_1 t_m^{2-\gamma} + kt_m^2 - (2G_2 + 1) t_m + G_3 = 0$$

Для определения t_m – точки, в которой заканчивается первая «бочка», используем условие $R(t_m)=0$. В случае истечения струи с очень большой скоростью $k_1=0$, и если, кроме того, $k\sim 0$, то решение этого уравнения имеет вид $t_m=2+1/k$. В этом случае максимальному радиусу расширения струи $R_*={}^2/_3+4/(27k)$ соответствует точка $t_*={}^2/_3+4/(9k)$.

В случае истечения струи в спутный сверхзвуковой поток k будет переменной величиной [2]

$$k=m\left[R^2+\frac{R}{(1+\nu)R^\nu}(R^{1+\nu}-1)\right],\qquad m=\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{\rho_c V_1^2} \tag{5}$$

Здесь ρ_∞ и V_∞ – соответственно плотность и скорость газа в невозмущенном набегающем потоке. В этом случае уравнение (2) с учетом (5) дважды интегрируется полностью, и для определения $R(t)$ в случае $\nu=0$ получается квадратное уравнение

$$(mt-1)R^2-2(m-1)Rt+B(t)=0 \tag{6}$$

$$B(t)=2\left[\frac{m}{2}-\frac{k_1}{\gamma-1}+\frac{k_1}{(\gamma-1)(2-\gamma)}t^{2-\gamma}-\frac{k_1}{2-\gamma}-\frac{1}{2}t\right]t$$

Решением уравнения (6) будет

$$R=\frac{(m-1)t}{mt-1}+\frac{1}{mt-1}\sqrt{(m-1)^2t^2-(mt-1)B(t)},\qquad tm\neq 1$$

$$R\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{mB(1/m)}{2(m-1)},\qquad m<1,\qquad t=\frac{1}{m}$$

При $m=1$ $R=\sqrt{-B(t)/(t-1)}$, и если еще положить $k_1=0$, то эта зависимость имеет вид $R=\sqrt{t}$.

Для $\nu=1$ и $m\neq 1$ уравнение (3) перепишем в удобном для итерирования виде

$$R=\frac{1-mt^2}{3t^2(1-m)}R^3+\frac{2t}{3(1-m)}-\frac{2m}{3(1-m)}+\frac{2k_1t}{1-m}\int_1^t\left(\int_1^t Rt^{1-2\gamma}\,dt\right)\frac{dt}{t^2}$$

Если в качестве нулевой итерации взять

$$R_0=1+A(t-1),\qquad A=\frac{\sqrt{1+(m-1)(1+k_1)}-1}{m-1}$$

то первая итерация имеет вид

$$R_1(t)=\frac{1-mt^2}{3t^2(1-m)}[1+A(t-1)]^3+\frac{2t}{3(1-m)}-\frac{2m}{3(1-m)}+$$
$$+\frac{2k_1t}{1-m}\left[\frac{1-A}{2(1-\gamma)(1-2\gamma)}t^{1-2\gamma}+\frac{At^{2(1-\gamma)}}{2(3-2\gamma)(1-\gamma)}-\frac{1-A}{1-2\gamma}-\frac{A}{2(1-\gamma)}\right]$$

В случае $k_1=0$

$$R=\frac{1-mt^2}{3t^2(1-m)}R^3+\frac{2t}{3(1-m)}-\frac{2m}{3(1-m)}$$

Для $m=1$, $\nu=1$ уравнение (3) имеет вид

$$R=\left[\frac{2t^2}{t^2-1}\left(t-1+2k_1t\int_1^t c\int_1^t Rt^{1-2\gamma}\,dt\right)\frac{dt}{t^2}\right]^{1/3}$$

Если $k_1=0$, то зависимость $R(t)$ в этом случае приобретает вид $R=\sqrt[3]{2t^2/(t+1)}$.

Рассмотрим теперь случай недорасширенного сопла $p_a<p_c$. В этом случае уравнение (2) имеет вид

$$k_1 t^{-\gamma(1+\nu)}-k+t^{-(1-\nu)}\left(\frac{R}{t}-\dot R\right)^2+\frac{1}{1+\nu}\frac{\ddot R}{R^\nu}\left[\left(\frac{R}{t}\right)^{1+\nu}-\left(\frac{R_0}{t_0}\right)^{1+\nu}\right]=0 \quad (7)$$

Если в качестве условия для определения положения точки (t_0, R_0) использовать предположение равенства давлений в этой точке [3]:

$$\left.\frac{dR}{dt}\right|_{t=t_0}=\frac{R_0}{t_0}, \qquad t_0=n^{1/\gamma(1+\nu)} \qquad \left(n=\frac{k_1}{k}\right) \quad (8)$$

то в задаче появляется линейный масштаб, связанный с параметром нерасчетности. На существование такого масштаба указывалось ранее, и для осесимметричного течения он равен $\sqrt{n}$, что соответствует (8) при $\gamma\to 1$.

Введем вместо безразмерных величин R и t новые безразмерные y и x так, что $R=R_0 y$, $t=t_0 x$, где $R_0=\sqrt{k_1}\, n^{1/\gamma(1+\nu)+(1-\gamma)/2\gamma}$. Тогда в переменных x, y уравнение (7) имеет вид

$$x^{-\gamma(1+\nu)}-1+x^{-(1+\nu)}\left(\frac{y}{x}-\dot y\right)^2+\frac{1}{1+\nu}\frac{\ddot y}{y^\nu}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^{1+\nu}-1\right]=0 \quad (9)$$

Отсюда видно, что переменные x и y являются переменными подобия для гиперзвуковых недорасширенных струй, истекающих из расширяющегося сопла в затопленное пространство.

Уравнение (9), аналогично тому, как это делалось для уравнения (2), можно свести к интегральному уравнению

$$y^{\nu+2}-(2+\nu)\,y x^{1+\nu}+(\nu+1)\,x^{\nu+2}+(\nu+2)\,x^{\nu+2}\int\limits_1^x\left[\int\limits_1^x y^\nu x^{2-\nu} f(x)\,dx\right]\frac{dx}{x^2}=0 \quad (10)$$

$$f(x)=(1+\nu)\,x^{\nu-1}\left(x^{-\gamma(1+\nu)}-1\right)$$

Решение уравнения (10) для плоской струи ($\nu=0$) дается в элементарных функциях, а в случае осевой симметрии ($\nu=1$) (10) можно записать в виде, удобном для итерирования и построить первую и так далее итерации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зак Л. И.* Гиперзвуковая струя, истекающая в покоящуюся среду или в спутный сверхзвуковой поток.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 5, с. 72–76.
2. *Черный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
3. *Ясухара.* Гиперзвуковое автомодельное решение для бочкообразного скачка уплотнения в свободной струе типа течения от источника.– Ракетная техника и космонавтика, 1966, т. 4, № 6, с. 181–183.
4. *Yasuhara M.* Hypersonic self-similarity of barrel shock in source-type free jets.– AIAA Journal, 1966, v. 4, № 6, p. 1102.

Москва

Поступила в редакцию 16.IV.1982