

УДК 533.6.011.5

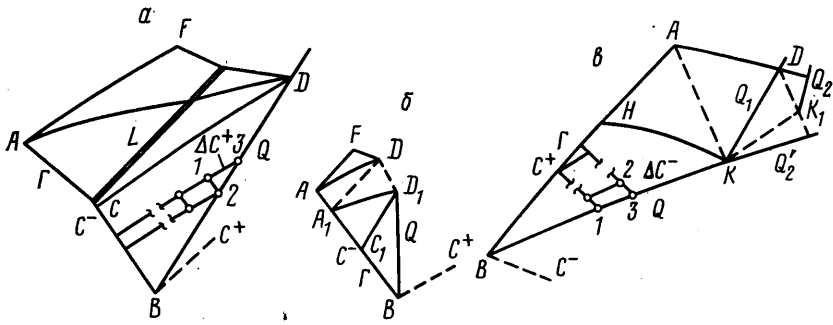
## О СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ПРОФИЛИРОВАНИЯ СВЕРХЗВУКОВЫХ СОПЕЛ И КАНАЛОВ

ВОЙНОВСКИЙ А. С., КИРЕЕВ В. И.

В статье применительно к обратному методу численного профилирования сверхзвуковой части сопел и каналов сформулированы и решены две новые смешанные краевые задачи газовой динамики с граничными условиями, задаваемыми как вдоль, так и поперек потока. Построена модификация сеточно-характеристического метода по слоям, образованным линиями тока. Решение поставленных смешанных задач позволяет спрофилировать более широкий по сравнению с известным класс плоских и осесимметричных сопел и каналов. Получены переходные каналы, реализующие преобразование одного расширяющегося потока в другой, который на выходе близок к течению от источника. Получены профили каналов с изломом образующей, реализующие гашение ударной волны на стенке. Приведены результаты профилирования выходных каналов с контактным разрывом, а также каналы, реализующие разрывы в выходных сечениях, которые обеспечиваются изэнтропически с помощью характеристик сжатия, фокусирующихся в точках разрыва.

1. В теории сверхзвуковых стационарных течений газовой динамики известны четыре характерные задачи: задача Коши с данными на нехарактеристической кусочно-гладкой кривой или вырожденной характеристике, задача Гурса с данными на характеристиках первого ( $C^+$ ) и второго ( $C^-$ ) семейств и две смешанные краевые задачи с данными на характеристиках  $C^+$  или  $C^-$  и на граничной линии тока вдоль которой задано распределение одной из величин — модуля вектора скорости  $w$  (давления  $p$ ) или угла  $\theta$  наклона  $w$  к оси  $x$  декартовой системы координат  $x, y$  [1, 2]. В [1] для смешанной краевой задачи, называемой ниже задачей 1, в качестве граничной кривой задается твердая стенка с известными вдоль нее углами  $\theta$ . Для другой смешанной задачи (задача 2) вместо стенки берется вычисляемая в процессе решения свободная поверхность с известным вдоль нее распределением давления  $p$ . Ниже, применительно к двумерному стационарному сверхзвуковому в общем случае разрывному течению внутри каналов, формулируются две новые смешанные краевые задачи профилирования сверхзвуковых каналов, которые для краткости будут называться смешанными задачами 3 и 4. В качестве разрывов могут быть заданы как ударные волны, так и контактные границы. Для определенности рассматривается течение в верхней половине плоскости декартовой системы координат  $x, y$ .

Пусть заданы кусочно-непрерывная кривая  $\Gamma$ , являющаяся  $C^+$ - или  $C^-$ -характеристикой, а также в общем случае разрывные газодинамические параметры вдоль нее  $F(\mathbf{r}_\Gamma)$  или  $F(\psi)$  ( $F(\mathbf{r}_\Gamma)$ ,  $F(\psi)$  — вектор-столбец газодинамических параметров,  $\mathbf{r}_\Gamma$  — радиус-вектор любой точки кривой  $\Gamma$ ,  $\psi$  — функция тока), определяющие некоторое сверхзвуковое течение, и граничная кусочно-непрерывная кривая  $Q$ , имеющая одну общую точку  $B$  с кривой  $\Gamma$  и целиком лежащая в угловой области, образованной характеристиками  $C^+$  и  $C^-$  (фиг. 1,  $a-e$ ). В случае, если на  $\Gamma$  задана ударная волна  $L$  (фиг. 1,  $a$ ), то она должна располагаться вне области влияния данных в выходном сечении искомого канала (ДСВ на фиг. 1,  $a$  и  $D_1C_1B$  на фиг. 1,  $b$ ). При расчете профиля сопла с учетом неоднородности полной энтальпии, удельной энтропии или при наличии закрутки потока в  $F(\psi)$



Фиг. 1

могут быть включены распределения этих параметров в зависимости от функции тока  $\psi$ , которые определяются течением во входной дозвуковой и трансзвуковой области сопла. Задания исходной характеристики  $C^-$  (фиг. 1, а, б) и  $C^+$  (фиг. 1, в) для определенности ниже называются соответственно 1-й и 2-й схемой.

Другая граница смешанной области  $Q$  может быть фиксированной либо нефиксированной. Рассмотрим случай, когда  $Q$  фиксирована. Пусть  $Q$  имеет уравнение  $r=r_q(s)$  ( $s$  — параметр) и удовлетворяет условию: величина производной по  $x$  в любой точке кривой  $Q$  не становится равной или меньше значения тангенса угла наклона к оси  $x$  текущего отрезка характеристики  $\Delta C^+$  (фиг. 1, а) или  $\Delta C^-$  (фиг. 1, в), пересекающегося с  $Q$ . Это ограничение обусловлено возможностью определения точки пересечения  $\Delta C^+$  ( $\Delta C^-$ ) с текущим отрезком 2—3 (1—3) вдоль  $Q$ . Для первой схемы в пределе  $Q$  может быть задана как характеристика. В этом случае вдоль нее должны быть определены все необходимые газодинамические параметры, удовлетворяющие характеристическому соотношению, и задача профилирования сводится к решению задачи Гурса.

Кривая  $Q$  может выходить за границы потока, заданного характеристикой  $\Gamma$ , так, как показано на фиг. 1, а, либо заканчиваться внутри него (фиг. 1, б). Для второй схемы  $Q$  в пределе может совпадать с линией тока, и тогда смешанные краевые задачи 3 и 4 сводятся к соответствующим задачам 1 и 2. Для 2-й схемы  $Q$  может включать условно называемый ниже «особый» излом  $K$ , в котором осуществляется переориентация  $Q$  таким образом, чтобы верхняя часть кривой  $Q$ , обозначенная  $Q_1$ , была заключена в смежную угловую область, образованную характеристиками первого  $KK_1$  и второго  $AK$  семейств (фиг. 1, в).

На фиксированной кривой  $Q$  ставятся граничные условия: для задачи 3 —  $\theta(r_q)$  или  $\theta(\psi)$  распределение углов наклона вектора скорости к оси  $x$ , для задачи 4 —  $p(r_q)$  или  $p(\psi)$  распределение давления. На нефиксированной кривой эти граничные условия задаются как функции  $\psi$ ,  $\theta(\psi)$  и  $p(\psi)$ . При этом имеется возможность варьировать границу  $Q$  в текущих угловых областях, образованных  $c^+$  и  $c^-$  характеристиками. Это позволяет доопределить на  $Q$  другой газодинамический параметр ( $p$  для задачи 3 и  $Q$  — для задачи 4). Значения  $\theta$  или  $p$  в точке  $B$  должны быть согласованы с соответствующими величинами на  $\Gamma$ . На  $\theta(r_q)$  ( $\theta(\psi)$ ) и  $p(r_q)$  ( $p(\psi)$ ) в общем случае не накладывается требование их непрерывности. В зависимости от положения точки  $B$  в потоке в ряде случаев на характер зависимости  $\theta(r_q)$  ( $\theta(\psi)$ ) и  $p(r_q)$  ( $p(\psi)$ ) необходимо накладывать некоторые дополнительные условия. Например, если точка  $B$  размещена на оси  $x$  и  $Q$  перпендикулярна ей, то  $p'(y)|_{y=0}$  должна быть равной 0. При указанных граничных условиях и начальных данных требуется построить стенку канала. Поставленные вдоль  $Q$  граничные условия не переопределяют задачу. Действительно, количество граничных условий на  $Q$  соответствует числу отходящих от нее характеристик. Граничные условия для смешанных

задач 3 и 4 аналогичны соответственно заданию твердой границы (стенки) в задаче 1 и давления в задаче 2. Однако смешанные краевые задачи 1 и 3, 2 и 4 не эквивалентны, так как в задачах 3 и 4 кривая  $Q$  не является фиксированной или определяемой линией тока, а задается поперек потока.

Рассмотрим теперь схемы профилирования каналов при решении задач 3 и 4 прямым (фиг. 1, а, е) и послойным методами характеристик. Порядок расчета внутренних точек расчетной области прямым методом характеристик не зависит от вида граничных условий и является обычным. Для расчета точек на границе используется отрезок 1-3 (2-3) характеристики  $\Delta C^+$  ( $\Delta C^-$ ) и соотношение вдоль нее. Величины  $\theta_3$  (задача 3) и  $p_3$  (задача 4) в искомой точке 3 на границе в процессе расчета определяются по  $\theta(r_q)$  ( $\theta(\psi)$ ) и  $p(r_q)$  ( $p(\psi)$ ). Неизвестный параметр в этой точке определяется из соотношения вдоль 1-3 (2-3). Расчет полной области  $ABD$  для 1-й схемы (фиг. 1, а) и ее части  $A_1BD_1$  (фиг. 1, б) может быть организован как вдоль  $C^+$ , так и вдоль  $C^-$ . В процессе расчета может быть выделена характеристика  $CD(C_1D_1)$ , которая ограничивает область влияния данных на линии  $BD(BD_1)$  границы  $Q$ . Для случая, показанного на фиг. 1, а, выделение осуществляется с использованием условия равенства текущей величины расхода газа на  $Q$ , его значению, полученному интегрированием вдоль известной характеристики  $\Gamma$ . Определение  $CD(C_1D_1)$  замыкает задачу Гурса в области  $ACDF(A_1C_1D_1D)$ . Линия тока  $AD$  (фиг. 1, б) после этого может быть построена в процессе решения новой задачи в области  $AA_1D$  по отрезку  $AA_1$ , являющемуся частью кривой  $\Gamma$ , и рассчитанной характеристике  $A_1D$ . Таким образом, задача профилирования прямым методом характеристик включает несколько задач — собственно смешанную краевую задачу и задачи Гурса.

Для 2-й схемы (фиг. 1, е), когда «особый» излом на границе  $Q$  отсутствует, смешанная краевая задача решается в области треугольного вида  $ABK$  и затем выделяется нужная линия тока  $HK$ . Здесь используется только часть характеристики  $AB$ . В случае, когда линия  $Q$  включает «особый» излом  $K$ , рассчитанная характеристика  $AK$  и  $Q_1(KD)$  образуют уже рассмотренную 1-ю схему. После расчета  $AD$  и неизвестных функций на  $Q_1$  можно решить задачу Коши в области  $DKK_1$ , после чего провести доопределение границы  $Q_2$  по 1-й схеме или  $Q_2'$  по 2-й схеме. Описанный процесс может быть продолжен.

Решение смешанных краевых задач 3 и 4 для 1-й схемы более удобно осуществлять модификацией метода характеристик по слоям  $\psi = \text{const}$  [3]. Это обусловлено тем, что при реализации на ЭВМ данных задач вычисления проводятся по единому алгоритму на регулярной расчетной сетке. Существо предложенной модификации состоит в следующем. Численный расчет проводится в области треугольного вида на подвижной сетке, одно семейство которой образуется линиями тока, а другое формируется в процессе расчета. Выбор вида последнего семейства определяется формой расчетной области и характером течения в ней.

Для большинства решенных в статье задач в качестве сеточных принимались линии двух видов — вертикальные линии, проходящие через точки пересечения линий тока с кривыми  $\Gamma$  и  $Q$ , и ортогональное семейство линий, образуемое подвижными отрезками прямых, восстанавливаемых перпендикулярно текущему отрезку линии тока  $\Delta C^0$ , которые выходят из точек пересечения линий тока с кривыми  $\Gamma$  и  $Q$ . При численном решении интегрирование ведется слоями, образованными линиями тока, которым соответствуют  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ , в направлении, поперечном к ним. Данная схема решения в отличие от прямой характеристической схемы не накладывает жестких требований на гладкость граничных условий.

В частном случае плоского течения с равномерной начальной характеристикой  $\Gamma$  по аналогии с задачами 1 и 2 [1] можно получить аналитические решения задач 3 и 4:

$$\theta = \Phi_3(y + \text{tg}(\alpha - \theta)x); \quad w = \Phi_4(y - \text{tg}(\theta - \alpha)x)$$

Здесь  $\Phi_3, \Phi_4$  — произвольные функции, которые могут быть определены из граничных условий.

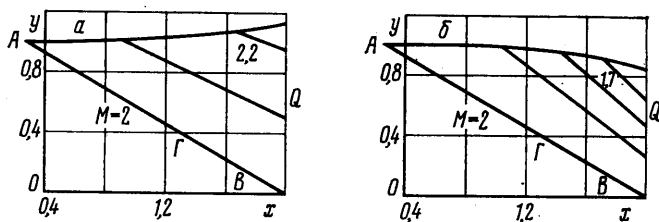
2. На основе изложенной постановки и сеточно-характеристического метода по слоям  $\psi = \text{const}$  на языке ФОРТРАН-4 применительно к ОС ЕС ЭВМ разработан комплекс программных средств, позволяющий профилировать новый, более широкий по сравнению с известным класс плоских и осесимметричных сопел и каналов. До недавнего времени профилирование отдельно сверхзвуковой части сопел производилось с помощью решения задачи Гурса с использованием заданной замыкающей характеристики. Известны различные способы ее задания. Наиболее распространенный способ заключается в выборе замыкающей прямолинейной характеристики, на которой  $w$  постоянен и параллелен оси  $x$ . Используются также симметричные и стоковые характеристики [2]. В работах [4–6] разработан метод профилирования сопел, реализующих заданные неравномерные параметры в выходном сечении, по которым с помощью решения задачи Коши рассчитывается замыкающая характеристика.

Задачи 3 и 4 представляют новые возможности профилирования сопел и каналов по граничным условиям, заданным поперек потока. Характер граничных условий в этих задачах определяется физическими требованиями конструирования профилей сопел и каналов. Например, задача 3 может использоваться для построения каналов с направленным отводом газов от поверхностей элементов летательных аппаратов, задача 4 — для каналов газодинамических установок, создающих в некоторой области заданное распределение давления в потоке, и в других случаях. При этом семейство сопел с симметричной характеристикой на выходе получается в частном случае при решении смешанной задачи 3 с граничным условием  $\theta = 0$ , когда линия  $Q = Q(y)$ . Частные случаи сопел, получаемых на основе задачи 4, авторам не известны.

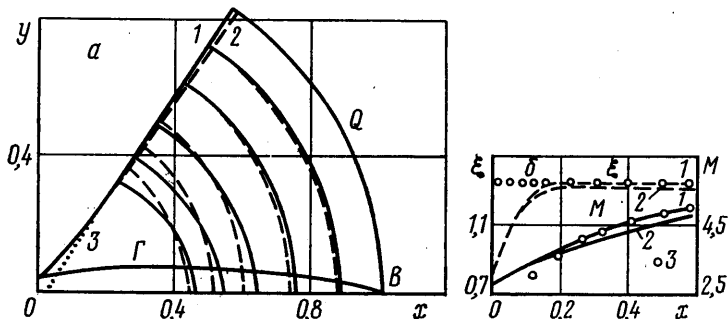
Ниже приведены некоторые результаты численного профилирования сопел и каналов по заданной  $\Gamma$ , являющейся характеристикой  $C^-$ , и граничным условиям на границе различной формы;  $\Gamma$  рассчитана предварительно прямым методом характеристик по программе для ЭВМ, разработанной в соответствии с [5]. В качестве объекта исследований выбирались плоские и осесимметричные сопла с угловой точкой и радиусом скругления трансзвуковой части  $R_2' = R_2/y_* = 18$  ( $y_*$  — высота или радиус критического сечения). Показатель адиабаты в расчетах принимался равным 1,4.

На фиг. 2 для частного случая плоского течения с равномерной начальной характеристикой  $C^-$  приведены результаты численных решений для смешанной задачи 3 (фиг. 2, а) и смешанной задачи 4 (фиг. 2, б), которые сравниваются с точным решением. В задаче 3 принято линейное распределение  $\theta_a = 0,1y_a$ , а в задаче 4 — параболическое  $p_a' = p_a/\rho_* a_*^2 = = y_a^2/4 + p^\circ$  ( $\rho_*, a_*$  — критические плотность и скорость звука). Параметры, снабженные кружком сверху, здесь и ниже соответствуют их значениям в точке В (фиг. 1). Профили сопел и поля течения в них, полученные сеточно-характеристическим методом, показаны на фиг. 2, а, б сплошными линиями. Тонкими сплошными линиями на этих фигурах изображены линии уровня чисел Маха  $M = \text{const}$  с шагом 0,1, которые совпадают с характеристиками  $C^-$ . Видно, что в соответствии с граничными условиями на  $Q$  в задаче 3 реализуется течение разрежения, а в задаче 4 — течение сжатия.

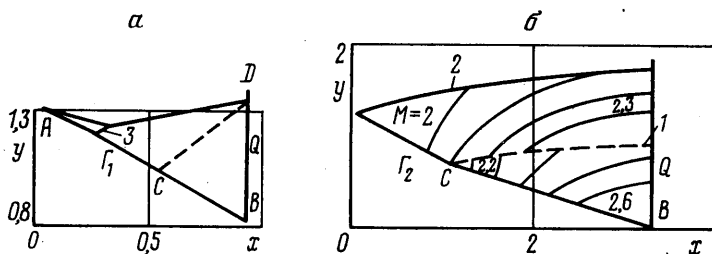
Анализ сравнения точного и численного решения показывает, что оба решения хорошо совпадают. Максимальная относительная ошибка численного решения в задаче 3 составляет 0,005%, а в задаче 4 — 0,06%. Кроме этого, в работе проведена проверка численных результатов, полученных сеточно-характеристическим методом по слоям  $\psi = \text{const}$  с результатами решения прямой задачи в спрофилированном канале методом характеристик по слоям  $x = \text{const}$ . Плоский канал профилировался на число  $M^\circ = 5$  при  $R_2' = 18$  с использованием смешанной задачи 4 при  $Q = Q(y)$  и постоянным профилем давления вдоль границы  $Q$ . Результаты сравнения



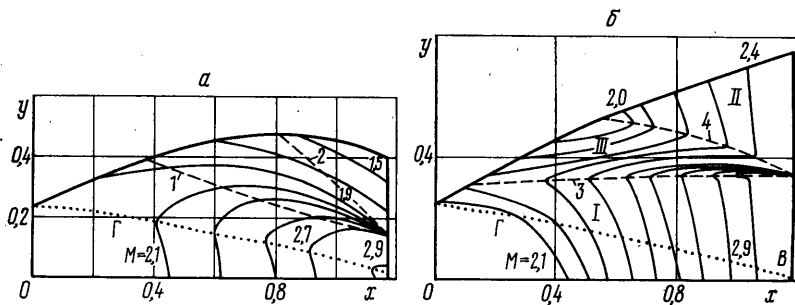
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

свидетельствуют о хорошем согласии указанных численных решений. Максимальные отличия в распределениях  $p$  и  $\xi = \operatorname{tg} \theta$  вдоль  $Q$ , полученных двумя модификациями метода характеристик, не превышают 0,02 и 0,5% соответственно.

На фиг. 3–5 приведены результаты расчетов по профилированию плоских и осесимметричных сопел и каналов, рассчитанных при различных формах границы  $Q$  и зависимостях  $p_q, \theta_q$  вдоль нее. Выбором формы границы  $Q$ , условий на ней и решением смешанных задач могут быть спрофилированы переходные участки сопел и каналов, реализующие преобразование одних классов течений в другие. Течения, близкие к течениям источника и стока, реализуются в сверхзвуковой части конических сопел.

Известен способ построения переходных каналов к точному течению от источника, основанный на решении задачи Гурса по заданной характеристике  $C^-$ , определяемой формой трансзвуковой области канала, и выходной характеристике  $C^+$  от источника [2]. Смешанные задачи 3 и 4 представляют другой способ профилирования таких каналов, обеспечивающих с хорошей точностью параметры течения от источника. При этом их длины получаются существенно короче.

Результаты расчетов для плоского течения приведены на фиг. 3. В качестве границы  $\Gamma$  выбрана  $C^-$ -характеристика, рассчитанная прямым методом характеристик для угловой точки на число  $M^\circ=5$ . Кривая  $Q$  задана в виде окружности с радиусом  $r=y_*q^-(M^\circ)$  ( $q(M)$  — безразмерная плотность потока), проходящей через точку  $B$ . Вдоль  $Q$  заданы распределение  $\theta=\theta(\varphi)$  по радиусу окружности (задача 3) ( $\varphi$  — полярный угол) и  $p=p^\circ=\text{const}$  (задача 4). Цифрами 1 и 2 на фиг. 3 обозначены профили каналов (фиг. 3, а) и распределения  $M(x)$ ,  $\xi(x)$  вдоль стенок (сплошные и штриховые линии на фиг. 3, б), полученные при решении задачи 4 и 3 соответственно, цифрой 3 на фиг. 3, а — контур сопла и цифрой 3 на фиг. 3, б — распределения  $M$  и  $\xi$  для течения от источника. Сплошные и штриховые линии на фиг. 3, а иллюстрируют поведение линий  $M=\text{const}$ , рассчитанных в задачах 4 и 3. Из сравнения с течением от источника следует, что граничное условие по  $p$  обеспечивает лучшее соответствие с течением от источника. Действительно, в выходной части сопла, начиная с  $x=0,3$ , различие в числах  $M$  на стенках сопла 1 и 3 не превышает 0,8%.

На фиг. 4 приведены результаты расчетов для случая, когда на  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  заданы разрывные параметры, соответственно ударная волна (фиг. 4, а) и контактный разрыв (фиг. 4, б). Характеристика  $\Gamma_1$  получена при расчете течения с ударными волнами, взаимодействующими с поверхностью гладкого конуса с углом полураствора, равным  $10^\circ$ . Точка  $B$  кривой  $\Gamma_1$  расположена в высокоэнтропийном слое на поверхности конуса. Это обуславливает большой градиент  $M(x)$  в окрестности точки  $B$ . В этом случае на  $\Gamma_1$  реализуется ударная волна с интенсивностью  $p_1/p_2=2$ , расположенная вне области влияния ВДС данных в выходном сечении. На  $Q$  задано  $\theta=10^\circ$ . Видно, что в месте пересечения ударной волны 3 с линией тока АД, выбираемой в качестве искомого контура, реализуется излом, угол которого определяется параметрами газа до ударной волны и ее интенсивностью. Следовательно, на стенке сопла реализуется гашение ударной волны, что обусловлено величиной излома, зависящего от угла наклона  $w$  к оси  $x$  за ударной волной. За изломом канал расширяется и поток разгоняется. Рассмотрим теперь задачу 3 для двухслойного течения. Прямая задача расчета двухслойных сверхзвуковых течений классическим методом характеристик решена в работе [7]. Применение сеточного-характеристического метода по слоям  $\psi=\text{const}$  [3] для профилирования сопел с двухслойными течениями является удобным, так как позволяет естественным образом проводить выделение контактных границ.

На фиг. 4, б приведены результаты профилирования сопел с заданным контактным разрывом на  $\Gamma_2$  для двухслойного осесимметричного течения без учета смещения и заданным условием  $\theta=0^\circ$  на  $Q$ . Начальное распределение чисел  $M$  вдоль оси симметрии получено прямым методом характеристик для сопла в радиусом  $R_2'=4$  при показателе адиабаты  $\kappa=1,3$ . Это распределение использовалось далее для определения  $\Gamma_2$  с помощью решения задачи Коши с данными на оси симметрии. В рассчитанном варианте принималось, что в ядре потока  $\kappa_1=1,3$ , а в периферийной части его  $\kappa_2=1,4$ . При этом расходы газа в этих слоях выбирались равными 22 и 78%. Полные давление и температура в обоих слоях принимались одинаковыми.

На фиг. 4, б линиями 1 и 2 изображены контактный разрыв и профиль стенки канала. Здесь приведены также линии уровня  $M=\text{const}$  в поле двухслойного течения с шагом 0,1. Наблюдается расширение потока в обо-

их слоях, однако в ядре потока его темп превышает соответствующий темп в периферийной области.

В приложениях газовой динамики необходимо уметь получать сверхзвуковые потоки с разрывными параметрами. Например, разрыв по  $\theta$  может быть использован для профилирования сопел экспериментальных газодинамических установок, моделирующих в некотором сечении два потока, встречающихся под заданным углом, а разрыв по  $p$  — для профилирования сопел газодинамических окон лазерных систем. Постановка смешанных краевых задач 3 и 4 позволяет профилировать такие сопла.

На фиг. 5 приведены результаты профилирования двух плоских каналов по заданной характеристике  $\Gamma$  и разрывным граничным условиям по  $\theta$  и по  $p$ . Характеристика  $\Gamma$  рассчитана методом характеристик в веере Прандтля — Майера на число  $M^\circ=3$ . В задаче 3 принят ступенчатый профиль  $\theta$ , для которого в центральной части  $\theta=0^\circ$ , а в периферийной  $\theta=-20^\circ$  (фиг. 5, а), а в задаче 4 давление  $p'=p/\rho_* a_*^2$  задано возрастающим в виде ступеньки от величины  $p_1'=0,0368$  до  $p_2'=0,0791$  (фиг. 5, б). На фиг. 5, а, б показаны профили сопел и линии уровня  $M=\text{const}$  с шагом 0,2 и 0,1 соответственно.

Анализ показывает, что разрыв граничных условий для обеих смешанных краевых задач приводит к разрыву и других газодинамических параметров и обеспечивается изоэнтропически с помощью характеристик сжатия, фокусирующихся в точке разрыва граничных условий. В задаче 3 граничные фокусирующие характеристики показаны штриховыми линиями 1 и 2 (фиг. 5, а). Числа  $M$  в точке разрыва для этих характеристик равны 1,8 и 2,7. В задаче 4 фокусирующие характеристики 3 и 4 в отличие от характеристик 1 и 2 являются разрывными. Вывод о фокусирующем механизме создания разрыва подтверждается численными результатами, полученными при решении соответствующих прямых задач внутри спрофилированных сопел. Расчеты свидетельствуют о том, что результаты решения задач хорошо согласуются между собой. Максимальное различие по числу  $M$  вдоль  $Q$  для задачи 3 достигается в окрестности разрыва  $\theta$  и не превосходит 2%. Поведение линий уровня  $M=\text{const}$  показывает, что при решении задачи 3 реализуется течение разрежения в центральной части, ограниченной характеристикой 1, и течение сжатия в периферийной части. В отличие от задачи 3 разрыв давления на  $Q$  приводит к иному характеру течения в смешанной области. Из фиг. 5, б видно, что поток разделяется на три области I, II, III. В областях I и III реализуется течение разрежения, а в области II — течение сжатия.

Авторы благодарят У. Г. Пирумова, М. Я. Иванова, А. Н. Крайко за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963, ч. 1. 583 с.; ч. 2. 727 с.
2. Пирумов У. Г., Росляков Г. С. Течения газа в соплах. М.: Изд-во МГУ, 1978. 351 с.
3. Киреев В. И., Разностные методы решения обратной задачи профилирования сверхзвуковых сопел. М., 1980. 21 с. ВИНТИ, деп. рук. 1980, № 3302.
4. Киреев В. И. О моделировании газовых струй, истекающих из реальных сопел Лаваля. — Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 2, с. 143–153.
5. Киреев В. И., Пирумов У. Г. О профилировании сопел модельных систем. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 2, с. 187–189.
6. Крайко А. Н., Шеломовский В. В. О профилировании плоских и осесимметричных сопел и каналов, реализующих заданный сверхзвуковой поток в сечении выхода. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 4, с. 94–102.
7. Пирумов У. Г. Исследование двухслойных течений газа в сверхзвуковых осесимметричных соплах. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 4, с. 76–81.

Москва

Поступила в редакцию  
16.II.1982