

УДК 532.517:532.613.5

**СТЕКАНИЕ ПЛОСКОЙ СТРУИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ
ЖИДКОСТИ ПО СУХОЙ СТЕНКЕ**

СЕМЕНОВА И. П., ЯКУБЕНКО А. Е.

Изучаются режимы стекания плоской струйки вязкой жидкости, передний фронт которой движется по сухой вертикальной стенке с постоянной скоростью. Изучение проводится на основе нелинейного дифференциального уравнения, полученного методом интегральных соотношений и описывающего поведение поверхности пленки вязкой несжимаемой жидкости с учетом поверхностного натяжения. Показано, что при фиксированных физических свойствах жидкости стекание со стационарно движущимся передним фронтом возможно только при строго определенном расходе жидкости, поступающем на пластину в бесконечно удаленной от переднего фронта точке.

Построена зависимость безразмерного расхода жидкости от безразмерного параметра γ , характеризующего физические свойства жидкости. Показано, что наряду с монотонным поведением свободной поверхности струи по длине возможны режимы, когда свободная поверхность является волнообразной вблизи переднего фронта струи и асимптотически стремится к прямолинейной при удалении от него.

1. Рассмотрим плоское течение тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости под действием силы тяжести по вертикальной стенке. Из-за малости толщины слоя будем считать, что изменение давления поперек слоя мало, т. е. $p = \text{const}$. Изменение остальных величин в продольном направлении мало по сравнению с изменением в поперечном направлении. Уравнения движения, неразрывности и граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F + g, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad F = \sigma \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\} \quad (1.2)$$

$$u = v = 0, \quad y = 0, \quad v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad y = h \quad (1.3)$$

Проинтегрируем (1.1) и (1.2) по y от 0 до h . Меняя порядок интегрирования и дифференцирования, учитывая зависимость $h(x)$ и граничные условия, получим из (1.1) интегральное соотношение [2]. Примем, что при волновом движении жидкости сохраняется параболический по y профиль скорости, такой же, как при безволновом движении с прямолинейными линиями тока. Используя интегральное соотношение, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) &= \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\} + \\ &+ gh - 3\nu \frac{q}{h^2} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. Будем искать решения системы (1.4), описывающие распространение стационарных волн, бегущих по поверхности жидкости со скоростью c , не зависящей от x и t . Введем новую переменную $\xi = x - ct$. Из второго

уравнения (1.4) имеем интеграл

$$q - ch = q^* \quad (2.1)$$

Преобразуем первое уравнение (1.4) с учетом интеграла (2.1)

$$\frac{\sigma}{\rho} \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{d^2 h}{d\xi^2} \left[1 + \left(\frac{dh}{d\xi} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\} + \frac{6q^* - c^2 h^2}{5h^3} \frac{dh}{d\xi} + [gh^3 - 3\nu(q^* + ch)] h^{-3} = 0 \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) в безразмерной форме имеет вид

$$[H''(1+(H')^2)^{-1/2}]' + \frac{\omega(z) - z^2(H^2-1)}{5WH^2} H' + \frac{9[H^3-1-z(H-1)]}{\text{Re} WH^3} = 0$$

$$H = \frac{h}{h_1}, \quad \xi = \frac{\xi}{h_1}, \quad z = \frac{c}{u_1}, \quad \text{Re} = \frac{3u_1 h_1}{\nu}, \quad W = \frac{9\sigma\nu^2}{\rho g^2 h_1^5} \quad (2.3)$$

$$\gamma = \frac{\sigma}{\rho\nu^{1/2}g^{1/2}}, \quad \omega(z) = 5z^2 - 12z + 6$$

Здесь h_1, u_1 характерные толщина и скорость. Сделаем преобразование $\xi_1 = \alpha\xi$. Потребуем $\alpha^3 \text{Re} W = 9$, отсюда следует $\alpha = (9/\text{Re} W)^{1/3}$. Тогда $1/(\alpha^2 W) = \text{Re} \alpha/9 = 9^{-2/3} \text{Re}^{2/3} W^{-1/3}$.

После преобразования уравнение (2.3) запишется так:

$$[H''(1+(\alpha H')^2)^{-1/2}]' + \frac{\Delta(\omega - z^2(H^2-1))}{H^3} H' + \frac{H^3-1-z(H-1)}{H^3} = 0$$

$$\Delta = 1/(5\alpha^2 W) = \gamma^{-1/3} \text{Re}^{2/3}/45 \quad (2.4)$$

Аналогичное уравнение без учета члена $(\alpha H')^2$ было получено в [1].

3. Используя уравнение (2.4), исследуем стекание по сухой вертикальной стенке плоской полубесконечной струйки вязкой жидкости, передний фронт которой движется с постоянной скоростью. Запишем интеграл (2.1) в точке $\xi=0$ (т. е. $h=0$, фиг. 1). Имеем $q^*=0$, т. е. среди решений, описывающих волны на поверхности жидкости, движущиеся с постоянной скоростью c , решение задачи о стекании плоской полубесконечной струйки соответствует нулевому значению константы q^* в интеграле (2.1) исходной системы уравнений. Отсюда сразу следует, что при всех значениях ξ , отличных от нуля, где толщина пленки конечна, справедливо соотношение

$$q - ch = h(u - c) = 0 \quad (u = c = u_1) \quad (3.1)$$

В безразмерной форме соотношение (3.1) имеет вид $z=1$, т. е. средняя по толщине скорость жидкости равна скорости движения переднего фронта. Поскольку поверхность струи при стекании может быть не гладкой, а волновой, то это

означает, что волны на поверхности струи движутся со средней скоростью жидкости.

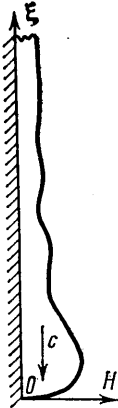
Уравнение (2.4) при $z=1$ и замене $x_1 = -\xi_1$ принимает вид

$$[H''(1+(\alpha H')^2)^{-1/2}]' = 1 - H^{-2} + \Delta H^{-1} H' \quad (3.2)$$

Граничные условия для (3.2) запишутся в виде

$$H=0 \quad (x_1=0), \quad H \rightarrow 1 \quad (x_1 \rightarrow +\infty)$$

4. Вблизи переднего фронта струи, где $H \rightarrow 0$, уравнение (3.2) имеет особенность. Исследуем поведение решения в этой области. Введем обозначения $H' = P$,



Фиг. 1

$P'(1+\alpha^2 P^2)^{-3/2}=Z$. Уравнение (3.2) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} H' &= P, \quad P' = Z(1+\alpha^2 P)^{-3/2} \\ Z' &= 1-H^{-2}+\Delta H^{-1}P, \quad \alpha = \text{Re}^{2/3}\gamma^{1/3}, \quad \Delta = \gamma^{1/3}\text{Re}^{1/3}/45 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Будем искать решение в окрестности точки $H=0$ ($x_1=0$) в виде

$$H = (2x_1/\Delta)^{1/2}(1+a_1x_1+\dots) \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в систему уравнений (4.1) и производя громоздкие выкладки, которые здесь опускаем, получим

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\alpha^3 - 3(\Delta/\alpha)^2}{2\Delta(6-\alpha^3)}, \quad P = (2\Delta x_1)^{-1/2}(1+3a_1x_1+\dots) \\ Z &= \Delta\alpha^{-3}[-1+x_1(12a_1+3\Delta\alpha^{-2})+\dots] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из уравнения (3.2) видно, что, когда $x_1 \rightarrow 0$ и $H \rightarrow 0$, последние два члена в правой части должны компенсировать друг друга, т.е. $1/H \sim \Delta H'$. Отсюда следует, что $1/H \sim \Delta P$.

Для удобства численного решения системы уравнений (4.1) введем новые переменные

$$\begin{aligned} P_1 &= \Delta P H, \quad V_1 = 0,5\Delta H^2, \quad Z_1 = \alpha^3 Z/\Delta \\ V_1' &= P_1, \quad P_1' = (2V_1)^{-1}[P_1^2 + Z_1(2\alpha^{-2}V_1 + P_1^2)^{1/2}] \\ Z_1' &= \alpha^3[\Delta^{-1} + (P_1-1)(2V_1)^{-1}] \end{aligned} \quad (4.4)$$

При $x_1=0$ имеем $V_1=0$, $P_1=1$, $Z_1=-1$. Следовательно, в окрестности точки $x_1=0$ справедливы разложения

$$V_1 = x_1, \quad P_1 = 1 + b_1x_1, \quad Z_1 = -1 + c_1x_1 \quad (4.5)$$

Из правых частей уравнений (4.4) и соотношений (4.2) и (4.3) следует, что при $x_1=0$ справедливы выражения

$$b_1 = \frac{2[\alpha^3 - 3(\Delta/\alpha)^2]}{\Delta(6-\alpha^3)}, \quad c_1 = \alpha^3[\Delta^{-1} + 0,5b_1] \quad (4.6)$$

Соотношения (4.5) и (4.6) выделяют среди интегральных кривых исходного уравнения в особой точке $x_1=0$ единственное решение, удовлетворяющее граничному условию $H=0$. В бесконечно удаленной точке ($x_1 \rightarrow +\infty$) граничное условие для безразмерной толщины слоя формулируется так: $H \rightarrow 1$ при $x_1 \rightarrow +\infty$. Асимптотическое граничное условие означает, что при $x_1 \rightarrow +\infty$ производные любых порядков от искомой функции H стремятся к нулю. Согласно введенным обозначениям, для системы (4.1) имеем

$$V_1 \rightarrow 0, \quad P_1 \rightarrow 0, \quad Z_1 \rightarrow 0 \quad (x_1 \rightarrow +\infty) \quad (4.7)$$

Представим решение в виде $H=1+h_0$. Сделаем линеаризацию уравнения (3.2). Имеем

$$h_0''' - \Delta h_0' - 2h_0 = 0 \quad (4.8)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^3 - \Delta k - 2 = 0 \quad (4.9)$$

Кубическое уравнение (4.9) при $\Delta < 3$ имеет один действительный положительный корень $k_1 > 0$ и два комплексно-сопряженных k_2 и k_3 с отрицательной действительной частью. Решение, соответствующее корню k_1 , неограниченно возрастает при $x_1 \rightarrow +\infty$. Два других решения, соответствующих k_2 и k_3 , колеблясь, стремятся к нулю при $x_1 \rightarrow +\infty$. Решение имеет вид

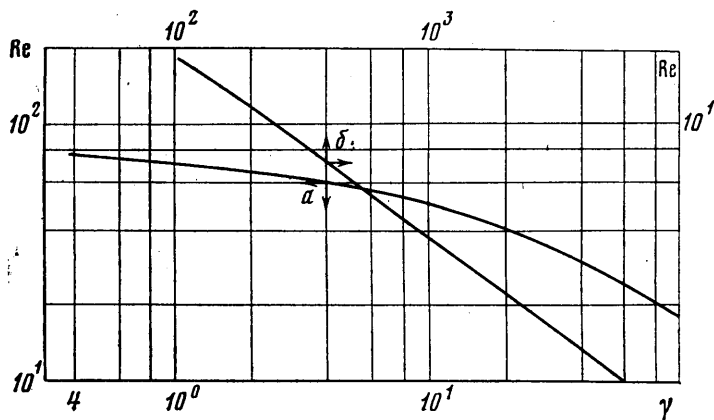
$$h_0 = e^{-\alpha_1 x_1}(C_2 \cos \alpha_2 x_1 + C_3 \sin \alpha_2 x_1), \quad k_{2,3} = -\alpha_1 \pm i\alpha_2 \quad (4.10)$$

Константа c_1 положена равной нулю.

Соотношение (4.10) определяет двухпараметрическое семейство интегральных кривых, асимптотически удовлетворяющих условию $h_0 \rightarrow 0$ при $x_1 \rightarrow \infty$, т.е. бесконечно удаленная точка есть особая точка типа «узел», в которую приходит много интегральных кривых.

Можно ожидать, что единственная интегральная кривая уравнения (3.2), выходящая из точки $H=0$ при $x_1=0$ и определяемая соотношением (4.2), в окрестности бесконечно удаленной точки, окажется среди решений, определяемых соотношением (4.10). При $\Delta \geq 3$ уравнение (4.9) имеет три действительных корня, причем два из них отрицательны. В этом случае функция h_0 стремится к нулю при $x_1 \rightarrow \infty$ монотонно.

5. Система уравнений (4.4) с граничными условиями численно интегрировалась на ЭВМ. В систему входит два безразмерных параметра Δ и α , зависящих от физических свойств жидкости и числа Рейнольдса. Соотношения (4.5) при заданных параметрах γ и Re определяют единственную интегральную кривую, выходящую из точки $x_1=0, H=0$. Численное решение показало, однако, что не всякая интегральная кривая, определяемая парой чисел γ и Re и выходящая из точки $x_1=0, H=0$, приходит в точку $H=1, x_1 \rightarrow \infty$, т. е. является решением поставленной задачи. Дело обстоит так, что при заданном значении параметра γ (т. е. фиксированных физических свойствах жидкости) есть единственное значение числа Re (или дискретные значения Re), при котором интегральная кривая придет в точку $H=1, x_1 \rightarrow \infty$. Таким образом, отыскание решения сво-



Фиг. 2

дится к нахождению собственного значения параметра Re . Вопрос о существовании единственного решения или дискретного набора решений поставленной задачи аналогичен проблеме, возникающей при решении задачи об уединенной волне на поверхности стекающей пленки жидкости [2]. Было показано, что в силу аналитической зависимости решения исходного дифференциального уравнения от числа Re уравнение должно иметь единственное решение или дискретное число решений при фиксированном параметре γ .

Поскольку параметр Re есть собственное значение, его нахождение требовало большой точности счета. Значение Re при различных γ даны в таблице. На фиг. 2, a, b дана зависимость $Re(\gamma)$.

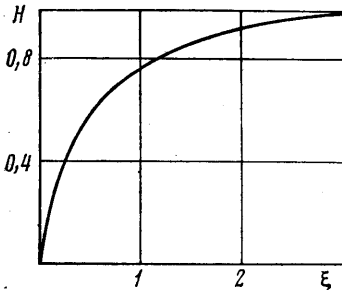
Вещество	α , дин/см	ρ , г/см ³	$\mu \cdot 10^8$, г/см	γ	Re
Ртуть	465	13,5	1,56	28591	0,31
Жидкий воздух	9,4	0,9	0,17	4365	1,25
Вода	72,5	1,0	1,0	3387	1,52
Толуол	29	0,86	0,55	2859	1,72
Бензол	29,2	0,88	0,65	2327	2,00
Этиловый спирт	22,0	0,79	1,19	753	4,61
Скипидар	27,3	0,87	1,49	715	4,78
Пропиловый спирт	23,8	0,80	2,25	351	7,98
Анилин	43,0	1,02	4,40	281	9,32
Масло оливковое	32	0,91	99	3,16	62,0
Глицерин	59,4	1,26	850	0,37	77,0

Безразмерная скорость переднего фронта струи $z=c/u_1$, как было показано ранее, равна единице. Найденное в результате численного решения значение числа Рейнольдса ($Re=3u_1 h_1/\nu$) при фиксированном γ позволяет

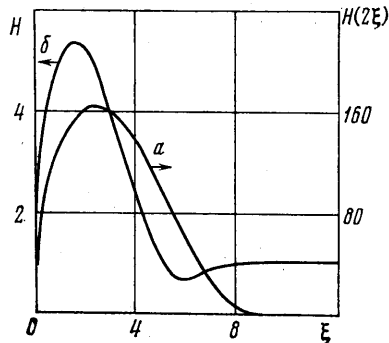
определить $u_1=c$, так как толщина слоя при $x_1 \rightarrow \infty$ равна толщине свободного стекания и определяется соотношением $h_1=(\text{Re } v^2/g)^{1/2}$.

Для размерной стационарной скорости движения переднего фронта по сухой стенке имеем соотношение $c=(1/3)v^{1/2}\text{Re}^{2/3}g^{1/6}$. Соответствующие значения числа Рейнольдса для различных жидкостей приведены в таблице и на фиг. 2, а, б.

На фиг. 3, 4 приведены различные формы поверхности струи в зависимости от физических свойств жидкости. Струйки жидкости с большим коэффициентом поверхностного натяжения (например, ртуть $\gamma=28591,12$; $\text{Re}=0,30696$) стекают по сухой стенке практически как капли (фиг. 4, а). На фиг. 3 ($\gamma=3,16$; $\text{Re}=61,968952$) представлена форма поверхности



Фиг. 3



Фиг. 4

струйки оливкового масла. На фиг. 4, б ($\gamma=280,7$; $\text{Re}=9,318552$) дана форма поверхности струйки анилина. На фиг. 2 дана зависимость $\text{Re}(\gamma)$ ($\gamma=c\sigma^{-1}v^{-1/2}g^{-1/2}$). В диапазоне изменения γ от 10^2 до 10^4 можно предложить критериальную зависимость

$$\text{Re}=a_0\gamma^{a_1}, \quad a_0=484,8; \quad a_1=-0,71 \quad (5.1)$$

$$\frac{c}{c_1}=a_2\gamma^{a_3}, \quad c_1=\left(\frac{1}{3}\right)(vg)^{1/2}, \quad a_2=61,71; \quad a_3=-0,47$$

Константы a_2, a_3 определены на основании аппроксимации точной зависимости $\text{Re}(\gamma)$ на фиг. 2 приближенной аналитической зависимостью (5.1) в указанном диапазоне изменения γ .

6. Полученное решение задачи о стекании струйки вязкой несжимаемой жидкости со стационарно движущимся по сухой стенке передним фронтом есть решение приближенного уравнения (2.3), полученного методом интегральных соотношений из исходной системы уравнений в предположении, что продольные изменения величин много меньше изменений в поперечном направлении. Ясно, что вблизи переднего фронта струи эти предположения выполняются плохо. Вблизи переднего фронта струи проявляется важный физико-химический эффект, влияющий на форму поверхности струи, — эффект смачивания стекающей жидкостью материала стенки. Полученное решение зависит только от физических свойств жидкости и ее расхода и не зависит от свойств стенки. Влияние стенки на движение учтено только в граничном условии прилипания. Эффект смачивания в статических задачах обычно учитывается заданием равновесного угла контакта свободной поверхности жидкости со стенкой.

Что касается динамического угла контакта поверхности жидкости со стенкой, то из известных авторов работ следует упомянуть работы [3, 4] и экспериментальную работу [5], в которой проведено измерение динамического угла для хорошо смачиваемой поверхности и сопоставление экспериментальных данных с теориями других авторов.

Для динамического угла смачивания предложена зависимость угла смачивания от скорости переднего фронта [3]

$$\theta^3=\theta_0^3+c_0\psi, \quad \psi=\frac{u\mu}{\sigma} \quad (6.1)$$

Здесь θ — динамический угол смачивания, θ_0 — равновесный статический угол смачивания, c_0 — константа, u — скорость фронта, μ — коэффициент вязкости, σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Эксперименты работы [5] показали существование универсальной зависимости вида (6.1) (θ_0 было принято равным нулю для хорошо смачивающих жидкостей). Для плохо смачиваемых поверхностей такой универсальной зависимости угла смачивания от параметров течения, по-видимому, не существует. Из приведенных в [5] данных следует, что при $\psi \sim 10^{-2}$ динамический угол контакта порядка 90° .

Из найденного решения следует, что угол контакта стационарно движущегося переднего фронта струи со стенкой равен 90° независимо от свойств жидкости и стенки.

Требуется дополнительное исследование, чтобы установить, является ли такое поведение поверхности характерным для стационарного режима движения переднего фронта любой жидкости по стенке из любого материала, или этот факт — результат погрешности приближенной теории в окрестности переднего фронта. В этом случае окрестность переднего фронта требует более детального рассмотрения на основе точных уравнений и тех или иных граничных условий для динамического угла контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 1, с. 43–51.
2. Семенова И. П., Якубенко А. Е. Изучение стационарных волновых режимов течения вязкой жидкости в тонких слоях.— Отчет Ин-та мех. МГУ, 1979, № 2249. 45 л.
3. Воинов О. В. Гидродинамика смачивания.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 5, с. 76–84.
4. Воинов О. В. Об углах наклона границы в движущихся жидких смесях.— ПМТФ, 1977, № 2, с. 92–99.
5. Железный Б. В., Корнева Т. В. Динамический угол смачивания сухой лиофильной поверхности.— Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 3, с. 569–572.

Москва

Поступила в редакцию
26.I.1982