

УДК 533.695.5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

**БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ С. М., КОТОВСКИЙ В. Н.,
НИШТ М. И., ФЕДОРОВ Р. М.**

Задача об отрывном обтекании кругового цилиндра содержит много особенностей, полно учесть которые пока не удалось ни в одном из подходов, известных авторам. Видимо, принципиально наиболее точными следует считать те методы решения указанной задачи, которые строятся с использованием уравнений Рейнольдса (см., например, [1, 2]). Однако они являются и наиболее трудоемкими. Кроме того, их применение, при достаточно больших числах Re требует преодоления не только технических, но и ряда принципиальных трудностей.

Наиболее простой является схема, использующая модель идеальной среды [3, 4]. При фиксированных местах отрыва [5] она оказалась весьма эффективной для построения отрывных нестационарных течений, в том числе и дорожек типа Кармана, при обтекании многих тел и пластин.

Опыт работы авторов по численному моделированию отрывного обтекания цилиндрических профилей с гладким контуром привел их к убеждению, что роль вязкости среды в подобных задачах существенно проявляется прежде всего в формировании места отрыва на гладкой части поверхности. Поэтому наиболее перспективными, по их мнению, являются методы, использующие нестационарные подходы при изучении отрывного обтекания с использованием теории пограничного слоя и модели идеальной среды вне этого слоя. К этому направлению относятся работы [6–8, 9].

В работе [6] на основе метода дискретных вихрей для потенциального течения и интегрального метода для стационарного ламинарного пограничного слоя с использованием приближения Польгаузена произведен расчет нестационарного обтекания кругового цилиндра. Пограничный слой рассчитывался только в лобовой части цилиндра. При расчете потенциального обтекания авторами достаточно произвольно введен коэффициент диссипации вихрей, переменный по длине аэродинамического следа.

В рамках идеальной среды исследованы гидродинамические силы, действующие на цилиндр при нестационарном отрывном обтекании, причем вязкость учитывалась путем задания среднего положения точек отрыва на поверхности цилиндра при различных числах Re в соответствии с экспериментальными данными [7].

С использованием стационарного подхода, модели идеальной среды и теории пограничного слоя рассчитано стабилизированное отрывное обтекание цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью при закритических числах Re , т. е. при наличии турбулентного пограничного слоя и следа за цилиндром [8]. Потенциальное обтекание тела вытеснения (цилиндр и след) определялось интегралом Келдыша – Седова, а расчет пограничного слоя и следа велся интегральным методом. Существенным является использование критериев отрыва при учете сильного взаимодействия внешнего потока с оторвавшимся слоем. В этой работе также дан обширный обзор расчетных моделей турбулентных отрывных течений.

В работе [9] для расчета нестационарного отрывного обтекания решетки телесных профилей вязкой жидкостью используется комплексный подход, основанный на сочетании модели идеальной среды и теории пограничного слоя. С использованием этого подхода в настоящей работе предлагается схема течения и численный метод, позволяющие осуществить полное решение задачи об отрывном нестационарном обтекании цилиндра. При этом не привлекаются никакие новые эмпирические данные, кроме тех, которые используются в общепринятых моделях пограничного слоя и идеальной среды.

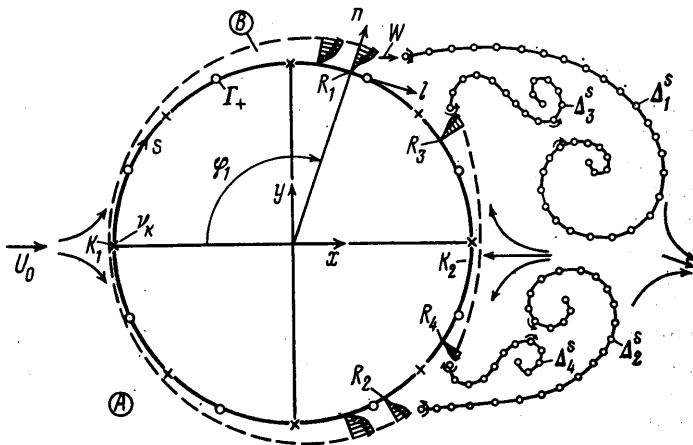
1. Схема течения. Избранная схема течения представлена на фиг. 1, где область A — потенциальное течение вне цилиндра и пограничного слоя, область B — течение в пограничном слое.

Расчет нестационарного течения в области A осуществлялся методом дискретных вихрей [5, 9]. При этом непрерывное изменение параметров

потока в пространстве и во времени заменялось дискретным. Для расчета течения в области A на поверхности цилиндра располагались N суммарных дискретных вихрей $\Gamma_{+\mu}^r$ в виде бесконечных вихревых нитей, заменяющих присоединенный и свободный вихревые слои (здесь $r=1, 2, \dots$ — индекс расчетного момента времени $t=r\Delta t$, где Δt — дискретность времени). Посередине между дискретными вихрями располагались N контрольных точек ($v=1, 2, \dots, N$), в которых выполнялись граничные условия о непротекании поверхности тела.

Считалось, что цилиндр из состояния покоя внезапно приведен в движение со скоростью U_0 . Далее рассматривается уже в относительном движении процесс развития течения при постоянной U_0 .

В начальный момент времени ($r=1$), когда пограничный слой на поверхности тела еще не успел развиться, а течение является безотрывным,



Фиг. 1

исходя из граничных условий о непротекании поверхности тела и равенства нулю нормальной и касательной составляющей скорости в передней (K_1) критической точке (фиг. 1), можно составить систему линейных алгебраических уравнений для определения величины циркуляций суммарных дискретных вихрей $\Gamma_{+\mu}^r$. В другие моменты времени ($r > 1$) условие равенства нулю касательной составляющей скорости в точке K_1 заменялось, согласно теореме Томсона, условием о постоянстве циркуляции по замкнутому контуру, охватывающему тело и его след. Однако такие системы уравнений получаются переопределенными, что ликвидировалось с помощью введения в систему уравнений регуляризирующей функции W_0 , которая стремится к нулю как $1/N$. Способ ее применения изложен в [10]. По известным циркуляциям дискретных вихрей определялось распределение скоростей в любой области течения и на поверхности тела, что являлось одним из граничных условий для расчета течения в пограничном слое.

Основной особенностью предлагаемой схемы течения является то, что течение в пограничном слое (область B) вдоль поверхности цилиндра рассчитывалось не только в лобовой части от передней критической точки K_1 до точек отрыва R_1 и R_2 , но и в донной области от задней критической точки K_2 до точек отрыва R_3 и R_4 при наличии там возвратного течения.

Оторвавшийся пограничный слой в точках R_1, R_2, R_3 и R_4 считался полностью вытесненным в область A и моделировался цепочками свободных дискретных вихрей $\Delta_1^s, \Delta_2^s, \Delta_3^s$ и Δ_4^s (здесь $s=1, 2, \dots, r-1$ — моменты времени возникновения этих дискретных вихрей). Величина их циркуляции принималась равной потоку завихренности пограничного слоя в

сечении отрыва за расчетный интервал времени

$$\Delta = \int_0^{\Delta t} \int_0^{\delta} u \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial v}{\partial l} \right) dn dt$$

где u и v — продольная и поперечная скорость в пограничном слое соответственно, δ — его толщина, l и n — местные декартовы координаты (l — направление касательной, а n — направление нормали к контуру). При этом предполагалось, что после отрыва пограничного слоя начальное направление движения этих вихрей, моделирующих оторвавшийся пограничный слой, совпадает с движением жидкости со средней скоростью в пограничном слое

$$W = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} (u+v) dn$$

в местах отрыва (точки R_1, R_2, R_3 и R_4), а ядро каждого из вихрей в начале расчетного отрезка времени Δt находилось на таком расстоянии по нормали к поверхности цилиндра, на котором скорость в пограничном слое достигает значения W . Такой подход является приближенным. Однако, как показали методические исследования, использование других гипотез относительно местоположения ядра вихря Δ и его скорости W слабо влияет на формирование течения в целом.

В дальнейшем расчет нестационарного потенциального течения в области A производился с учетом вихревого следа, состоящего из цепочек свободных дискретных вихрей $\Delta_1^s, \Delta_2^s, \Delta_3^s$ и Δ_4^s , величины циркуляции которых оставались неизменными во времени, а их движение совпадало с движением жидких частиц среды.

Как показали расчеты, в окрестности точки отрыва поперечная скорость приобретает значение того же порядка, что и продольная скорость. Поэтому она учитывалась как при определении завихренности Δ , так и скорости W .

Переходя от одного расчетного момента времени к следующему, изучалось формирование и развитие всего отрывного течения около цилиндра в областях A и B .

Методика, описанная выше, разработана для расчета потенциального обтекания цилиндрических профилей произвольной формы, в том числе и кругового цилиндра. Однако в случае кругового цилиндра можно было бы применить более простой прием с использованием комплексного потенциала течения и инверсией дискретных вихрей следа внутрь цилиндра.

2. Математическое моделирование. С учетом изложенных выше особенностей, начальных и граничных условий для расчета потенциального течения в области A использовались следующие системы уравнений, определяющие безразмерные циркуляции дискретных вихрей Γ_μ^r .

В начальный момент времени ($r=1$) после возникновения движения использовалась система

$$\sum_{\mu=1}^N \Gamma_\mu^r w_{n\mu v} + W_0 = -2\pi U_{0nv}, \quad v=1, 2, \dots, N \quad (2.1)$$

$$\sum_{\mu=1}^N \Gamma_\mu^r w_{l\mu v} + W_0 = -2\pi U_{0lv}, \quad v=v_k$$

Первые N уравнений системы (2.1) выражают собой условия непротекания поверхности цилиндра в N контрольных точках v , последнее — равенство нулю касательной составляющей скорости в точке K_1 .

В последующие моменты времени ($r > 1$) использовалась система уравнений:

$$\sum_{\mu=1}^N \Gamma_{\mu}^r w_{n\mu\nu} + W_0 = -2\pi U_{0n\nu} - \sum_{s=1}^{r-1} (\delta_1^s w_{n\nu}^{(1)} + \delta_2^s w_{n\nu}^{(2)} + \delta_3^s w_{n\nu}^{(3)} + \delta_4^s w_{n\nu}^{(4)}), \quad \nu = 1, 2, \dots, N \quad (2.2)$$

$$\sum_{\mu=1}^N \Gamma_{\mu}^r + W_0 = - \sum_{s=1}^{r-1} (\delta_1^s + \delta_2^s + \delta_3^s + \delta_4^s), \quad \Gamma = \frac{\Gamma_+}{U_0 L}, \quad \delta = \frac{\Delta}{U_0 L}$$

Здесь, как и в системе (2.1), первые N уравнений выражают условие непротекания поверхности цилиндра в контрольных точках, а последнее уравнение — теорему Томсона о постоянстве циркуляции по замкнутому контуру, охватывающему обтекаемое тело и его след.

В системах (2.1) и (2.2) $w_{n\mu\nu}$, $w_{l\nu}$, $w_{n\nu}^{(1)}$, $w_{n\nu}^{(2)}$, $w_{n\nu}^{(3)}$ и $w_{n\nu}^{(4)}$ — безразмерные функции координат дискретных вихрей и контрольных точек [5], индексы n или l указывают соответственно нормальное или касательное направление к поверхности обтекаемого контура в данной контрольной точке ν , а L — характерный линейный размер обтекаемого тела.

После определения циркуляций дискретных вихрей Γ_{μ}^r составляющие скорости в произвольной точке поля течения будут равны

$$V_x = U_{0x} + \sum_{\mu=1}^N \Gamma_{\mu}^r w_{x\mu} + \sum_{s=1}^{r-1} (\delta_1^s w_x^{(1)} + \delta_2^s w_x^{(2)} + \delta_3^s w_x^{(3)} + \delta_4^s w_x^{(4)}) \quad (2.3)$$

$$V_y = U_{0y} + \sum_{\mu=1}^N \Gamma_{\mu}^r w_{y\mu} + \sum_{s=1}^{r-1} (\delta_1^s w_y^{(1)} + \delta_2^s w_y^{(2)} + \delta_3^s w_y^{(3)} + \delta_4^s w_y^{(4)})$$

Значение относительной скорости с внешней стороны поверхности обтекаемого контура в контрольной точке ν определялось по формуле

$$V_{i\nu} = U_{0i\nu} + \sum_{\mu=1}^N \Gamma_{\mu}^r w_{i\mu\nu} + \sum_{s=1}^{r-1} (\delta_1^s w_{i\nu}^{(1)} + \delta_2^s w_{i\nu}^{(2)} + \delta_3^s w_{i\nu}^{(3)} + \delta_4^s w_{i\nu}^{(4)}) + \frac{1}{2\Delta l} (\Gamma_{\nu-1}^r + \Gamma_{\nu}^r) \quad (2.4)$$

где Δl — длина дуги между двумя соседними контрольными точками.

Для расчета вязкого течения в пограничном слое (область B) использовалась система дифференциальных уравнений нестационарного пограничного слоя, которая в общепринятых обозначениях имеет вид [11]

$$\frac{\partial u}{\partial l} + \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial l} + v \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial V_e}{\partial t} + V_e \frac{\partial V_e}{\partial l} + \nu \frac{\partial}{\partial n} \left[(1 + \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial n} \right] \quad (2.5)$$

где ν и ε — кинематическая и турбулентная вязкость соответственно. Граничными условиями, используемыми при этом, являлись условие прилипания жидкости к поверхности обтекания и стремление продольной скорости u в пограничном слое к скорости V_e потенциального течения вне

пограничного слоя в данный расчетный момент времени, т. е. $u=v=0$ при $n=0$, $u \rightarrow V_e(t, s)$ при $n=\delta$. Здесь t — время, а s — криволинейная координата, отсчитываемая от критической точки вдоль поверхности цилиндра.

Для замыкания системы уравнений нестационарного турбулентного пограничного слоя (2.5) использовалась модель турбулентной вязкости в форме Ван-Дриста и Клебанова [12]. Согласно этой модели, для стационарного пограничного слоя, он делится на внутреннюю и внешнюю области. Во внутренней области модель турбулентной вязкости базируется на гипотезе Прандтля о «пути смещения» с учетом вязкого подслоя, демпфирующего влияния стенки и продольного градиента давления, а во внешней области — на гипотезе о постоянстве турбулентной вязкости с учетом коэффициента перемежаемости Клебанова. Таким образом, выражения для турбулентной вязкости в этих областях имеют следующий вид:

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{\nu} (\kappa_1 n)^2 \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{n}{\kappa_2 \nu} \left(\frac{\tau_w}{\rho} + \frac{dp}{dl} \frac{n}{\rho} \right)^{1/2} \right] \right\}^2 \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|, & 0 \leq n \leq n_0 \\ \frac{1}{\nu} \kappa_3 \left[\int_0^\infty (V_e - u) dn \right] \left[1 + \kappa_4 \left(\frac{n}{\delta} \right)^6 \right]^{-1}, & n > n_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Здесь κ — эмпирические постоянные ($\kappa_1=0,44$; $\kappa_2=26$, $\kappa_3=0,0168$, $\kappa_4=5,5$), n_0 — координата точки сопряжения двух областей пограничного слоя, которая выбирается из условия непрерывности вихревой вязкости по толщине пограничного слоя.

Выражения (2.6) для определения турбулентной вязкости получены для стационарного пограничного слоя. Однако, учитывая, что основная часть спектра частот турбулентных пульсаций в пограничном слое более чем на порядок превышает частоту колебаний внешнего потока [13], данная модель использовалась и для расчета нестационарного пограничного слоя.

На первом шаге интегрирования дифференциальных уравнений пограничного слоя от критической точки K_1 или K_2 профили продольной и поперечной скоростей и толщина δ задавались в соответствии с точным решением для плоского течения в окрестности критической точки [11].

После приведения к безразмерному виду система (2.5) с использованием выражения (2.6) интегрировалась конечно-разностным методом, разработанным в Вычислительном центре МГУ [14].

За критерий отрыва нестационарного пограничного слоя принималось условие $\partial u / \partial n \rightarrow 0$ при $n=0$. В работе [15] установлено, что точки, определенные с помощью критерия отрыва нестационарного пограничного слоя и этого условия, расположены достаточно близко друг к другу.

Возможность применения модели пограничного слоя в области, где $\partial u / \partial n \rightarrow 0$ при $n=0$, подтверждено проведенным в работе [16] анализом членов уравнения движения на основании экспериментального измерения профилей осредненных и пульсационных скоростей и давления в этой области.

3. Определение коэффициентов нестационарных аэродинамических сил. В точках, лежащих на поверхности обтекаемого контура, коэффициент давления определяется по интегралу Коши — Лагранжа, который можно записать в виде

$$p' = \frac{p - p_0}{\rho U_0^2 / 2} = 1 - V_l^2 - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Здесь φ — потенциал возмущенных скоростей, V_l — относительная скорость потока, индекс 0 относится к параметрам потока на бесконечности, а индексом l обозначено касательное направление к контуру.

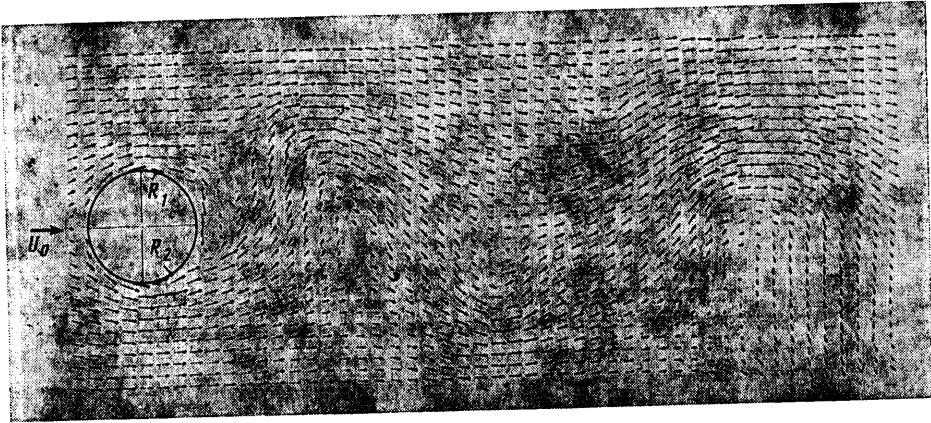
При определении p' на поверхности цилиндра учитывался разрыв значения φ в точках отрыва пограничного слоя. Величина разрыва φ в этих точках равна циркуляции по жидкому контуру, охватывающему соответствующую свободную вихревую ячею.

Интегрируя p' по замкнутому контуру обтекаемого тела, получим выражения для коэффициентов подъемной силы и силы лобового сопротивления

$$C_y = - \oint [p' \cos \alpha - \tau_w \sin \alpha] ds, \quad C_x = \oint [p' \sin \alpha + \tau_w \cos \alpha] ds$$

где τ_w — сила трения в пограничном слое, α — угол между нормалью n и осью y . За характерный линейный размер при определении коэффициентов C_y и C_x выбран диаметр цилиндра d .

4. Методические исследования. Апробация конечно-разностной схемы решения системы дифференциальных уравнений (2.5) производилась путем расчета и сравнения с другими точными и приближенными решениями профилей скоростей и других параметров пограничного слоя на пла-



Фиг. 2

стине и в градиентных потоках при обтекании эллиптических и кругового цилиндра.

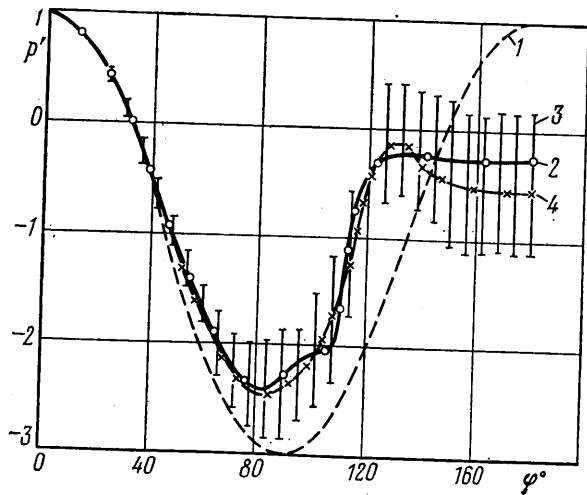
Кроме того, величина трения на стенке и положение точек, в которых трение равно нулю, сравнивались с расчетом по способу Польгаузена [11]. Эти сравнения показали хорошее согласование.

Для уменьшения количества разбиений в конечно-разностной схеме интегрирования уравнений пограничного слоя и сохранения точности расчетов применялась неравномерная сетка по толщине пограничного слоя с 26 ячейками [14].

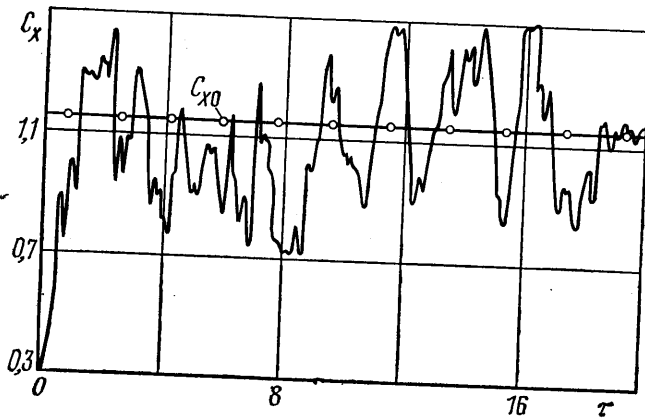
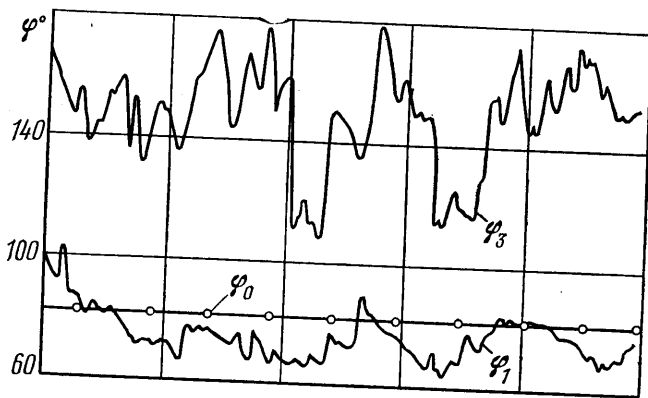
При расчете потенциальной области течения на поверхности цилиндра равномерно располагалось 60–90 дискретных вихрей, между которыми размещались контрольные точки. Интервал безразмерного времени $\Delta\tau = \Delta t U_0 / d$ между расчетными моментами времени варьировался от 0,025 до 0,1. При этом среднее значение всех рассчитываемых параметров оставалось неизменным.

Далее приводятся результаты расчета нестационарного отрывного обтекания кругового цилиндра, внезапно приведенного в движение из состояния покоя, при ламинарном и турбулентном режиме течения в пограничном слое.

5. Отрывное обтекание цилиндра при турбулентном пограничном слое. На фиг. 2 в момент времени $\tau = 17,5$ изображено кинематическое поле скоростей вокруг цилиндра. Расчеты показали, что в донной области возникает интенсивное возвратное течение, связанное с наличием там вихревых ступков. При этом в местах вихревых образований индуцируются значительные по величине скорости потенциального течения. С течением времени ввиду принципиальной неустойчивости такого течения оно теряет устойчивость и симметричность нарушается. Верхний и нижний вихревые ступки поочередно отделяются от цилиндра и уносятся из донной обла-



Фиг. 3



Фиг. 4

сти, образуя аэродинамический след, напоминающий дорожку с шахматным расположением вихрей. Параметры вихревой дорожки и число Струхала схода вихрей ($Sh=0,2$) удовлетворительно совпадают с экспериментальными данными [17, 18].

Наличие интенсивных вихревых образований за цилиндром и их нестационарный характер приводят к существенному изменению парамет-

ров потенциального течения и вызывают нестационарность в распределении скоростей на его поверхности. Поэтому положение точек отрыва R_1 и R_2 с течением времени не остается неизменным. В первые моменты времени после начала движения цилиндра они движутся в направлении передней критической точки, а после установления периодического характера вихревого следа их положение также колеблется возле некоторого установившегося значения $\varphi=110^\circ$, что несколько ниже наблюдаемого в эксперименте $\varphi_0=125-130^\circ$ при числе $Re=0,67 \cdot 10^6$ [11]. Расчетное среднее значение коэффициента лобового сопротивления превышает экспериментальное. Это, видимо, связано с тем, что в эксперименте в донной области цилиндра завихренность, от которой зависит размер зоны разрежения и его величина, меньше завихренности оторвавшегося пограничного слоя с лобовой части цилиндра в точках R_1 и R_2 .

Поэтому расчетная схема была усовершенствована путем введения в расчет турбулентного пограничного слоя в кормовой части цилиндра (см. схему на фиг. 1). Вследствие его отрыва в точках R_3 и R_4 в поток сходят свободные вихревые пелены с циркуляцией Δ_3^s и Δ_4^s . Они имеют обратный знак циркуляциям Δ_1^s и Δ_2^s соответственно и, как показали расчеты, снижают завихренность, попадающую в донную область, примерно на 20%. Вследствие этого возмущающее воздействие свободных вихревых пелен, сходящих с лобовой части цилиндра, на течение у его поверхности снижается. Поэтому точки отрыва R_1 и R_2 сдвигаются ближе к задней критической точке. В результате за счет уменьшения зоны разрежения в кормовой части цилиндра и снижения его величины среднее за период колебания значение коэффициента лобового сопротивления получается близким к экспериментальному значению $C_{x0}=0,35$, а среднее значение угла отрыва потока также удовлетворительно соответствует экспериментальному значению.

На фиг. 3 приводятся результаты расчета распределения коэффициента давления по поверхности цилиндра при расчете его по схеме с пограничным слоем в донной области. Здесь, как и на фиг. 5, линия 1 — безотрывное обтекание, 2 — эксперимент, 3 — границы нестационарных значений, полученные расчетом, а 4 — осреднение этих значений.

Как видно, результаты расчета, приведенные на фиг. 3, удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными при рассмотренном числе $Re=0,67 \cdot 10^6$.

В принципе можно рассматривать схемы обтекания цилиндра и с большим числом свободных вихревых пелен вследствие отрыва пограничного слоя.

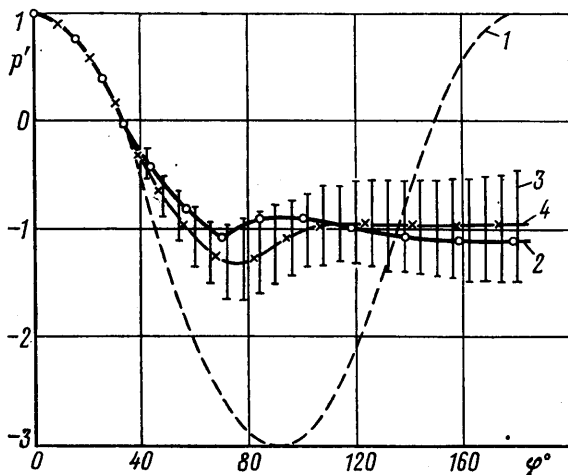
6. Отрывное обтекание цилиндра при ламинарном пограничном слое. Особый интерес представляет задача о моделировании отрывного обтекания цилиндра с ламинарным пограничным слоем, поскольку теория турбулентного пограничного слоя носит полуэмпирический характер. Кроме того, принципиально важно убедиться в возможности моделировать не только турбулентный отрыв, происходящий за миделевым сечением цилиндра, но и ламинарный, который образуется в его лобовой части.

С целью проверки влияния пограничного слоя в кормовой части на формирование течения около цилиндра был осуществлен численный эксперимент — расчет отрывного обтекания цилиндра только с ламинарным пограничным слоем в лобовой части. Оказалось, что при исследовании обтекания цилиндра по такой схеме расчетный коэффициент лобового сопротивления превышает экспериментальное его значение на 30—40%. Таким образом, и здесь нельзя пренебречь пограничным слоем в донной области. Поэтому расчеты проводились по схеме с турбулентным пограничным слоем в кормовой области цилиндра.

Расчеты по этой схеме показали (фиг. 4), что средний за период колебания аэродинамического следа расчетный коэффициент лобового сопротивления удовлетворительно соответствует экспериментальному значению.

нию C_{x0} , равному примерно 1,1–1,2 [11] при $Re=10^5$. Среднее значение углов φ_1 и φ_2 отрыва ламинарного пограничного слоя в лобовой части цилиндра получилось равным 75° и отличается на 7° от экспериментального значения φ_0 , равного примерно 82° [6].

За счет периодического изменения поля течения, вследствие попеременного отделения от цилиндра вихревых сгустков противоположного знака все четыре точки отрыва пограничного слоя колеблются в фазе с числом $Sh=0,18-0,19$ (фиг. 4). Однако из-за относительно более слабого влияния ближнего аэродинамического следа на течение в лобовой части цилиндра амплитуда колебания точек отрыва R_1 и R_2 ламинарного погра-



Фиг. 5

ничного слоя значительно меньше, чем точек отрыва R_3 и R_4 пограничного слоя в донной области.

На фиг. 5 для этой схемы течения показано распределение коэффициента давления по поверхности цилиндра в сравнении с экспериментальными данными [11].

Таким образом, использование схемы отрывного обтекания цилиндра с пограничным слоем как в лобовой, так и в кормовой части приводит к результатам, которые лучше соответствуют экспериментальным данным, чем результаты расчетов по схеме с пограничным слоем только в лобовой части.

В заключение авторы благодарят Г. И. Петрова за полезные советы и дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Госмен А. Д., Пан В. М., Ранчел А. К., Сполдинг Д. Б., Вольфштейн М. Численные методы исследования течений вязкой жидкости. М.: Мир, 1972. 323 с.
2. Трегьяков В. В., Ягодкин В. И. Расчетное исследование турбулентного закрученного течения в трубе. — Инж.-физ. ж., 1979, т. 37, № 2, с. 254–259.
3. Ильичев К. П., Постоловский С. Н. Расчет нестационарного отрывного обтекания тел плоским потоком невязкой жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 2, с. 72–82.
4. Петров А. С. Расчет отрывного обтекания эллиптических цилиндров. — Тр. ЦАГИ, 1978, вып. 1930, с. 3–12.
5. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 350 с.
6. Sarpkaya T., Shaff R. L. Inviscid model of two-dimensional vortex shedding by a circular cylinder. — AIAA Journal, 1979, v. 17, № 11, p. 1193–1200.
7. Вальес Н. Г. Расчет срывного обтекания цилиндра при автоколебаниях в потоке идеальной жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 3, с. 173–178.
8. Гогиш Л. В., Степанов Г. Ю. Турбулентные отрывные течения. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 2, с. 31–47.

9. Котовский В. Н., Ништ М. И., Федоров Р. М. Математическое моделирование нестационарного отрывного обтекания решеток телесных профилей.— Докл. АН СССР, 1982, т. 263, № 6, с. 1326–1330.
10. Лифанов И. К. О сингулярных интегральных уравнениях с одномерными и кратными интегралами типа Коши.— Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 2, с. 265–268.
11. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
12. Sebesci T., Smith A. M. O., Mosinskis G. Calculation of compressible adiabatic turbulent boundary layers.— AIAA Journal, 1970, v. 8, № 11, p. 1974–1982.
13. Telionis Demetri P., Tsahalis Demosthenes Th. Unsteady turbulent boundary layers and separation.— AIAA Pap., 1975, v. 27. 10 p.
14. Пасконов В. М., Рабинькина Н. В. Решение уравнений нестационарного пограничного слоя разностным методом.— В кн.: Численные методы в газовой динамике. Вып. 4. М.: Изд-во МГУ, 1965, с. 130–138.
15. Dwyer H. A., McCroskey W. J. Cross flow and unsteady boundary — layer effects on rotating blades.— AIAA Journal, 1971, v. 9, № 8, p. 1498–1505.
16. Sandborn V. A., Liu C. G. On turbulent boundary — layer separation.— J. Fluid Mech., 1968, v. 32, № 2, p. 293–304.
17. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 206 с.
18. Федяевский К. К., Блюмина Л. X. Гидроаэродинамика отрывного обтекания тел. М.: Машиностроение, 1977. 120 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.XI.1982