

для аппроксимации расчетных зависимостей подобно тому как это делается при обработке экспериментов, а именно для ограниченного диапазона κ ищется такое n , чтобы производная $d(E^{1/n})/d\kappa$ в этом диапазоне была близка к постоянной.

Рассмотрим результаты подобного определения n для расчетных зависимостей, являющихся численным решением системы (2) при следующих условиях. Начальные значения E и L равны соответствующим величинам, найденным экспериментально в [1] для $\kappa=20$; параметр Re варьируется от $0,2 \cdot 10^3$ до $5 \cdot 10^4$; расчет ведется от $\kappa=20$ до $\kappa=200$.

Найденные величины n целесообразно связать с переменным по длине параметром потока — величиной $Re_t = \langle u' \rangle l / \nu$; ее значение связано с расчетными E и L соотношением $Re_t = 0,815 Re \sqrt{EL}$. С ростом κ величины Re_t уменьшаются, но абсолютное изменение Re_t на участке $20 < \kappa < 200$ при всех выбранных для анализа Re невелико. Графически связь значения n с Re_t представлена на фиг. 2: горизонтальными отрезками обозначены диапазоны изменения Re_t . Порядковый номер отрезка соответствует следующим величинам $Re \cdot 10^{-3}$: 1 — 0,2, 2 — 0,5, 3 — 0,75, 4 — 1, 5 — 1,5, 6 — 2, 7 — 3, 8 — 5, 9 — 10, 10 — 50. При $Re = 0,2 \cdot 10^3$ расчетное значение n для этого участка равно 2,32; при $Re = 5 \cdot 10^4$ расчетная величина n равна 1,1. Для промежуточных Re величины n принимают значения между 2,32 и 1,1. Если обратить внимание на то, что для изотропной турбулентности выражение (1) при $n=1$ означает решение системы (2) без учета вязкости, а при $n=2,5$ — соответственно решение системы (2) для случая чисто вязкой диссипации, то можно говорить о единой для всего диапазона Re_t зависимости между показателем n и Re_t . Для собранных в таблице работы [2] экспериментов со стержневыми решетками Re_t лежит в области $Re_t > 20$ (Re_t определены в тех случаях, когда в работе имеются необходимые измерения l). Согласно расчетам (см. фиг. 2), показатель n в этой области мало отличается от 1.

Проведенный анализ экспериментов и расчетов дает основание для выводов, что, во-первых, имеющиеся в литературе сведения по вырождению однородной изотропной турбулентности на начальном участке при числах $Re > 5,5 \cdot 10^3$ ($Re_t > 20$) не дают достаточного основания для утверждения, что показатель n отличен от 1, и, во-вторых, что при $Re < 5,5 \cdot 10^3$ ($Re_t < 20$) возможна аппроксимация экспериментальных данных зависимостью (1) при условии, что показатель n возрастает с уменьшением Re_t потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Batchelor G. K., Townsend A. A. Decay of isotropic turbulence in the initial period.— Proc. Roy. Soc. London, ser. A, 1948, v. 193, № 1035, p. 539–558.
2. Gad-el-Hak M., Corrsin S. Measurements of the nearly isotropic turbulence behind a uniform jet grid.— J. Fluid Mech., 1974, v. 62, № 1, p. 115–143.
3. Павельев А. А. Развитие решеточной турбулентности в потоке с постоянным градиентом скорости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 1, с. 38–47.

Москва

Поступила в редакцию
7.1.1982

УДК 532.546

К ОЦЕНКЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРКОЛЯЦИИ — МЕРЫ ЭКРАНИРОВАНИЯ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В СРЕДАХ С НЕПРОНИЦАЕМЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

ШВИДЛЕР М. И.

Как известно, фильтрация в средах с непроницаемыми включениями характерна тем, что эти включения в той или иной степени экранируют проводящую среду. Пусть рассматривается относительно простой случай фильтрации однородной ньютоновской жидкости в среде достаточно больших пространственных масштабов, содержащей случайно расположенные непроницаемые зоны. Поскольку какая-то часть проводящей среды (проводника) может оказаться изолированной непроницаемыми включениями (изолятором), естественно определить мерой, характеризующей экранирование, долю проводника, в котором вектор скорости фильтрации отличен от нуля. Возможны и другие меры. В частности, мерой экранирования может служить вероятность выброса диссипируемой при фильтрации энергии за некоторый пороговый уровень, выброса модуля скорости и т. п. Принятое выше определение меры соответствует так называемой вероятности перколяции P в теории протекания [1, 2] — равной объемной доле проводника, в котором течение может быть реализовано, по отношению ко всему проводнику.

Очевидно, задача определения P эквивалентна задаче нахождения доли связанной части проводника, т. е. проблеме чисто геометрической. Для ее решения [1] методом Монте-Карло генерируются реализации случайных полей достаточно большого объема и определяются экспериментально оценки вероятности попадания блуждающей только по проводнику точки на внешнюю границу области. Помимо большой трудоемкости такой способ изучения системы «изнутри» требует задания и моделирования достаточно тонких характеристик случайного поля, в реальных ситуациях обычно неизвестных.

Далее рассмотрен способ получения двухсторонних оценок вероятности перколяции стохастической системы, состоящей из проводящих и непроводящих под областей, по глобальным фильтрационным характеристикам, допускающим, в частности, экспериментальное определение. Способ основан на использовании границ для эффективной проводимости некоторой модифицированной системы в отличие от исходной не содержащей экранированных проводящих под областей. Показано, что учет макроскопической изотропии системы и вариационных границ Хашина — Штрикмана для эффективной проводимости позволяет улучшить универсальную нижнюю оценку вероятности перколяции. Полученные оценки устанавливают зависимость эффективной проводимости системы и ее эффективного удельного порового объема.

1. Из условия неотрицательности дисперсии поля случайной скорости фильтрации в статье [3] получена универсальная в смысле независимости от размерности рассматриваемого поля нижняя оценка P — вероятности перколяции системы, содержащей под области однородного проводника и изолятора. Оценка зависит от макроскопических функционалов: σ_* — тензора эффективной проводимости, $\langle \sigma \rangle$ — тензора средней проводимости, а для анизотропных сред и от вектора среднего поля \mathbf{H} — градиента среднего давления

$$P \geq P_* = (\sigma_* \mathbf{H}, \sigma_* \mathbf{H}) / (\langle \sigma \rangle \mathbf{H}, \sigma_* \mathbf{H}) \quad (1.1)$$

Если среда макроскопически изотропна, из (1.1) следует

$$P \geq P_* = \sigma_* / \langle \sigma \rangle \quad (1.2)$$

Как известно, пористость и проводимость пористых структур, если исключить некоторые модельные случаи, являются независимыми характеристиками среды. Оценки (1.1), (1.2) показывают, что эффективная проводимость и эффективная пористость — доля порового объема, участвующего в процессе переноса, зависимы.

Очевидно, универсальность оценок (1.1), (1.2) ограничивает их эффективность, хотя, например, в случае слоистых структур оценка (1.1) реализуется точно в виде равенства. Возможность улучшения оценок в конкретных ситуациях должна быть связана с использованием информации о структуре неоднородной среды. Далее излагается способ, позволяющий в принципе строить двухсторонние оценки вероятности перколяции, основанные на вариационных границах для эффективной проводимости.

Рассмотрим некоторую систему, состоящую из проводника проводимости $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ и изолятора нулевой проводимости, объемные доли которых в системе равны p и $1-p$ соответственно. Пусть какая-то часть проводника экранируется изолятором и, следовательно, не участвует в процессе переноса. Рассмотрим новую систему, отличающуюся от исходной лишь тем, что экранированный проводник исходной системы заменен изолятором. Очевидно, в новой системе отсутствует экранированный проводник, доля проводника составляет $\lambda = pP$, эффективные проводимости обеих систем одинаковы.

Пусть модифицированная система принадлежит некоторому классу, для которого известны границы, содержащие эффективные проводимости всех систем данного класса, и, следовательно

$$\sigma_-(\lambda) \leq \sigma_* \leq \sigma_+(\lambda) \quad (1.3)$$

где тензорное неравенство следует понимать в смысле положительной или отрицательной полуопределенности соответствующих функционалов. Так, в частности, если границы σ_{\pm} получены из вариационных принципов для энергетического функционала, соотношениям (1.3) соответствуют неравенства

$$(\mathbf{H}, (\sigma_-(\lambda) - \sigma_*) \mathbf{H}) \leq 0, \quad (\mathbf{H}, (\sigma_+(\lambda) - \sigma_*) \mathbf{H}) \geq 0 \quad (1.4)$$

Подставив теперь $\lambda = pP$ в (4) и решив эти неравенства относительно P , получим двухстороннюю оценку

$$P_*^- \leq P \leq P_*^+$$

тем более точную, чем ближе к истинному значению σ_* границы σ_{\pm} .

Выберем в качестве $\sigma_{\pm}(\lambda)$ универсальные границы, пригодные для любых систем

$$\sigma_- = \langle \sigma^{-1} \rangle_M^{-1} I, \quad \sigma_+ = \langle \sigma \rangle_M I$$

Здесь I – единичный диагональный тензор, а символ $\langle \sigma \rangle$ означает, что осреднение производится для модифицированной системы. В рассматриваемом случае $\langle \sigma \rangle_M = \sigma_0 \lambda$, $\langle \sigma^{-1} \rangle_M^{-1} = 0$ и, следовательно

$$\sigma_* \leq \sigma_0 p P I$$

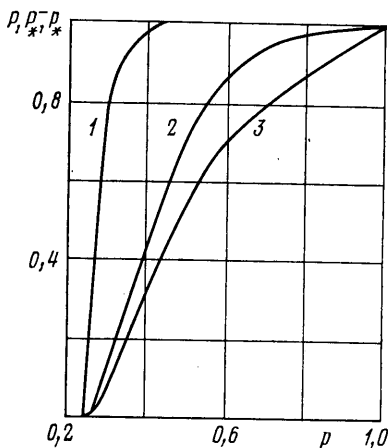
что дает в общем случае анизотропной системы и произвольного среднего поля H оценку снизу

$$P \geq (H, \sigma_* H) / (H, \langle \sigma \rangle H) \quad (1.5)$$

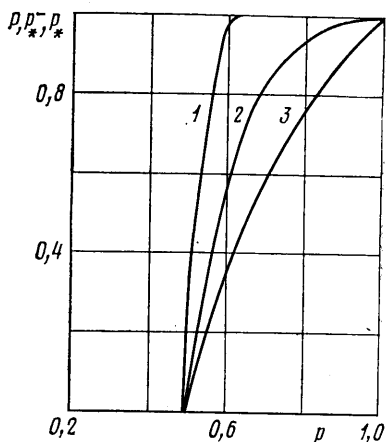
Можно убедиться, что для анизотропных систем и H , неколлинеарных главным осям тензора σ_*

$$(\sigma_* H, \sigma_* H) / (\langle \sigma \rangle H, \sigma_* H) > (H, \sigma_* H) / (H, \langle \sigma \rangle H)$$

и, следовательно, оценка (1.4) лучше оценки (1.5). Очевидно, для изотропных систем, как и в случае задания H , коллинеарных главным осям тензора σ_* анизотропной системы, обе оценки совпадают.



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Если рассматриваемая система макроскопически изотропна, модифицированная система также изотропна и в качестве верхней границы для эффективной проводимости может быть выбрана вариационная граница Хашина – Штрикмана [4], которая для двух- и трехмерных континуальных полей имеет вид

$$\sigma_+^{(2)} = \sigma_0 \lambda / (2 - \lambda), \quad \sigma_+^{(3)} = 2 \sigma_0 \lambda / (3 - \lambda) \quad (2.1)$$

Подставив эти границы в неравенство (1.3) и решив его относительно P , получим для двух- и трехмерных изотропных полей соответственно

$$P \geq P_*^- = \frac{\sigma_*}{\langle \sigma \rangle} \frac{2}{1 + p \sigma_* / \langle \sigma \rangle} \quad (2.2)$$

$$P \geq P_*^- = \frac{\sigma_*}{\langle \sigma \rangle} \frac{3}{2 + p \sigma_* / \langle \sigma \rangle} \quad (2.3)$$

Легко видеть, что оценки (2.2) и (2.3) дают более высокую нижнюю границу вероятности перколяции, чем (1.2). Например, в окрестности порога перколяции, т. е. при $\sigma_* \rightarrow 0$, учет изотропии системы позволяет улучшить нижнюю оценку для плоского и пространственного полей соответственно в 2 и 1,5 раза.

Есть основания полагать, что верхние границы Хашина – Штрикмана (2.1) пригодны и для произвольных плоских и пространственных сеток. В самом деле, при заданной доле непроводящих звеньев сетки ее макроскопическая изотропная проводимость будет тем большей, чем компактнее организованы непроводящие кластеры, чем меньше приходится непроводящих кластеров на единицу объема сеточной области. Поэтому для получения верхней оценки эффективной проводимости при фиксированной доле изолятора естественно рассмотреть систему, в которой непроводящие звенья образуют связанные сеточные подобласти, объединяющие большое количество узлов. В этом случае новую систему можно считать эквивалентной некоторой континуальной системе, для которой в свою очередь справедливы границы

Хашина – Штрикмана. Под эквивалентностью здесь подразумевается сколь угодно точная аппроксимация дифференциальных уравнений для скорости и поля в континуальной среде системой аналогичных соотношений, выписанных для сетки. Отсюда следует, что неравенства (2.2), (2.3) могут быть использованы для оценки вероятности перколяции произвольных двумерных и трехмерных сеток.

Приведем результаты сравнения оценок (1.2), (2.2), (2.3) с величиной вероятности перколяции, найденной с помощью прямого математического эксперимента на простых кубических и квадратных сетках [1]. На фиг. 1, 2 изображены (кривые 1, 2, 3) зависимости вероятности перколяции P , ее оценок P_* и P_* от доли проводящих звеньев кубической сетки $15 \times 15 \times 15$ и квадратной сетки 50×50 . Легко видеть, что учет информации об изотропии системы заметен, особенно в двумерном случае, улучшает нижнюю оценку вероятности перколяции.

Вернувшись вновь к рассмотрению общего случая анизотропных систем, отметим, что использование матричных неравенств (1.3) приводит к зависимости оценки вероятности перколяции от направления вектора среднего поля \mathbf{H} , что естественно лишь для случая предельной анизотропии. Используя скалярные неравенства, можно получить оценки инвариантные к направлению фильтрационного потока. Так, например, обратившись к точным неравенствам для компонент тензора эффективной проводимости двумерных систем, найденных К. А. Лурье и А. В. Черкаевым [5], можно получить оценку, не зависящую от направления \mathbf{H}

$$P \geq \frac{1}{p} \frac{\sigma_0(\sigma_*^{11} + \sigma_*^{22}) - 2\sigma_*^{11}\sigma_*^{22}}{\sigma_0^2 - \sigma_*^{11}\sigma_*^{22}} \quad (2.4)$$

Здесь σ_*^{ii} – диагональные компоненты тензора эффективной проводимости. Легко видеть, что оценка (2.4) зависит лишь от инвариантов тензора эффективной проводимости, а зависимость от σ_0 – кажущаяся, так как σ_*^{ii} пропорциональны σ_0 . В случае изотропии системы неравенство (2.4) переходит в (2.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kirkpatrick Scott. Percolation and conduction. – Rev. Mod. Phys., 1973, v. 45, № 4, p. 574. (Рус. перев.: Перколяция и проводимость. – В кн.: Теория и свойства неупорядоченных материалов. М.: Мир, 1977, с. 249.)
2. Шкловский Б. И., Эфрос А. Л. Электронные свойства легированных полупроводников. М.: Наука, 1979. 416 с.
3. Швидлер М. И. Об одной оценке вероятности перколяции в неоднородных средах. – ЖЭТФ, 1981, т. 80, вып. 2, с. 666–668.
4. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. – J. Appl. Phys., 1963, v. 33, № 10, p. 3125–3131.
5. Лурье К. А., Черкаев А. В. Точные оценки проводимости смесей, образованных двумя материалами, взятыми в заданной пропорции (плоская задача). ДАН СССР, т. 264, № 5, 1982, с. 1128–1130.

Москва

Поступила в редакцию
30.III.1982

УДК 532.546

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ

РАМАЗАНОВ А. Ш., ФИЛИПШОВ А. И.

В работе исследуются температурные поля при фильтрации жидкости в пористой среде, обусловленные перераспределением поля давления (баротермический эффект). Показано, что в нестационарном поле давления баротермический эффект зависит от характера изменения давления по пути фильтрации жидкости. Определены условия фильтрации, когда баротермический эффект близок к эффекту Джоуля – Томсона.

Температурный эффект вследствие перераспределения давления при фильтрации жидкостей в пористой среде по абсолютной величине намного меньше, чем для газов. Например, величина дроссельного эффекта для воды $\epsilon \sim 2 \cdot 10^{-7}$ К/Па, а для газов ϵ порядка $(3 \div 6) \cdot 10^{-6}$ К/Па. Поэтому баротермическим эффектом даже в неизотермической фильтрации жидкостей пренебрегали [1]. Однако в связи с повышением разрешающей способности термометрической аппаратуры в настоящее время появилась возможность уверенной регистрации баротермических эффектов.