МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1983

УДК 532.23

НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ РАВНОВЕСНЫЕ ФОРМЫ КАПЛИ НА ПЛОСКОСТИ

ПОПОВА Л. Н.

Неравномерное распределение температуры, наличие поверхностно-активных веществ, примесей, а также другие факторы приводят к изменению угла смачивания вдоль плоскости подложки. Исследуется влияние малого возмущения равновесного краевого угла α на форму свободной поверхности жидкости. Рассматривается два случая: поверхность малой крутизны в поле сил тяжести и форма, близкая к сферической, в условиях невесомости. Получены также равновесные формы жидкой капли на наклонной плоскости в условиях гистерезиса смачивания.

1. Рассмотрим задачу о равновесии жидкой капли на горизонтальной плоскости в поле сил тяжести. Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z так, чтобы ось z была вертикальна. Пусть $z=f(r, \varphi)$ – уравнение свободной поверхности Г капли. Предположим, что $|\nabla f|\ll 1$, $0<\alpha<1$. Условия равновесия поверхности малой крутизны имеют вид [1]

$$f_{rr}+\frac{f_r}{r}+\frac{f_{\varphi\varphi}}{r^2}-bf=q(\Gamma),\qquad f(R(\varphi),\varphi)=a$$

$$\frac{\sqrt{r^2f_r^2+f_\varphi^2}}{r}=\operatorname{tg}\alpha(r,\varphi)\qquad (r=R(\varphi)) \tag{1.1}$$

$$\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R(\varphi)}r[f(r,\varphi)-a]\,dr=V$$

Здесь введены обозначения: $b=\rho g/\sigma$; ρ – плотность жидкости; g – интенсивность поля сил тяжести ($g>0$, если направление силы тяжести противоположно направлению оси z и $g<0$ в противном случае), σ – коэффициент поверхностного натяжения на Г; q – постоянная, определяемая в процессе решения задачи; $r=R(\varphi)$ – уравнение линии смачивания, неизвестная функция; V – объем капли; α – угол смачивания, отсчитываемый в сторону жидкости, учитывающий влияние температуры, поверхностно-активных веществ и других факторов на величину равновесного краевого угла; $z=a$ ($a>0$) – уравнение твердой подложки.

Пусть $\alpha(r,\varphi)=\alpha_0+\varepsilon(r,\varphi)$, где α_0 – постоянная, отличная от нуля, а $|\varepsilon(r,\varphi)|\ll\alpha_0$. Будем искать решение уравнений (1.1), которое мало отличается от решения осесимметричной задачи, соответствующей значению $\alpha=\alpha_0$ [1], при следующих предположениях:

$$f(r,\varphi)=f_0(r)+h(r,\varphi),\quad R(\varphi)=r_0+\rho(\varphi)$$

$$q=q_0+q_1,\quad |h(r,\varphi)|\ll|f_0(r)|,\quad |\rho(\varphi)|\ll r_0$$

$$|q_1|\ll|q_0|,\quad h_\varphi^2(r_0,\varphi)\ll r_0^2f_0'(r_0)\times[f_0''(r_0)\rho(\varphi)+h_r(r_0,\varphi)]$$

Тогда линейные уравнения для малых добавок $h(r,\varphi)$, $\rho(\varphi)$ и q_1 записываются в виде

$$h_{rr}+\frac{h_r}{r}+\frac{h_{\varphi\varphi}}{r^2}-bh=q_1,\qquad h(r_0,\varphi)+f_0'(r_0)\rho(\varphi)=0$$

$$h_r(r_0,\varphi)+f_0''(r_0)\rho(\varphi)=-\frac{\varepsilon(r_0,\varphi)}{\cos^2\alpha_0} \tag{1.2}$$

$$\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{r_0}rh(r,\varphi)\,dr=0$$

Представим функцию $\varepsilon(r_0, \varphi)$ и решение задачи (1.2) в виде

$$\varepsilon(r_0, \varphi) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) \tag{1.3}$$

$$h(r, \varphi) = h_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} h_m(r)\,(A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)$$

$$\rho(\varphi) = c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \cos m\varphi + d_m \sin m\varphi)$$

Подставляя эти разложения в условия (1.2) и решая полученные уравнения относительно $h_m(r)$, A_m, B_m, c_m, d_m, при $b\neq 0$ находим

$$h_0(r) = A_0\left[F_0(r\sqrt{|b|}) - \frac{2F_1}{R_0}\right], \qquad h_m(r) = F_m(r\sqrt{|b|})$$

$$A_0 = \pm\frac{r_0 F_1 a_0}{[F_1F_2 - R_0(F_1^2 \mp F_2^2)]\cos^2\alpha_0}, \tag{1.4}$$

$$c_0 = \frac{-r_0F_1F_2a_0}{[R_0(F_1^2\mp F_2^2) - F_1F_2]\sin\alpha_0\cos\alpha_0}$$

$$A_m = -\frac{r_0F_1a_m}{[(m+1)F_mF_1 - R_0(F_mF_0 \mp F_1F_{m+1})]\cos^2\alpha_0}$$

$$c_m = -\frac{r_0F_1F_ma_m}{[(m+1)F_mF_1 - R_0(F_mF_0\mp F_1F_{m+1})]\sin\alpha_0\cos\alpha_0}$$

Здесь F_m обозначает функцию Бесселя 1-го рода J_m в случае $b<0$ и функцию Бесселя мнимого аргумента 1-го рода I_m при $b>0$; $R_0=\sqrt{|B|}$; $B=br_0^2$ – число Бонда ($B>-\mu_1^2$, где $\mu_1=3{,}83171$ – наименьший положительный корень функции J_1 [1]); $F_m\equiv F_m(R_0)$. В формулах (1.4) следует брать верхний знак при $b>0$ и нижний знак – при $b<0$.

При $b=0$ имеем

$$h_0(r) = \frac{r_0a_0}{3\cos^2\alpha_0}\left(1-\frac{2r^2}{r_0^2}\right), \qquad h_m(r) = r^m$$

$$A_m = -\frac{a_m}{(m-1)r_0^{m-1}\cos^2\alpha_0}, \qquad c_0 = -\frac{r_0a_0}{3\sin\alpha_0\cos\alpha_0}$$

$$c_m = -\frac{r_0a_m}{(m-1)\sin\alpha_0\cos\alpha_0}$$

Для коэффициентов B_m, d_m и b_m справедливы такие же соотношения, как для A_m, c_m и a_m соответственно.

На фиг. 1 показана зависимость параметра $p=-c_m\sin\alpha_0\cos\alpha_0/(r_0a_m)$, характеризующего относительную деформацию капли в плоскости подложки, от числа Бонда (кривые *1–7* соответствуют значениям $m=0$; 2; 3; 4; 5; 6; 10). На фиг. 2 представлена эпюра изменения равновесного краевого угла для случая $\varepsilon(r_0, \varphi)=a_2\cos 2\varphi$, $a_2/\operatorname{tg}\alpha_0=0{,}1$ (штриховая линия) и соответствующие ей линии смачивания (*1–4*) при значениях $B=-8$, 0, 8, 16. Штрихпунктирной линией изображена невозмущенная линия смачивания. Полученные результаты согласуются с решением нестационарной задачи о растекании жидкой пленки на плоскости в условиях невесомости, приведенным в работе [3].

Пусть $b=0$, $|\alpha-\pi/2|\ll 1$. Тогда равновесная форма капли будет близка к полусфере

$$\rho=1+u(\theta, \varphi), \quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2, \quad 0\leqslant\varphi<2\pi$$
$$|u(\theta, \varphi)|\ll 1$$

Здесь ρ, θ, φ – сферическая система координат, начало которой выбрано в центре сферы, а координатная плоскость $\theta=\pi/2$ совпадает с твердой подложкой; ρ –

безразмерная переменная. Уравнения равновесия жидкости дают линейную краевую задачу для $u(\theta, \varphi)$

$$u_{\theta\theta}+\operatorname{ctg}\theta u_\theta+2u+\frac{u_{\varphi\varphi}}{\sin^2\theta}+q_1=0, \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2,$$

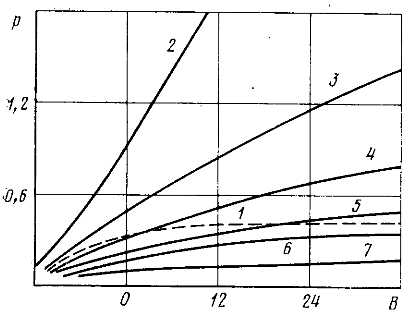
$$0\leqslant\varphi<2\pi, \qquad u_\theta\left(\frac{\pi}{2},\varphi\right)=-\varepsilon(1,\varphi)$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} u(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta=0$$

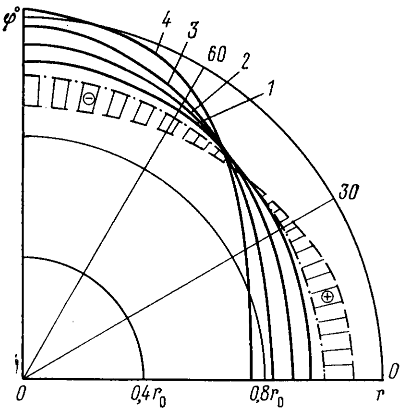
где $\varepsilon(\rho, \varphi)=\alpha(\rho, \varphi)-\pi/2$. Разлагая функцию $\varepsilon(1, \varphi)$ в ряд Фурье (1.3), аналогично предыдущему получим

$$u(\theta,\varphi)=a_0(\cos\theta-0{,}5)-\sum_{m=2}^{\infty}\frac{m+\cos\theta}{m^2-1}\operatorname{tg}^m\frac{\theta}{2}(a_m\cos m\varphi+b_m\sin m\varphi)$$

Характер изменения линии смачивания при малом возмущении α оказывается таким же, как в случае поверхности малой крутизны, а сама эта линия представляется кривыми, подобными приведенным на фиг. 2.



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Исследуем условия равновесия жидкой капли на твердой подложке, образующей угол β с горизонтальной плоскостью. Если равновесный краевой угол $\alpha_0=\pi/2$, то при $b=0$ поверхность капли представляет собой полусферу радиуса $R=\sqrt[3]{3V/(2\pi)}$ (V – объем жидкости). В условиях гистерезиса смачивания [2] (например, в том случае, когда плоскость шероховатая) равновесие возможно и при $b\neq0$, если выполняется неравенство $\alpha_{min}<\alpha<\alpha_{max}$, где α – метастабильный статический краевой угол, α_{min} – минимальный угол оттекания, α_{max} – максимальный угол натекания. Значения α_{min} и α_{max} ($\alpha_{min}<\alpha_0$, $\alpha_{max}>\alpha_0$) характеризуют гистерезис смачивания в трехфазной системе твердое тело – жидкость – газ и определяются экспериментально.

Пусть $B=0$. Выберем начало сферической системы координат ρ, θ, φ в центре сферы, координатную плоскость $\theta=\pi/2$ совместим с плоскостью подложки, а угол φ будем отсчитывать от оси x, направленной вдоль наклонной плоскости от вершины двугранного угла β.

Положим теперь $B\neq0$. Тогда свободная поверхность Г жидкости изменится. Найдем уравнение этой поверхности.

Предположим, что $|B|\ll1$. В этом случае форма капли близка к сферической: $\rho(\theta, \varphi)=1+Bu(\theta, \varphi)$, $\alpha(\varphi)=\pi/2+B\varepsilon(\varphi)$, неравенство $\alpha_{min}<\alpha<\alpha_{max}$ удовлетворяется автоматически, поэтому линия смачивания не изменяется [2] и представляет собой окружность $\rho(\pi/2, \varphi)=1$. Функция $u(\theta, \varphi)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$u_{\theta\theta}+\operatorname{ctg}\theta u_\theta+\frac{u_{\varphi\varphi}}{\sin^2\theta}+2u+q_1=\sin\beta\sin\theta\cos\varphi+\cos\beta\cos\theta,$$

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, \qquad 0\leqslant\varphi<2\pi \tag{3.1}$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) = 0, \qquad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} u(\theta, \varphi)\sin\theta\, d\theta = 0$$

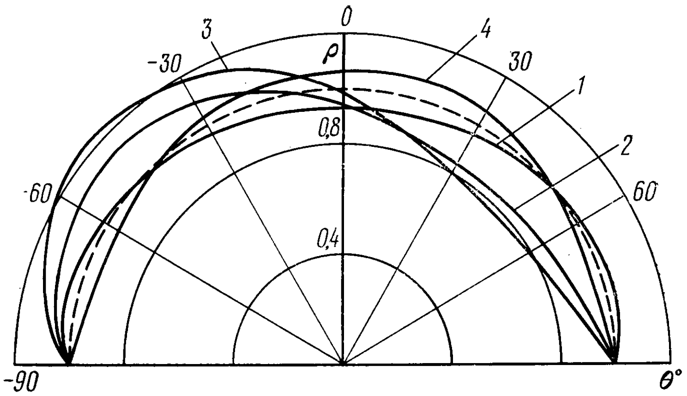
Поверхность Г симметрична относительно плоскости, проходящей через прямую x и ось $\theta=0$. Решение задачи (3.1) имеет вид

$$u(\theta, \varphi) = \frac{1}{3}\cos\beta\cos\theta\left[\frac{1}{2} - \ln(1+\cos\theta)\right] -$$

$$-\frac{1}{3}\sin\beta\cos\varphi\left[\sin\theta\ln(1+\cos\theta) + \cos\theta\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right]$$

Изменение краевого угла α вдоль линии смачивания определяется функцией $\varepsilon(\varphi) = -u_\theta(\pi/2, \varphi) = \cos\beta/6 - 2\sin\beta\cos\varphi/3$.

На фиг. 3 показаны равновесные формы капли на наклонной плоскости при $B=1$ и значениях угла $\beta°=0$, 45, 90, 180 (кривые *1–4* соответственно). Штриховая



Фиг. 3

линия соответствует случаю $B=0$. Представлены сечения свободных поверхностей жидкости плоскостью симметрии.

Уравнение $\rho(\theta, \varphi) = 1 + Bu(\theta, \varphi)$ инвариантно относительно замены $B \to -B$, $\beta \to \pi - \beta$, $\varphi \to \pi + \varphi$. Следовательно, форму капли для отрицательного значения числа Бонда B и угла наклона β можно получить поворотом равновесной поверхности, соответствующей положительному значению $-B$ и углу $\pi-\beta$, относительно оси $\theta=0$. Поскольку уравнения (3.1) не изменяются в результате подстановки $\beta \to 2\pi - \beta$, $\varphi \to \pi + \varphi$, то равновесные формы капли для β и $2\pi-\beta$ тоже совпадают с точностью до поворота относительно оси $\theta=0$.

Наличие гистерезиса смачивания позволяет объяснить удержание капли на наклонной плоскости, так как при изменении краевого угла α вдоль линии смачивания возникает сила, уравновешивающая составляющую силы тяжести по оси x:

$$mg\sin\beta = \sigma R \int_0^{2\pi} \cos\alpha\cos\varphi\, d\varphi$$

где m – масса капли.

В заключение автор выражает признательность И. Е. Тарапову и И. И. Иевлеву за постоянное внимание к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
2. *Сумм Б. Д., Горюнов Ю. В.* Физико-химические основы смачивания и растекания. М.: Химия, 1976. 232 с.
3. *Greenspan H. P.* On the motion of a small viscous droplet that wets a surface.– J. Fluid Mech., 1978, v. 84, № 1, p. 125–143.

Харьков

Поступила в редакцию 22.II.1982