

УДК 533.6.011.55

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА РЕЖИМА СИЛЬНОГО ВЯЗКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ТРЕУГОЛЬНОМ КРЫЛЕ

ДУДИН Г. Н., ЛЫЖИН Д. О.

Предложен метод расчета пространственного пограничного слоя на треугольном крыле на режиме сильного вязкого взаимодействия с внешним гиперзвуковым потоком. Представлены результаты численного решения краевой задачи.

При гиперзвуковом обтекании тонких треугольных крыльев существенное влияние на характер течения в пограничном слое оказывает тип вязкого взаимодействия с внешним потоком. При сильном взаимодействии градиент давления, индуцируемый пограничным слоем, влияет на течение в нем уже в первом приближении и из-за этого возможно возникновение самоиндуцированных вторичных течений.

Симметричное обтекание тонкой треугольной пластины на режиме сильного вязкого взаимодействия впервые было рассмотрено в [1] и было показано, что полученная краевая задача зависит только от двух независимых переменных, однако предложенное в виде ряда решение не удовлетворяет условию непротекания в плоскости симметрии крыла. В соответствии с теорией, развитой для двумерных [2] и пространственных [3, 4] течений, на режиме сильного вязкого взаимодействия решение вблизи передней кромки крыла не является единственным, что позволяет удовлетворять граничным условиям на заднем конце тела или на линии симметрии в случае треугольного крыла. Существование особенности в плоскости симметрии и влияние ее на отбор решения на всем крыле затрудняло получение глобального решения задачи традиционным маршевым методом. Некоторые возможные типы локальных решений указаны в [5]. В предположении, что уравнения пограничного слоя справедливы на всем крыле, в [6, 7] был предложен релаксационный метод численного исследования и получены глобальные решения краевой задачи как при симметричном обтекании, так и при наличии угла скольжения. Однако, как показали численные расчеты пограничного слоя при увеличении стреловидности крыла, на режиме сильного вязкого взаимодействия из-за возникновения возвратных вторичных течений сходимость итераций ухудшается, что приводило к необходимости значительно уменьшать коэффициенты релаксации, а следовательно, существенно возрастало время, необходимое для решения краевой задачи.

Для преодоления этих трудностей предлагается итерационная процедура, на каждом шаге которой вводится функция невязки, определенная на всей длине расчетной области и представляющая собой разность между заданным и полученным в ходе решения уравнений пограничного слоя распределениями давления  $p$ . Эта функция используется в дальнейшем в обыкновенном дифференциальном уравнении второго порядка относительно  $p$ , решение которого позволяет определить новое приближение для распределения давления.

1. Рассматривается обтекание полубесконечной треугольной пластины гиперзвуковым потоком вязкого газа при нулевом угле атаки. Вводится декартова система координат, начало которой расположено в вершине треугольной пластины, ось  $x^\circ$  направлена вдоль оси симметрии, ось  $z^\circ$  — по размаху, а ось  $y^\circ$  — по нормали к плоскости пластины (фиг. 1). Величина  $\alpha$  — угол стреловидности крыла,  $s = \text{ctg } \alpha$  — удлинение. В соответствии с оценками для пограничного слоя в гиперзвуковом потоке вводятся безразмерные переменные  $u^\circ U_\infty$ ,  $w^\circ U_\infty$ ,  $v^\circ \tau s^{-1} U_\infty$  — проекции скорости на оси  $x^\circ L$ ,  $z^\circ s L$ ,  $y^\circ \tau L$ ,  $\rho^\circ \tau r_\infty$  — плотность,  $p^\circ \tau^2 \rho_\infty U_\infty^2$  — давление,  $g^\circ U_\infty^2 / 2$  — энталпия торможения,  $\mu^\circ \mu_0$  — динамический коэффициент вязкости,  $\delta^\circ \tau L$  — толщина вытеснения пограничного слоя. Параметр  $\tau = s^{1/4} \text{Re}^{-1/4}$ , где число Рейнольдса  $\text{Re} = \rho_\infty U_\infty L / \mu_0$ , определяется по значениям: плотности и скорости газа в невозмущенном потоке, коэффициента вязкости при температуре торможения, характерного размера  $L$ , который при рассмотрении

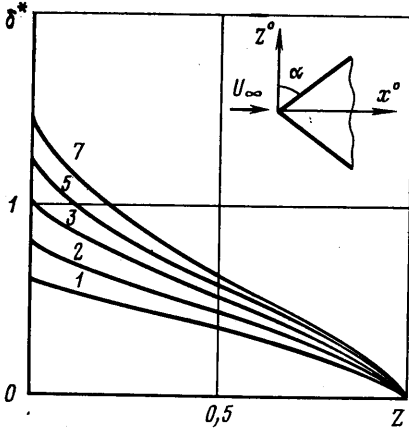
обтекания полубесконечной треугольной пластины из конечных результатов выпадает. Для дальнейшего рассмотрения целесообразно также ввести переменные А. А. Дородницына:

$$\lambda^{\circ} = \int_0^{y^{\circ}} \rho^{\circ} dy^{\circ}, \quad v_{\circ} = \rho^{\circ} v^{\circ} + su^{\circ} \frac{\partial \lambda^{\circ}}{\partial x^{\circ}} + w^{\circ} \frac{\partial \lambda^{\circ}}{\partial z^{\circ}} \quad (1.1)$$

В [1] показано, что на режиме сильного взаимодействия невязкого потока с пограничным слоем на полубесконечной пластине реализуется автомодельное течение вязкого газа, т. е. система уравнений пространственного пограничного слоя сводится к системе уравнений с двумя независимыми переменными. Для такого преобразования уравнений пространственного пограничного слоя вводятся следующие автомодельные переменные [6]:

$$x^{\circ} = x, \quad z^{\circ} = xz, \quad \lambda^{\circ} = x^{1/2} \lambda, \quad u^{\circ} = u, \quad w^{\circ} = w \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} p^{\circ} &= x^{-1/2} p^*(z), & \rho^{\circ} &= x^{-1/2} \rho(z, \lambda), \\ g^{\circ} &= g, & \mu^{\circ} &= \mu \\ v_{\circ} &= x^{-3/4} (v^* - xus \partial \lambda / \partial x), \\ \delta^{\circ} &= x^{1/4} \delta^*(z) \end{aligned}$$



Фиг. 1

При введении переменных (1.2) в уравнения пограничного слоя координата  $x$  выпадает из краевой задачи и получающаяся система уравнений зависит только от двух независимых переменных  $z$  и  $\lambda$  и описывает течение в поперечном направлении. Кроме того, для учета особенности поведения функций течения в окрестности передних кромок треугольной пластины ( $z = \pm 1$ ) вводятся переменные подобия

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} (1-z^2)^{1/2} \eta, \quad p^* = (1-z^2)^{-1/2} p(z) \quad (1.3)$$

$$\delta^* = (1-z^2)^{1/4} \Delta(z), \quad v^* = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} (1-z^2)^{1/2} \left[ v \frac{p}{1-z^2} - (w - suz) \frac{\partial \eta}{\partial z} \right]$$

Система уравнений пограничного слоя и граничные условия в безразмерном виде с учетом (1.1)–(1.3) имеют следующий вид:

$$(w - suz) \frac{1-z^2}{p} \frac{\partial f}{\partial z} + v \frac{\partial f}{\partial \eta} = G \quad (1.4)$$

$$f = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ g \end{Bmatrix}, \quad G = \begin{Bmatrix} -s \frac{\gamma-1}{2\gamma p} (g - u^2 - w^2) \left[ -\frac{1-z^2}{2} - z \left( z - \frac{1-z^2}{p} \frac{dp}{dz} \right) \right] + \\ + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ - \frac{\gamma-1}{2\gamma p} (g - u^2 - w^2) \left( z + \frac{1-z^2}{p} \frac{dp}{dz} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} - \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{\partial^2 (u^2 + w^2)}{\partial \eta^2} \right) \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = (w - suz) \frac{z}{2p} + \frac{1-z^2}{p} \left( sz \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{su}{4} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} u=w=v=0, & \quad g=g_w \quad (\eta=0) \\ u \rightarrow 1, \quad w \rightarrow 0, & \quad g \rightarrow 1 \quad (\eta \rightarrow \infty) \end{aligned} \right\}, \quad |z| \leq 1$$

где  $\sigma$  — число Прандтля,  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей. В системе (1.4) принята линейная зависимость вязкости от температуры.

Для решения краевой задачи (1.4) необходимо знать распределение давления, которое не задано и должно определяться в процессе совместного решения системы (1.4) с уравнениями для внешнего течения, которые можно получить, используя гиперзвуковую теорию малых возмущений [4].

В настоящей работе для простоты используется формула «касательного клина» в форме, справедливой при  $M_\infty \tau \gg 1$ ,  $p^\circ = (\gamma+1)(\partial\delta^\circ/\partial x^\circ)^2/2$ , которая после введения переменных (1.2), (1.3) преобразуется к виду

$$p = \frac{\gamma+1}{2} \left[ \frac{3}{4}(1-z^2)\Delta - z \left( (1-z^2) \frac{d\Delta}{dz} - \frac{2}{3} z \Delta \right) \right]^2 \quad (1.5)$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \frac{1}{p} \int_0^\infty (g-u^2-w^2) d\eta \quad (1.6)$$

Соотношения (1.5), (1.6) позволяют замкнуть краевую задачу (1.4), которая описывает течение в пограничном слое на треугольной пластине на режиме сильного вязкого взаимодействия с внешним потоком. Следует отметить, что на кромках пластины ( $z=\pm 1$ ) система (1.4)–(1.6) вырождается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений и ее решение позволяет найти распределение всех функций течения в пограничном слое на кромках и, в частности, значение величины давления  $p(z=\pm 1)=p_1$ .

2. В настоящей работе для решения краевой задачи (1.4)–(1.6) используется следующая итерационная процедура.

Пусть в начале  $n$ -й итерации задано распределение давления  $p^{(n)}(z)$  на равномерной по  $z$  сетке в расчетной области  $[-1, 1]$ , удовлетворяющее условию  $p^{(n)}(z=\pm 1)=p_1$ . Тогда система уравнений пограничного слоя (1.4) с заданным таким образом распределением давления решается численно с помощью релаксационного метода переменных направлений в соответствии с изменением направления распространения возмущений в областях с возвратными токами. Рассчитанные при этом поля функций течения  $u^{(n)}(z, \eta)$ ,  $w^{(n)}(z, \eta)$  и  $g^{(n)}(z, \eta)$  дают возможность определить толщину вытеснения  $\Delta^{(n)}(z)$  по формуле (1.6) и таким образом вычислить полученное распределение давления  $p_\delta^{(n)}(z)$  с помощью (1.5). Для вычисления нового приближения  $p^{(n+1)}(z)$  и перехода к следующей итерации используется соотношение

$$p^{(n+1)}(z) = p^{(n)}(z) + \Delta p^{(n)}(z) \quad (2.1)$$

где функция изменения давления  $\Delta p^{(n)}(z)$  представляет собой решение следующей краевой задачи:

$$\frac{d^2 \Delta p^{(n)}}{dz^2} - \alpha \Delta p^{(n)} = \alpha (p^{(n)} - p_\delta^{(n)}), \quad \Delta p^{(n)}(z=\pm 1) = 0 \quad (2.2)$$

Здесь  $\alpha$  — некоторая положительная константа.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока функции  $p^{(n)}(z)$  и  $p_\delta^{(n)}(z)$  не совпадут с заданной точностью на всем расчетном интервале.

Примененный алгоритм можно трактовать как математический прием, используемый для релаксации функций  $p^{(n)}(z)$  и  $p_\delta^{(n)}(z)$ , позволяющий построить новое приближение  $p^{(n+1)}(z)$ , удовлетворяющее при  $z=\pm 1$  тем же граничным условиям, что и  $p^{(n)}(z)$ , и отвечающее требованию  $p^{(n+1)} \rightarrow p^{(n)}$ , если  $p^{(n)} - p_\delta^{(n)} \rightarrow 0$  на всем отрезке  $[-1, 1]$ .

Следует отметить, что краевую задачу (2.2) можно построить, используя исходные уравнения пограничного слоя (1.4). Для этого рассмотрим  $n$ -й шаг описанной процедуры и запишем уравнение поперечного импульса на поверхности тела

$$\frac{dp^{(n)}}{dz} = \frac{p^{(n)}}{1-z^2} \left[ \frac{2\gamma p^{(n)}}{(\gamma-1)g_w} \left( \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial \eta^2} \right)_w - z \right] \quad (2.3)$$

Здесь индекс  $W$  обозначает поверхность тела.

Продифференцировав тождество (2.3) по  $z$ , получим

$$\begin{aligned} d^2 p^{(n)} / dz^2 &= \varphi^{(n)}(z) \\ \varphi^{(n)}(z) &= \left[ \frac{2\gamma}{(\gamma-1)g_w} p^{(n)} \left[ 2 \left( \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial \eta^2} \right)_w \frac{dp^{(n)}}{dz} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{d}{dz} \left[ \left( \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial \eta^2} \right)_w \right] p^{(n)} \right] - p^{(n)} + z \frac{dp^{(n)}}{dz} \left] \frac{1}{1-z^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Используем соотношение (2.4) для построения нового приближения  $p^{(n+1)}$ , введя функцию невязки  $p^{(n+1)} - p_\delta^{(n)}$

$$\frac{d^2 p^{(n+1)}}{dz^2} = \varphi^{(n)}(z) + \alpha (p^{(n+1)} - p_\delta^{(n)}) \quad (2.5)$$

$$p^{(n+1)}(z=\pm 1) = p_1$$

Вычитая из уравнения (2.5) тождество (2.4), приведем краевую задачу для  $p^{(n+1)}$  к форме

$$\frac{d^2}{dz^2} (p^{(n+1)} - p^{(n)}) - \alpha (p^{(n+1)} - p^{(n)}) = \alpha (p^{(n)} - p_\delta^{(n)})$$

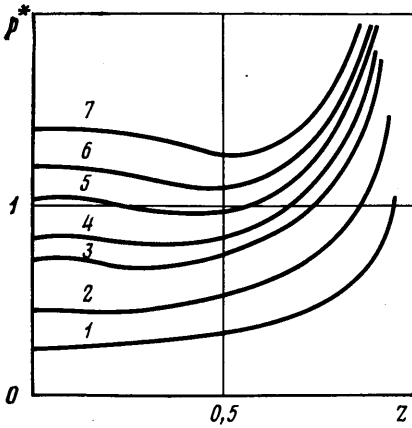
$$(p^{(n+1)} - p^{(n)})_{z=\pm 1} = 0$$

полностью совпадающей с (2.2).

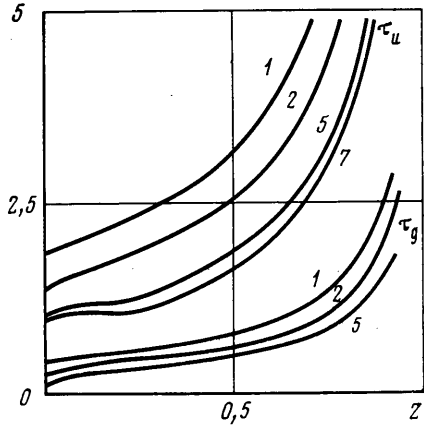
Следует отметить отличие такого подхода от релаксационного алгоритма [6, 7], который можно назвать «локальным» в том смысле, что для определения нового прогноза для величин давления в данной точке используется информация о заданном и полученном давлении только в рассматриваемой точке.

3. Как показали результаты численных расчетов пограничного слоя на полубесконечных треугольных крыльях, применение предложенного метода релаксации давления позволяло провести расчеты на крыльях с достаточно большими углами стреловидности, при которых в пограничном слое существуют развитые зоны возвратных вторичных течений. При этом следует отметить, что время, требуемое для решения краевой задачи (1.4)–(1.6), (2.2), при использовании предложенного метода, оказывается примерно 5 раз меньше, чем время, которое затрачивалось в [6] при расчете крыльев с одинаковыми параметрами. Величина константы  $\alpha$  в (2.2) менялась от значения 50 для течений со стеканием к плоскости симметрии до 2 для течений с возвратными течениями.

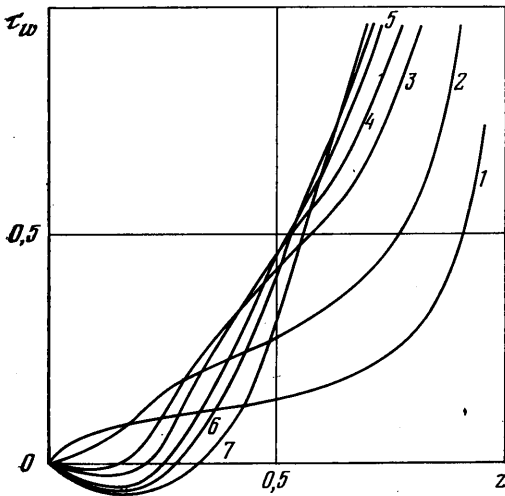
В численных расчетах предполагалось, что  $\gamma=1,4$ ,  $\sigma=0,71$  и  $g_w=0,5$ . На фиг. 1 приведены результаты расчета безразмерной толщины вытеснения пограничного слоя  $\delta^* = (1-z^2)^{1/4} \Delta(z)$  по размаху крыла для значе-



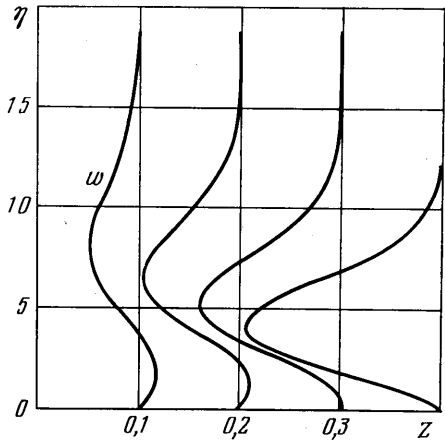
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

ний удлинения крыла  $s=5; 2; 1; 0,6; 0,4$ , соответствующих следующим стреловидностям треугольного крыла:  $\alpha \approx 11^\circ, 27^\circ, 45^\circ, 59^\circ, 68^\circ$ . Уменьшение удлинения крыла приводит к значительному возрастанию величины  $\delta^*$  в окрестности плоскости симметрии. На фиг. 1–4 значениям  $s=5; 2; 1; 0,8; 0,6; 0,5; 0,4$  соответствуют обозначения 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.

На фиг. 2 представлено распределение индуцированного давления  $p^*=(1-z^2)^{-1/2}p(z)$  по координате  $z$ . При уменьшении удлинения крыла  $s$  величина давления не только возрастает, но и характер ее изменения перестает быть монотонным для  $s < 2$ , причем область повышенного давления в окрестности плоскости симметрии увеличивается. На фиг. 3, 4 приведены результаты расчета безразмерных значений коэффициентов напряжения трения  $\tau_u = x^{0,5} \partial u^\circ / \partial y^\circ|_w$ ,  $\tau_w = x^{0,5} \partial w^\circ / \partial y^\circ|_w$  и теплового потока  $\tau_g = x^{0,5} \partial g^\circ / \partial y^\circ|_w$  по размаху крыла.

Следует отметить, что при значении параметра  $s=0,4$  в окрестности плоскости симметрии  $0 \leq z \leq 0,2$  наблюдается повышение коэффициента напряжения трения в продольном направлении  $\tau_u$  (аналогично изменяется величина теплового потока  $\tau_g$ , но более слабо). Это связано с тем, что при данном значении удлинения коэффициент  $(w - suz)$  при производной  $\partial f / \partial z$  меняет знак в окрестности поверхности крыла и на поверхность приходят струйки тока из внешней части пограничного слоя.

При обтекании треугольной пластины с углом стреловидности  $\alpha=45^\circ$  возникают возвратные вторичные течения. С увеличением угла стреловидности область возвратного течения увеличивается и при значениях  $s=0,4$  она занимает уже  $1/3$  размаха крыла.

На фиг. 5 представлены профили поперечной скорости  $w$  для значения поперечной координаты  $0 \leq z \leq 0,4$ , на которой видно, как происходит возникновение возвратного поперечного течения. Результаты представлены для значений  $s=0,4$ . Следует отметить также значительное возрастание толщины пограничного слоя при  $z \rightarrow 0$ , что приводит к необходимости увеличивать размер расчетной сетки по вертикальной координате  $\eta$ . В сечении  $z=0,1$  максимальная величина скорости возвратного течения равняется  $w=0,007$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженский М. Д.* О пространственном гиперзвуковом течении около тонких крыльев. — ПММ, 1964, т. 28, в. 5, с. 835–844.
2. *Нейланд В. Я.* Распространение возмущений вверх по течению при взаимодействии гиперзвукового потока с пограничным слоем. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 4, с. 40–49.
3. *Козлова И. Г., Михайлов В. В.* О сильном вязком взаимодействии на треугольном и скользящем крыльях. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 6, с. 94–99.
4. *Нейланд В. Я.* К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 1. Пространственные течения. — Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 2, с. 70–79.
5. *Нейланд В. Я.* К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 2. Двумерные течения и треугольное крыло. — Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 3, с. 28–39.
6. *Дудин Г. Н.* К расчету пограничного слоя на треугольной пластине на режиме сильного вязкого взаимодействия. — Уч. зап. ЦАГИ, 1978, т. 9, № 5, с. 65–70.
7. *Дудин Г. Н., Нейланд В. Я.* Теплообмен в окрестности точки излома передней кромки пластины при гиперзвуковом полете. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 3, с. 40–45.

Москва

Поступила в редакцию  
6.IV.1982