

УДК 536.25

ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ КОНВЕКЦИЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ

НЕПОМНЯЩИЙ А. А., СИМАНОВСКИЙ И. Б.

Конвективная устойчивость равновесия жидкости со свободной поверхностью при наличии термокапиллярного эффекта подробно исследована (см. [1]). В большинстве работ на свободной границе для температуры ставятся граничные условия третьего рода. Более точным является подход, в котором расчет температуры на границе осуществляется в двухслойной постановке, т. е. решается сопряженная гидродинамическая и тепловая задача в средах по обе стороны от границы раздела. В немногочисленных работах по исследованию устойчивости равновесия двухслойных систем с учетом термокапиллярного эффекта [2-4] задача рассматривалась только в рамках линейной теории.

В настоящей работе исследуются конечно-амплитудные конвективные движения в двухслойной системе, возникающие под действием термокапиллярного механизма. Расчеты проводятся методом сеток для различных соотношений параметров жидкостей. Обнаружен новый тип неустойчивости равновесия — термокапиллярные колебания. Изучена эволюция колебательных движений при изменении числа Марангони. Установлены следующие формы переходов между режимами конвекции: переход от колебательного к стационарному движению посредством неограниченного возрастания периода; бифуркация удвоения периода, сопровождаемая перестройкой пространственной структуры течения. Показано, что термогравитационный механизм неустойчивости приводит к подавлению колебаний.

1. Рассмотрим замкнутую полость прямоугольного сечения с твердыми границами, заполненную двумя вязкими несмешивающимися жидкостями. Начало координат помещено на границе раздела, ось x горизонтальна, ось y направлена вертикально вверх. Граница раздела предполагается плоской и недеформируемой, коэффициент поверхностного натяжения σ линейно зависит от температуры T : $\sigma(T) = \sigma_0 - \alpha T$ (σ_0 и α — константы). Верхняя жидкость заполняет область $0 < x < l$, $0 < y < a_1$, а нижняя — область $0 < x < l$, $-a_2 < y < 0$. Коэффициенты динамической и кинематической вязкости, теплопроводности, температуропроводности и объемного расширения верхней и нижней жидкостей соответственно равны η_i , ν_i , κ_i , χ_i , β_i ($i=1, 2$). Здесь и в дальнейшем все величины, относящиеся к верхней жидкости, обозначаются индексом 1, а величины, относящиеся к нижней жидкости, — индексом 2. Введем следующие обозначения: $\eta = \eta_1/\eta_2$, $\nu = \nu_1/\nu_2$, $\kappa = \kappa_1/\kappa_2$, $\chi = \chi_1/\chi_2$, $\beta = \beta_1/\beta_2$, $L = l/a_1$, $a = a_2/a_1$. Выберем в качестве единиц длины, времени, функции тока, вихря скорости и температуры соответственно a_1 , a_1^2/ν_1 , ν_1 , ν_1/a_1^2 и θ (θ — разность температур между горизонтальными границами полости). Полные нелинейные уравнения свободной конвекции для функции тока ψ_i , вихря скорости φ_i и температуры T_i запишем в безразмерных переменных

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} = d_i \Delta \psi_i + G b_i \frac{\partial T_i}{\partial x}$$

$$\Delta \psi_i = -\varphi_i \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial T_i}{\partial x} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial T_i}{\partial y} = \frac{c_i}{P} \Delta T_i$$

Здесь $d_1=b_1=c_1=1$, $d_2=1/\nu$, $b_2=1/\beta$, $c_2=1/\chi$; $G=g\beta_1\theta a_1^3/\nu_1^2$ — число Грасгофа, $P=\nu_1/\chi_1$ — число Прандтля.

Граничные условия на твердых стенках имеют вид

$$\begin{aligned} x=0, x=L, \psi_i=\partial\psi_i/\partial x=0 \quad (i=1, 2) \\ y=1, \psi_1=\partial\psi_1/\partial y=0 \\ y=-a, \psi_2=\partial\psi_2/\partial y=0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Рассматриваются два варианта задания температуры на твердых границах, соответствующие подогреву снизу и сверху

$$y=-a, T_2=1; y=1, T_1=0; x=0, x=L, T_1=\frac{1-y}{1+\kappa a}, T_2=\frac{1-\kappa y}{1+\kappa a} \quad (1.3)$$

$$y=-a, T_2=0; y=1, T_1=1; x=0, x=L, T_1=\frac{y+\kappa a}{1+\kappa a}, T_2=\frac{\kappa(y+a)}{1+\kappa a} \quad (1.4)$$

На границе раздела выполняются условия равенства нулю нормальных составляющих скорости (граница недеформируема), непрерывности касательных составляющих скорости, касательных напряжений, температуры и теплоточков

$$\begin{aligned} y=0, \quad \psi_1=\psi_2=0, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial y}=\frac{\partial\psi_2}{\partial y}, \quad T_1=T_2, \quad \kappa\frac{\partial T_1}{\partial y}=\frac{\partial T_2}{\partial y} \\ \varphi_2=\eta\varphi_1+M\gamma\frac{\partial T_1}{\partial x} \quad M\gamma=\eta M/P \quad (M=\alpha\theta a_1/\eta_1\chi_1) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $M\gamma$ — число Марангони.

Поставленная краевая задача (1.1)–(1.5) определяется восемью физическими ($G, P, M\gamma, \eta, \nu, \kappa, \chi, \beta$) и двумя геометрическими параметрами (L, a).

2. Решение системы (1.1)–(1.5) осуществлялось с помощью метода конечных разностей. Вычислительная процедура подробно описана в [5]. Использовалась явная схема метода установления с центральными разностями. В начальный момент времени на покоящуюся жидкость накладывались возмущения, имеющие двух- или четырехвихревую структуру и представляющие собой локальные изменения полей вихря скорости.

Основные расчеты производились на равномерной сетке 32×32 . Уравнение Пуассона решалось методом итераций (схема Либмана с последовательной верхней релаксацией). Точность итерирования уравнения Пуассона при расчете стационарных движений составляла 10^{-4} , а при расчете колебательных движений — 10^{-8} . Аппроксимация вихря скорости на твердых границах осуществлялась по формуле Тома [6]. На границе раздела вихрь скорости в верхней жидкости вычислялся по формуле

$$\varphi_1(x, 0) = \frac{-2[\psi_2(x, -\Delta y) + \psi_1(x, \Delta y)]}{(\Delta y)^2(1+\eta)} - M\gamma \frac{1}{1+\eta} \frac{\partial T_1}{\partial x}(x, 0)$$

вывод которой аналогичен выводу формулы Тома, а в нижней жидкости — по последней из формул (1.5). Здесь Δy — шаг сетки по вертикальной координате. Расчет температуры на границе раздела осуществлялся по формуле второго порядка точности

$$\begin{aligned} T_1(x, 0) = T_2(x, 0) = \\ = \frac{[4T_2(x, -\Delta y) - T_2(x, -2\Delta y)] + \kappa[4T_1(x, \Delta y) - T_1(x, 2\Delta y)]}{3(1+\kappa)} \end{aligned}$$

Величина шага по времени выбиралась из условий устойчивости счета.

При исследовании нестационарных режимов конвекции осуществлялись следующие проверки метода: 1) уменьшение пространственного шага

сетки (расчеты на сетке 40×40); 2) уменьшение шага по времени; 3) использование формул Кусковой — Чудова [7] для расчета вихря на твердых границах; 4) использование формул 1-го порядка для расчета температуры на границе раздела; 5) повышение точности итерирования уравнения Пуассона (до 10^{-9}); 6) варьирование способа обхода узлов сетки при итерировании уравнения Пуассона. Структура нестационарных движений во всех случаях сохранялась, а изменения порогового числа Mg и амплитуды колебаний были незначительны. Например, при использовании формул первого порядка точности для температуры на границе раздела критическое число Mg понижалось примерно на 10%. Уменьшение вдвое шага по времени приводило в области развитой конвекции к уменьшению амплитуды колебаний не более чем на 3%.

Вследствие большого числа параметров задачи остановимся лишь на некоторых характерных случаях, приводящих к качественно различающимся результатам. В пункте 3 описываются стационарные конвективные движения, а в пункте 4 — колебательные режимы термокапиллярной конвекции.

3. Рассмотрим сначала систему, для которой коэффициенты тепло- и температуропроводности для верхней жидкости в 2 раза меньше, чем для нижней ($\kappa = \chi = 0,5$; $\eta = \nu = \beta = 1$; $P = 1$; $L = 2$; $a = 1$). Термогравитационная конвекция в этой системе исследовалась в [8]. Числа Рэлея, определенные отдельно для верхней и нижней жидкости, вследствие различия градиентов температуры и коэффициентов температуропроводности различаются в 4 раза. Поэтому при $Mg = 0$ с увеличением разности температур критические условия для возникновения конвекции в верхней жидкости достигаются раньше, чем в нижней, так что при превышении критического числа Грасгофа конвекция, обусловленная архимедовой силой, развивается только в верхней жидкости, а в нижней существует слабое течение, индуцированное напряжениями на границе раздела.

Для термокапиллярной конвекции ($Mg \neq 0$) ситуация качественно иная. Температурное возмущение на границе раздела вызывает движение одновременно в обеих жидкостях. Зависимость максимального значения функции тока ψ_{im} от числа Mg при $G = 0$, $a = 1$, $L = 2$ (подогрев задан формулами (1.4)) и характерная картина изолиний приведены на фиг. 1.

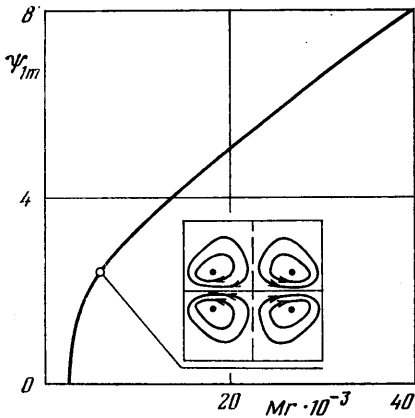
Для стационарного конвективного движения четырехвихревой структуры течение симметрично относительно вертикальной оси при любых значениях параметров жидкостей

$$\psi_i(x, y) = -\psi_i(L - x, y), \quad i = 1, 2$$

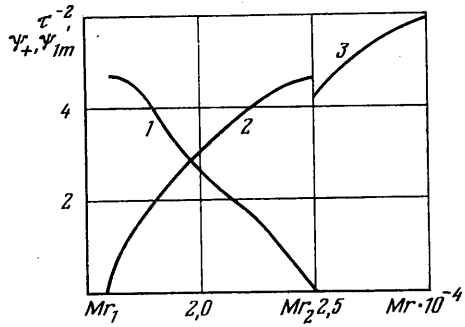
Кроме того, для данного случая ($\eta = \nu = 1$, $a = 1$) имеет место специфическое свойство симметрии: $\psi_1(x, y) = -\psi_2(x, -y)$, $0 < y < 1$. Вихри имеют характерную для термокапиллярной конвекции «приплюснутую» форму, интенсивное движение осуществляется вблизи границы раздела. Заметим, что как двух-, так и четырехвихревое начальное возмущение приводит к одному и тому же стационарному режиму.

При подогреве, заданном формулами (1.3), система сохраняет механическое равновесие во всей исследованной области значений $Mg < 2 \cdot 10^5$. Данную ситуацию можно пояснить следующим образом. Пусть вблизи границы раздела появилось положительное возмущение температуры. Приток холодной жидкости сверху и горячей жидкости снизу, обусловленный термокапиллярным эффектом, имеет одинаковую интенсивность. Однако вследствие различия температуропроводности сред поднимающаяся горячая жидкость охлаждается быстро, а опускающаяся холодная нагревается медленно, что приводит к затуханию возмущения. Четырехвихревая структура при $G = 0$ наблюдалась также для систем реальных жидкостей с близкими значениями параметрами η , ν .

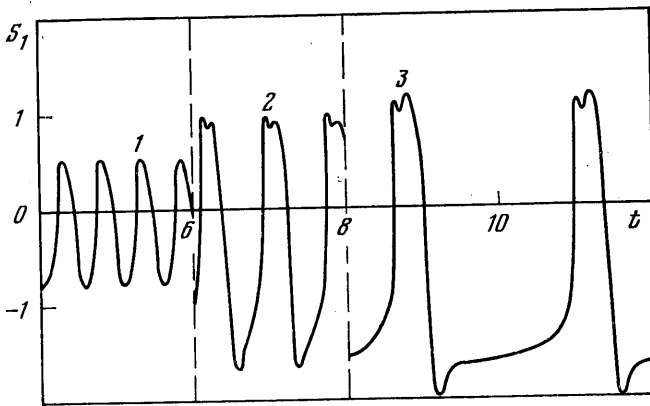
4. В случае, когда коэффициенты η , ν существенно различаются, а κ , χ — близки, оказывается возможной колебательная неустойчивость равно-



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

весия. Приведем сначала результаты расчетов для системы с параметрами $\eta = \nu = 0,5$; $\kappa = \chi = \beta = 1$; $P = 1$; $L = 2,5$; $a = 1$, $G = 0$. При подогреве, заданном формулами (1.3), механическое равновесие сохраняется при $Mg < Mg_1 \approx 15\,700$. В подкритической области ($Mg = 15\,000$) начальное четырехвихревое возмущение затухает колебательно. При $Mg > Mg_1$ развиваются конвективные колебания, характеризуемые в дальнейшем величинами

$$S_1(t) = \int_0^{L/2} dx \int_0^1 dy \psi_1(x, y, t), \quad S_2(t) = \int_{L/2}^L dx \int_0^1 dy \psi_1(x, y, t),$$

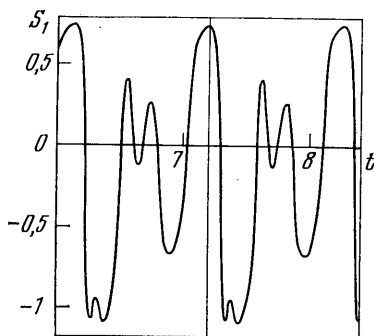
$$\psi_+ = \max_t \max_{x,y} |\psi_1(x, y, t)|$$

Движение представляет собой четырехвихревую симметричную относительно вертикальной оси $x = L/2$ структуру, для которой $S_1 = -S_2$. Зависимость $S_1(t)$ для различных значений Mg показана на фиг. 2. Линии 1, 2, 3 соответствуют значениям $Mg = 1,8 \cdot 10^4$; $2,25 \cdot 10^4$; $2,4 \cdot 10^4$. Вблизи порога колебания близки к синусоидальным; их период $\tau \approx 0,46$, амплитуда изменяется с ростом $Mg - Mg_1$ по корневому закону. С увеличением Mg колебания становятся существенно нелинейными, их период нарастает. На фиг. 3 представлена зависимость τ^{-2} от Mg (линия 1). В области $22\,500 < Mg < Mg_2 = 25\,000$ период колебаний хорошо аппроксимируется формулой

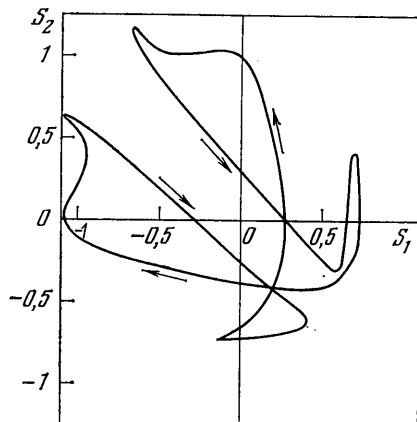
$$\tau^{-2} = 0,62 (Mg_2 - Mg) \quad (4.1)$$

При $Mg > Mg_2$ устанавливается стационарное конвективное движение. Зависимость (4.1) позволяет высказать предположение, что при $Mg = Mg_2$ колебательный цикл превращается в сепаратрису негрубой седловой точки (седло-узла) [9]. Гистерезис между стационарными и колебательными режимами не обнаружен. Заметим, что аналогичная ситуация наблюдалась в задаче о конвекции проводящей жидкости в магнитном поле [10].

На фиг. 3 также показана зависимость величины ψ_+ от числа Mg для колебательного режима (линия 2) и ψ_{1m} — для стационарного (линия 3).



Фиг. 4



Фиг. 5

Величины $q_- = \lim_{Mg \rightarrow Mg_2 - 0} \psi_+$ и $q_+ = \lim_{Mg \rightarrow Mg_2 + 0} \psi_{1m}$ заметно различаются. Величина q_+ близка к среднему значению $\psi_{1m}(t)$ за период нелинейных колебаний.

При подогреве сверху (1.4) данная система сохраняет устойчивость по крайней мере до значений $Mg = 2 \cdot 10^3$.

Более сложная последовательность переходов обнаружена при отношении сторон полости $L=2$. Как и для случая $L=2,5$, в результате неустойчивости равновесия возникает колебательное движение, симметричное относительно вертикальной оси ($S_1 = -S_2$). С ростом числа Mg происходит бифуркация удвоения периода, сопровождаемая нарушением симметрии течения. В процессе колебаний осуществляется не только изменение интенсивности движения, но и взаимное вытеснение вихрей с противоположным направлением вращения. Зависимость $S_1(t)$ приобретает более сложный характер (см. фиг. 4; $Mg=25\ 000$). Равенство $S_1 = -S_2$ нарушается; типичная фазовая траектория на плоскости (S_1, S_2) изображена на фиг. 5 ($Mg=25\ 000$). Дальнейшее увеличение числа Mg приводит к установлению стационарной конвекции.

Описанные выше типы переходов получены также при исследовании пространственно-периодических конвективных движений в системе двух бесконечных горизонтальных слоев жидкостей. Расчеты осуществлялись для конвективных ячеек с $L=2$ и $2,5$, на вертикальных границах которых задавались условия симметрии.

Включение силы тяжести может приводить к подавлению колебаний. При достижении числом Грасгофа некоторого порогового значения в системе реализуется симметричная относительно вертикали стационарная четырехвихревая структура, причем конвективная циркуляция осуществляется во всем объеме полости (а не вблизи границы раздела, как это было в случае термокапиллярной конвекции).

В заключение авторы выражают благодарность Е. М. Жуховицкому за внимание к работе и Г. З. Гершуни за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Zeren R. W., Reynolds W. C. Thermal instabilities in two-fluid horizontal layers.— J. Fluid Mech., 1972, v. 53, № 2, p. 305–327.
3. Imaishi N., Fujinawa K. Theoretical study of the stability of two-fluid layers.— J. Chem. Eng. Jap., 1974, v. 7, № 2, p. 81–87.
4. Imaishi N., Fujinawa K. Thermal instability in two-fluid layers.— J. Chem. Eng. Jap., 1974, v. 7, № 2, p. 87–92.
5. Симаковский И. Б. Конечно-амплитудная конвекция в двухслойной системе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 5, с. 3–9.
6. Том А., Эйплг К. Числовые расчеты полей в технике и физике. М.—Л.: Энергия, 1964. 208 с.
7. Кускова Т. В., Чудов Л. А. О приближенных граничных условиях для вихря при расчете течений вязкой несжимаемой жидкости.— В кн.: Вычисл. методы и программирование. Вып. 11. М.: ВЦ МГУ, 1968, с. 27–31.
8. Симаковский И. Б. Численное исследование конвекции в системе двух несмешивающихся жидкостей, подогреваемых снизу.— В кн.: Конвектив. течения и гидродинам. устойчивость. Свердловск, 1979, с. 126–131.
9. Апонин Ю. М. Асимптотические формулы для предельного цикла при вырождении в петлю сепаратрисы седло-узла. (Препринт НИВЦ АН СССР.) Пущино, 1980. 28 с.
10. Сорокин Л. Е., Тарунин Е. Л., Шлюмис М. И. Монотонные и колебательные режимы конвекции проводящей среды в магнитном поле.— Магн. гидродинамика, 1975, № 4, с. 22–30.

Пермь

Поступила в редакцию
29.III.1982