

УДК 533.6.014

ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВИЖУЩЕГОСЯ
СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ КЛИНА
С ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА ДВУХ ГАЗОВ

ТУГАЗАКОВ Р. Я.

Построен класс точных решений задачи о столкновении движущегося со сверхзвуковой скоростью клина с границей раздела двух газов. Показано, что для реализации этих решений головная ударная волна должна быть перпендикулярна границе раздела газов. Проведен численный анализ точного решения в зависимости от интенсивности головного скачка и отношения теплоемкостей набегающего газа.

1. Проблема взаимодействия разрывов газодинамических параметров с движущимися телами изучалась в линейной постановке, например в работах [1, 2]. В общем случае задача достаточно сложна и может быть решена лишь численно [3, 4]. В редких случаях можно найти связи между параметрами задачи, когда удается выписать точные ее решения. Так, в работах [5, 6] были получены точные решения, описывающие обтекание движущегося клина при падении на него ударной волны.

Покажем, что при взаимодействии поверхности контактного разрыва с клином, движущимся со сверхзвуковой скоростью, существуют соотношения между исходными параметрами задачи, которые позволяют легко рассчитать рефракционную картину течения. Рассмотрим клин с углом полураствора θ (фиг. 1), движущийся в невозмущенном газе со сверхзвуковой скоростью q_0 . Величина давления, плотности и показателя адиабаты в этой области соответственно равны $P_0=1$, $\rho_0=1$, γ_0 . Пусть на клин под некоторым углом β к оси движения набегают поверхность контактного разрыва CE , где CD — часть поверхности контактного разрыва, еще не испытавшей взаимодействия, DE — новая поверхность контактного разрыва, AB — головной скачок, φ — угол скачка. Анализируя картину течения в верхней поверхности клина, будем искать такой режим обтекания, чтобы при взаимодействии головной скачок и поверхность контактного разрыва не преломлялись. При этом отраженная от поверхности контактного разрыва ударная волна в области 2 должна отсутствовать. Возможность реализации взаимодействия ударной волны с поверхностью контактного разрыва без отраженной ударной волны отмечена в [7]. Тогда в результате взаимодействия получается простая картина течения без серии новых отраженных ударных волн и контактных разрывов, которая легко рассчитывается.

Найдем связи, которые необходимо наложить на параметры течения в областях 0 и 1, чтобы реализовалась картина течения, изображенная на фиг. 1.

Во-первых, из условия отсутствия новых ударных волн в области взаимодействия следует, что интенсивности первоначального головного скачка DB и нового скачка AD равны между собой:

$$P_2/P_1 = P_3/P_0, \quad P_0 = P_1 \quad (1.1)$$

Во-вторых, на поверхности контактного разрыва нормальная составляющая скорости не претерпевает разрыва. Тогда для областей 0, 1, 2, 3 имеем два условия, связывающие между собой полные скорости q_0, q_1, q_2, q_3 и углы $\varphi, \beta, \varphi_1$:

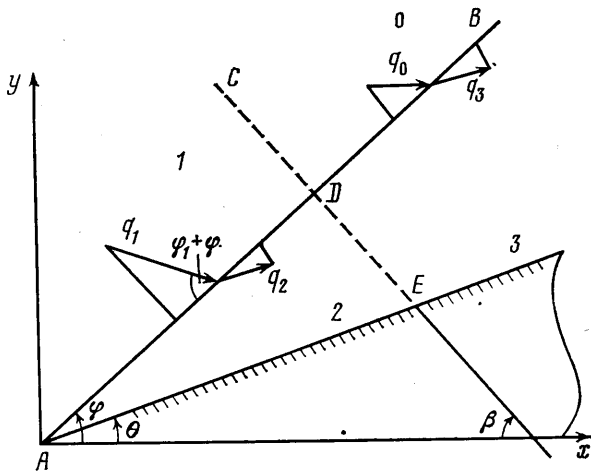
$$q_2 = q_3, \quad q_1 \sin(\beta - \varphi_1) = q_0 \sin \beta \quad (1.2)$$

$$\varphi_1 = \arctg v_1/u_1$$

Здесь φ_1 — угол нового набегающего потока в области 1.

Условие (1.2) равносильно условию, что в областях 2 и 3 направления векторов скоростей совпадают, т. е.

$$q_{3n}/q_{0\tau} = q_{2n}/q_{1\tau} \quad (1.3)$$



Фиг. 1.

где q_n и q_τ — соответственно нормальная и тангенциальная составляющие скоростей относительно ударной волны.

В-третьих, головной скачок AD не преломляется в результате взаимодействия. Тогда для двух потоков газа, обтекающих клин с углом полураствора θ , угол скачка равен φ и определяется из соотношений

$$1 - \mu_1 = M_1^2 \sin^2(\varphi + \varphi_1) \left[\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \theta)}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_1)} - \mu_1 \right] \quad (1.4)$$

$$1 - \mu_0 = M_0^2 \sin^2 \varphi \left[\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \theta)}{\operatorname{tg} \varphi} - \mu_0 \right] \quad (1.5)$$

$$\mu_0 = \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1}, \quad \mu_1 = \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1}$$

Таким образом, для определения пяти неизвестных величин $\rho_1, \varphi_1, \beta, q_1, \gamma_1$ имеем четыре условия (1.1)–(1.4). Пусть γ_1 будет параметром задачи. Тогда, используя соотношения (1.1)–(1.4), выразим остальные неизвестные величины в области 1 через этот параметр γ_1 и параметры газа в области 0. Из соотношений (1.2) легко получить для компонент скоростей два равенства

$$u_0/u_1 = 1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi_1, \quad u_0/u_1 = 1 - \operatorname{ctg} \beta \operatorname{tg} \varphi_1 \quad (1.6)$$

Откуда следует, что $\beta = \pi/2 - \varphi$, т. е. поверхность контактного разрыва должна быть перпендикулярной к поверхности головного скачка.

Величина φ_1 определяется из соотношения (1.3)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{\operatorname{tg} \varphi (\eta_2 - \eta_3)}{(\eta_3 + \eta_2 \operatorname{tg}^2 \varphi)} \\ \eta_2 &= \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\xi + \mu_1}{\xi \mu_1 + 1}, \quad \eta_3 = \frac{\rho_3}{\rho_0} = \frac{\xi + \mu_0}{\xi \mu_0 + 1} \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $\xi = P_3/P_0$ — интенсивность головного скачка.

Тогда компоненты скорости и величина плотности в области *I* соответственно равны

$$u_1 = u_0 \cos^2 \varphi \left(1 + \frac{\eta_2}{\eta_3} \operatorname{tg}^2 \varphi \right), \quad v_1 = -u_0 \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{\eta_2}{\eta_3} - 1 \right) \quad (1.8)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{(1 - \mu_0) (\xi + \mu_0) (\xi \mu_1 + 1)^2}{(1 - \mu_1) (\xi + \mu_1) (\xi \mu_0 + 1)^2} \quad (1.9)$$

Причем величина интенсивности головного скачка ξ и угол скачка φ определяются из соотношений для косоугольного скачка и условия (1.5) при заданных начальных параметрах $\gamma_0, \theta, u_0, P_0, \rho_0$.

Таким образом, если в какой-то момент времени клин, движущийся со сверхзвуковой скоростью в одном газе, начинает проникать в другой газ, то реализуется простая картина взаимодействия, изображенная на фиг. 1, если газодинамические параметры нового газа удовлетворяют соотношениям (1.6) — (1.9). При этом граница раздела двух газов должна быть перпендикулярна к поверхности головного скачка. Величины скоростей в областях *2* и *3* не претерпевают разрыва. Показатель адиабаты нового газа γ_1 считается заданным.

2. Рассмотрим возможность реализации данного решения с позиции общей теории рефракции ударных волн в газах. Этот вопрос возникает в связи с тем, что в задаче падающая ударная волна перпендикулярна к поверхности контактного разрыва. Существующая же теория регулярной рефракции ударной волны дает решения обычно для случаев лобового или наклонного столкновения ударной волны с контактной поверхностью. Причем когда на поверхности раздела двух газов не реализуется отраженная волна, возможно вычислить величину угла падения, который в отличие от данного случая меньше 90° .

Пусть ударная волна *AD* падает на поверхность раздела двух газов *DC* (фиг. 2). В результате взаимодействия образуются прошедшая волна *BD*, отраженная волна *DF* (ударная или разрежения) и преломленная контактная поверхность *DE*. Угол падения равен ω , угол между скачками *AD* и *DB* равен φ [7]. Для описания физического состояния в двух областях *0* и *1*, разделенных контактной поверхностью *DC*, используются параметры: отношения теплоемкостей γ_0, γ_1 , плотности ρ_0, ρ_1 , скорости q_0, q_1 и давления P_0, P_1 , т. е. в отличие от [7] здесь скорости терпят разрыв.

Сформулируем математическую задачу в системе координат, движущейся с точкой *D*. Пусть интенсивность падающего скачка *AD* равна ξ . Отраженный скачок *FD* в данной задаче отсутствует. Тогда на контактной поверхности *DE* имеем два условия: $P_2 = P_3$ и $\omega'' = \omega'$. Из этих равенств для $z = \sin^2 \omega$ получаем квадратное уравнение

$$z^2 [(\eta_2/\eta_3)^2 - 1] b_0 M_0^2 + z [b_0 M_0^2 - d - (\eta_2/\eta_3)^2 (b_1 M_1^2 - d)] + d = 0 \quad (2.1)$$

$$b_0 = 1 + \mu_0, \quad b_1 = 1 + \mu_1, \quad d = \mu_1 - \mu_0 \quad (2.2)$$

$$M_0 = \frac{u_0}{a_0}, \quad M_1 = \frac{u_1}{a_1}, \quad a_0 = \frac{\gamma_0 P_0}{\rho_0}, \quad a_1 = \frac{\gamma_1 P_1}{\rho_1}$$

Из уравнения (2.1), (2.2) следует, что случай, когда угол падения $\omega = 90^\circ$, реализуется, если выполняется условие $b_1 M_1^2 = b_0 M_0^2 + d$. Для дан-

ной задачи это равносильно условию равенства давлений в областях 2 и 3.

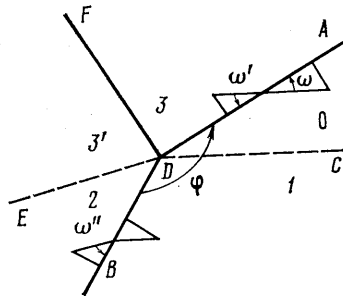
Кроме того, чтобы решение общей задачи рефракции было физически осуществимым, нужно, чтобы при акустическом предельном переходе ($\xi \rightarrow 1$) оно приводило к закону преломления Снелла

$$\frac{\sin \omega}{\sin(\varphi - \omega)} = \frac{a_0}{a_1} \quad (2.3)$$

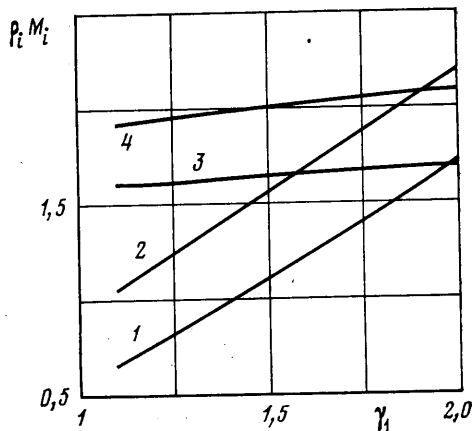
В рассматриваемом случае $\varphi = 2\pi$ и, следовательно, скорости звука в двух средах при $\xi = 1$ должны быть равны. Используя формулу (1.9), получим для скорости звука связь в виде соотношения

$$\frac{a_0^2}{a_1^2} = \frac{(1 + \mu_0)(\xi + \mu_1)(\eta_3)^2}{(1 + \mu_1)(\xi + \mu_0)(\eta_2)^2}$$

которое при $\xi \rightarrow 1$ действительно удовлетворяет условию (2.3).



Фиг. 2



Фиг. 3

Таким образом, найденное решение (1.6)–(1.9) удовлетворяет общему уравнению, описывающему рефракцию ударных волн на границе двух газов, являясь в то же время физически осуществимым. Здесь следует отметить, что в формулах (1.6)–(1.9) компонента v_1 выбрана отрицательной. В противном случае в формулах для угла φ_1 и компоненты скорости v_1 необходимо изменить знак на противоположный.

3. Результаты численных расчетов задачи, полученные по формулам (1.6)–(1.9), приведены на фиг. 3 и ниже:

M_0	1,45	1,5	1,6	1,7	1,8	2	3	4	6
ρ_1	0,662	0,669	0,672	0,670	0,667	0,663	0,616	0,56	0,48
ρ_2	1,076	1,058	1,051	1,055	1,062	1,072	1,187	1,30	1,45
ρ_3	1,460	1,431	1,419	1,425	1,437	1,455	1,663	1,87	2,37
P_2	1,711	1,663	1,640	1,652	1,674	1,701	2,071	2,48	3,65

Выше представлено изменение параметров задачи в зависимости от числа M_0 набегающего потока в 0 области. За начальные параметры взяты следующие: $\theta = 10^\circ$, $\gamma_0 = 1,4$; $\gamma_1 = 1,1$. Видно, что когда число M_0 находится в диапазоне $1,45 < M_0 < 2$, имеется некоторая немонотонность в поведении всех функций, т. е. при $M_0 = 1,6$ функции ρ_2 , ρ_3 , P_2 принимают минимальные значения, а ρ_1 — максимальное. Такое поведение функций объясняется тем, что с уменьшением числа M_0 решение задачи ищется в области предельного значения числа Маха для данного клина. С ростом числа M_0 (увеличением интенсивности головного скачка) величина ρ_1 падает, а ρ_2 , ρ_3 , P_2 монотонно растут.

Поведение функций ρ_1 , ρ_2 , M_2 , M_1 в зависимости от изменения величины γ_1 приведено на фиг. 3. За начальные параметры взято: $\theta=10^\circ$, $M_0=2$, $\gamma_0=1,4$. При этих начальных данных имеем $\xi=1,707$, $\varphi=39,31^\circ$, $\rho_3=1,458$. Из фиг. 3 видно, что при увеличении параметра γ_1 до величины γ_0 все функции стремятся к начальным значениям задачи, т. е. $\rho_1 \rightarrow 1$, $\rho_2 \rightarrow \rho_3$, $M_2 \rightarrow M_3$, $M_1 \rightarrow M_0$. Контактная поверхность вырождается. При дальнейшем увеличении γ_1 вышеперечисленные функции монотонно возрастают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тер-Миносянц С. М. Задача о сверхзвуковом обтекании нижней поверхности треугольного крыла.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 6, с. 147–152.
2. Arora N. L. An integral-transform method for shock-shock interaction studies.— J. Fluid Mech., 1968, v. 34, № 2, p. 209–228.
3. Тугазаков Р. Я. Дифракция ударной волны на движущемся клине.— Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 1, с. 80–84.
4. Тугазаков Р. Я. Численное решение задачи о проникании движущегося со сверхзвуковой скоростью тела в газ другой плотности.— Уч. зап. ЦАГИ, 1980, т. 11, № 4, с. 139–144.
5. Голубинский А. И. Набегание ударной волны на клин, движущийся со сверхзвуковой скоростью.— ПММ, 1964, т. 28, в. 4, с. 778–779.
6. Арутюнян Г. М. О набегании ударной волны на клин, движущийся со сверхзвуковой скоростью.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 4, с. 166.
7. Polachek H., Seeger R. J. On shock-wave phenomena: Interaction of shock waves in gases.— Proc. Symposia Appl. Math., v. 1. New York: Amer. Math. Soc., 1949, p. 119–144.

Москва

Поступила в редакцию
23.VII.1981