МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1983

УДК 532.591

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ ЗАТУХАНИЯ СЛАБЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ И УДАРНЫХ ВОЛН В ЗАПЫЛЕННОМ ГАЗЕ

КУЛИКОВСКИЙ В. А.

Аналитические исследования процессов затухания возмущений в запыленном газе ограничивались автомодельными течениями [1, 2] и течениями с плоской симметрией, причем в последнем случае предполагалось, что температурное и скоростное равновесие фаз наступает мгновенно [3–6], т. е. время релаксации среды мало. В настоящей работе получены асимптотические законы затухания плоских, цилиндрических и сферических ударных и непрерывных волн, амплитуда и ширина которых позволяют пренебречь ускорением частиц и изменением их температуры. Предполагалось, что между фазами происходит обмен теплом, пропорциональный разности температур, и обмен импульсом за счет силы трения, пропорциональный разности скоростей фаз.

Получившиеся законы затухания плоских волн оказались вполне аналогичными законам затухания магнитогидродинамических волн в среде с конечной проводимостью, когда наличие джоулевой диссипации и дополнительной пондеромоторной силы в бегущей волне или в потоке газа за ударной волной приводит к экспоненциальному затуханию амплитуды волны [7–9].

Рассмотрим одномерные движения смеси идеального газа и твердых или жидких частиц, объемная концентрация которых мала. Предположим, что отсутствуют внешние силовые поля, внешние притоки тепла, химические реакции и фазовые переходы. Будем считать что при малых отклонениях от состояния равновесия сила межфазного взаимодействия, отнесенная к единице объема f, и приток тепла от газа к единице объема дисперсной фазы в единицу времени q линейно зависят от разности скоростей фаз и от разности температур фаз соответственно:

$$f=k(v-v_d),\quad q=\sigma(T-T_d) \tag{1}$$

где k и σ — постоянные величины. Индексом d здесь и в дальнейшем будут обозначаться параметры дисперсной фазы.

Рассмотрим распространения слабого возмущения в равновесной однородной смеси. Обозначая невозмущенные значения параметров индексом ноль, примем:

$$\frac{l}{a_0}\frac{k}{\rho_d^\circ}\ll 1,\quad \frac{l}{a_0}\frac{\sigma}{\rho_d^\circ}c_{p0}\left(\frac{de_d}{dT_d}\right)_0^{-1}\ll 1 \tag{2}$$

Здесь a — скорость звука в газе; l — характерная ширина волны; ρ_d° — истинная плотность частиц; $e_d=e_d(T_d)$ — удельная внутренняя энергия частиц; c_p — теплоемкость газа при постоянном давлении. Выполнение неравенств (2) обеспечивает $|v_d|\ll|\langle v\rangle|$ и $|T_d-T_0|\ll|\langle T-T_0\rangle|$, где средние значения берутся по времени прохождения частиц сквозь волну.

Полагая $v_d\equiv 0$ и $T_d\equiv T_0$ в системе уравнений газовзвеси [10, 11], получим систему для параметров газовой фазы

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(v+a)\frac{\partial}{\partial r}\right]\left(v+\int\frac{dp}{\rho^\circ a}\right)=-\frac{k\varepsilon v}{\rho}-\frac{\nu a v}{r}-\frac{\beta\varepsilon a^2}{c_p\rho}[\sigma(T-T_0)+kv^2] \tag{3}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(v-a)\frac{\partial}{\partial r}\right]\left(v-\int\frac{dp}{\rho^\circ a}\right)=-\frac{k\varepsilon v}{\rho}+\frac{\nu a v}{r}+\frac{\beta\varepsilon a^2}{c_p\rho}[\sigma(T-T_0)+kv^2]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial r}\right)\int Tds=-\frac{\varepsilon}{\rho}[\sigma(T-T_0)+kv^2]$$

Здесь $\nu=0, 1, 2$ для движений с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами; r — расстояние от плоскости, оси или центра симметрии соответственно; ρ° — истинная плотность газа; ρ — приведенная плотность газа; ε — объемная концентрация дисперсной фазы; $\beta=-(\partial\rho^\circ/\partial T)_p$ — коэффициент объемного расширения газа (предполагается, что $\beta>0$). Интегралы в левых частях уравнений (3) понимаются как неопределенные интегралы вдоль соответствующих характеристик.

Будем считать возмущения параметров газа малыми: $|v|\ll a_0$, $|p-p_0|\ll \ll p_0$, и т. д. Введем обозначения:

$$J=v+\frac{p-p_0}{\rho_0{}^\circ a_0},\quad L=v-\frac{p-p_0}{\rho_0{}^\circ a_0},\quad S=\frac{T_0}{a_0}(s-s_0) \tag{4}$$

При малой объемной концентрации частиц ε величины J и L мало отличаются от инвариантов Римана. Для скорости звука $a(p, s)$ будем считать справедливым в первом приближении

$$a=a_0+\varkappa_1(J-L)+\varkappa_2 S,\quad \varkappa_1=\frac{\rho_0{}^\circ a_0}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial p}\right)_0,\quad \varkappa_2=\frac{a_0}{T_0}\left(\frac{\partial a}{\partial s}\right)_0 \tag{5}$$

В случае совершенного газа $2\varkappa_2=\varkappa_1=(\gamma-1)/4$, γ — показатель адиабаты. Для произвольного идеального газа в первом приближении верно:

$$T-T_0=\frac{a_0}{c_{p0}}\left[S+\frac{\beta_0 T_0}{2}(J-L)\right] \tag{6}$$

Подставляя (4)—(6) в (3) и пренебрегая членами второго порядка малости, получим систему для J, L и S. Выполнение неравенств:

$$\left|\frac{l}{4a_0}\left[\frac{\varepsilon_0}{\rho_0}\left(\frac{\sigma a_0{}^2\beta_0{}^2 T_0}{c_{p0}{}^2}-k\right)+\frac{\nu a_0}{r_1}\right]\right|\ll 1,\quad r_1=\langle J\rangle\langle J/r\rangle^{-1}$$
$$\frac{l\varepsilon_0\sigma}{a_0 c_{p0}\rho_0}\ll 1 \tag{7}$$

где средние значения берутся вдоль отрезков соответствующих характеристик, по которым производится интегрирование, дает возможность пренебречь влиянием волн S и L на волну J.

Перепишем неравенства (2) и (7) при $\nu=0$ для смеси совершенного газа с показателем адиабаты γ и сферических частиц диаметром d. Будем предполагать, что f является стоксовой силой трения ($k=18\mu_0/d^2$, μ_0 — вязкость газа в невозмущенной зоне перед волной), число Нуссельта равно 2 ($\sigma=12\lambda_0/d^2$, λ_0 — теплопроводность газа в невозмущенной зоне перед волной), а число Прандтля равно 3/4:

$$\frac{9}{4}\varepsilon_0\left|\frac{3-\gamma}{\mathrm{Re\,St}}\right|\ll 1,\quad \frac{9\delta_0 c_{p0}}{\mathrm{Re\,St}}\left(\frac{de_d}{dT_d}\right)_0^{-1}\ll 1,\quad \frac{9\varepsilon_0}{\mathrm{Re\,St}}\ll 1,\quad \frac{18\delta_0}{\mathrm{Re\,St}}\ll 1,$$
$$\delta_0=\frac{\rho_0{}^\circ}{\rho_d{}^\circ},\quad \mathrm{Re}=\frac{\langle v\rangle\rho_0{}^\circ d}{\mu_0},\quad \mathrm{St}=\frac{a_0 d}{l\langle v\rangle} \tag{8}$$

Согласно (8), максимальная длина волны прямо пропорциональна d^2 и обратно пропорциональна ε_0 и δ_0. Например, если в качестве совершенного газа взять воздух, а в качестве частиц — сферические капли воды, то при $T=20°$ С, $\varepsilon_0 \leqslant 2\delta_0$, $d=1$ мм и $l \leqslant 37$ м правые части неравенств (8) превосходят левые не менее чем на порядок.

Введем для удобства безразмерную координату $\alpha r/a_0$, амплитуду возмущений $(\varkappa_1+0{,}5)J/a_0$ и время αt. Здесь

$$\alpha=\frac{\varepsilon_0}{2\rho_0}\left(k+\frac{\sigma\beta_0{}^2 a_0{}^2 T_0}{c_{p0}{}^2}\right)$$

Сохраняя за безразмерными величинами обозначения соответствующих размерных величин и учитывая не выписанные члены второго порядка малости, получим:

$$\frac{dJ}{dt}=-J-\frac{\nu}{2r}J+O\left[J^2\left(1+\frac{\nu}{r}\right)\right]$$
$$\frac{dr}{dt}=1+J+O(J^2) \tag{9}$$

Для системы (9) будем решать задачу Коши, задавая форму профиля в некоторый момент времени, принимаемый за начальный. Координату в начальный момент времени будем обозначать r_0, чтобы отличить от текущей координаты r.

Пусть при $t=0$ возмущение описывается достаточно гладкой функцией $J_0(r_0)$, равной нулю вне интервала (r_{01}, r_{02}). Если в правых частях системы (9) отбросить члены второго порядка малости, будем иметь первый интеграл:

$$J \exp J=\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\nu/2} J_0 \exp(J_0+r_0-r)$$

Откуда, используя формулу обращения Лагранжа, получим

$$J(r, r_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^{n-1}}{n!}\left\{J_0(r_0)\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\nu/2}\exp[J_0(r_0)+r_0-r]\right\}^n=$$

$$=J_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\nu/2}\exp(J_0+r_0-r)\left\{1+O\left[J_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\nu/2}\exp(J_0+r_0-r)\right]\right\} \tag{10}$$

$$r\geqslant r_0, \quad |A|<1, \quad A\equiv J_0 \exp(J_0+1), \quad 0<r_{01}\leqslant r_0\leqslant r_{02}$$

Радиус сходимости ряда в (10) равен e^{-1}. Требования, выражаемые первыми двумя неравенствами, обеспечивают абсолютную и равномерную сходимость ряда в (10) по совокупности переменных r и r_0 для всех $r_0 \in [r_{01}, r_{02}]$ и $r\geqslant r_0$. Сходящийся ряд в (10) можно заменить асимптотической формулой (10). Подставляя ее в уравнение характеристик (9) и интегрируя, получим

$$r-r_0-B_\nu\int_{r_0}^{r} e^{-x}\frac{dx}{x^{\nu/2}}+O\left(B_\nu{}^2\int_{r_0}^{r} e^{-x}\frac{dx}{x^{\nu}}\right)=t$$

$$B_\nu(r_0)=J_0 r_0^{\nu/2}\exp(J_0+r_0), \quad r\geqslant r_0, \quad |A|<1, \quad 0<r_{01}\leqslant r_0\leqslant r_{02} \tag{11}$$

Неодинаковость скоростей точек профиля приводит к изменению его формы, причем, согласно (11), профиль имеет тенденцию к опрокидыванию. Выясним, при каких обстоятельствах имеет место опрокидывание профиля, означающее образование ударной волны. В момент образования разрыва наклон профиля становится вертикальным и частная производная $(\partial r/\partial r_0)_t$ должна обратиться в ноль. Находя $(\partial r/\partial r_0)_t$ из равенства (11), нетрудно показать, что для опрокидывания ударной волны необходимо, чтобы в начальный момент времени профиль возмущения содержал участок значительного убывания. В каждом из трех рассматриваемых случаев ($\nu=0, 1, 2$) в нулевом приближении по $J_0(r_0)$ для опрокидывания требуется, чтобы при некотором $r_0 \in [r_{01}, r_{02}]$ выполнялось соответствующее неравенство:

$$r_0^{\nu/2} \exp(-r_0) \frac{dJ_0}{dr_0} < -\int\limits_{r_0}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x^{\nu/2}} \equiv K_\nu$$

$$K_0 = -\exp(-r_0), \quad K_1 = -\mathrm{Erfc}\,\sqrt{r_0}, \quad K_2 = \mathrm{Ei}\,(-r_0)$$

Таким образом, в запыленном газе, в отличие от «чистого» газа, амплитуды слабых непрерывных волн затухают по законам, содержащим экспоненциальный множитель. Вторым существенным отличием является то, что не всякая непрерывная волна порождает ударную волну. Очевидно, по тем же причинам полученные результаты отличаются от результатов другого приближения, отвечающего бесконечно малому времени релаксации среды [3—7, 12]; в этом случае газовзвесь ведет себя как идеальный газ, показатель адиабаты которого определяется теплоемкостями газовой и дисперсной фаз.

Рассмотрим распространение слабой ударной волны по равновесной однородной смеси. Пусть частицы много тяжелее газа: $\delta_0 = \rho_0^\circ/\rho_d^\circ \ll 1$, так что за ударной волной $v_d \ll v$. Поскольку объемная концентрация дисперсной фазы мала: $\varepsilon_0 \ll 1$, будем пренебрегать влиянием частиц на газовую фазу в ударной волне, считая, что для параметров газа справедливы обычные газодинамические соотношения на разрыве. Отметим, что под ударной волной следует понимать слой, вне которого движение смеси можно описывать одномерными уравнениями.

В «чистом» газе движение за слабой ударной волной описывается с помощью одного инварианта Римана с точностью до величин порядка квадрата амплитуды скачка инварианта включительно. Поскольку величины J, L и S, введенные в (4), мало отличаются от инвариантов Римана, а соотношения на скачке можно приближенно считать газодинамическими, то течение смеси, примыкающее к разрыву, также описывается одной функцией J. Пользуясь этим, получим из (9) скорость ударной волны, отнесенную к невозмущенной скорости звука

$$D = 1 + \frac{1}{2}(J^- + J^+) = 1 + \frac{1}{2} J^-$$

где J^- — предельное значение безразмерной амплитуды волны на заднем фронте разрыва, а J^+ — на переднем.

Траектория ударной волны в различные моменты времени будет пересекать различные характеристики волны J, характеризующиеся набором начальных точек r_0. Совокупность точек r_0 можно рассматривать как систему координат, связанную с характеристиками. Если для каждого расстояния r указать начальную точку характеристики r_0, пересекающей на этом расстоянии траекторию ударной волны, получим закон $r_0(r)$ движения ударной волны в системе координат, связанной с характеристиками. Подставив вместо r_0 закон $r_0(r)$ в известную зависимость $J(r, r_0)$, получим текущую амплитуду разрыва $[J]_\nu$. Закон $r_0(r)$ можно получить из уравнения

$$\frac{\partial t}{\partial r_0} dr_0 + \left(\frac{\partial t}{\partial r} - \frac{1}{D} \right) dr = 0 \qquad (12)$$

Частные производные функции $t(r, r_0)$ определяются дифференцированием равенств (11).

Пусть в начальный момент профиль возмущения, примыкающего к разрыву, описывается гладкой функцией $J_0(r_0)$ положительной при $r_{01} < r_0 \leqslant r_{02}$, равной нулю в точке r_{01} и отрицательной при $r_0<r_{01}$. Подставляя в (12) выражения для $\partial t/\partial r_0$, $\partial t/\partial r$ и D и умножая (12) на B_ν, получим уравнение в полных дифференциалах. Интегрирование его дает

$$\int\limits_{r_0}^{r} e^{-x}\left\{1+O\left[B_\nu(r_0)\frac{e^{-x}}{x^{\nu/2}}\right]\right\}\frac{dx}{x^{\nu/2}}=\frac{2}{B_\nu^2}\int\limits_{r_0}^{r_{02}} B_\nu(x)\left\{1-\frac{J_0(x)}{2}+O[J_0^2(x)]\right\}dx \tag{13}$$

$$r\geqslant r_{02},\quad |A|<1,\quad 0<r_0\leqslant r_{02}$$

При $r_0\to r_{01}+0$ правая часть (13) возрастает до бесконечности, в то время как левая ограничена при $r\to\infty$. Следовательно, $r_0(r)\to r_0^{(\nu)}>r_{01}$. Геометрически это означает, что траектории плоской, цилиндрической и сферической ударных волн имеют своими асимптотами характеристики, начинающиеся в точках $r_0^{(\nu)}$, $\nu=0, 1, 2$. Тем самым всегда имеется пучок характеристик, уходящий из возмущенной области, с которым траектория ударной волны не пересекается. Главный член асимптотики амплитуды разрыва при $r\to\infty$ совпадает с главным членом асимптотики функции $J(r, r_0^{(\nu)})$ при $r\to\infty$. Значения $r_0^{(\nu)}$ можно определить из (13) по начальной форме профиля $J_0(r_0)$.

Пусть $J_0(r_0)$ имеет треугольный профиль: $J_0=j(r_0-r_{01})/l_0$, $l_0=r_{02}-r_{01}$, $j=J_0(r_{02})$. Найдя из (13) значения $r_0^{(\nu)}$, выпишем главные члены асимптотических законов для амплитуд ударных волн, замечая что при $\nu>0$, согласно (7), должно быть выполнено $l_0\ll r_{01}$.

$$[J]_\nu=J_0(r_0^{(\nu)})\left(\frac{r_0^{(\nu)}}{r}\right)^{\nu/2}\exp(r_0^{(\nu)}-r),$$

$$r_0^{(\nu)}=r_{01}+l_0\sqrt{\frac{l_0}{l_0+jC_\nu}}\left[1+O\left(l_0+j+\frac{\nu l_0}{r_{01}}\right)\right]$$

$$C_\nu=r_{01}^{\nu/2}\exp(r_{01})\int\limits_{r_{01}}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x^{\nu/2}}$$

$$l_0<1,\quad j\exp(j+1)<1,\quad \frac{\nu l_0}{r_{01}}<1$$

Так как $r_0^{(\nu)}>r_{01}$, то длина волны, имеющей разрыв, ограничена при $r\to\infty$ и неравенства (2) и (7), в которые входит характерная длина волны l, имеют смысл. При рассмотрении асимптотик амплитуд ударных волн в неравенствах (2) и (7) в качестве l следует брать максимальное расстояние между ударной волной и точкой профиля, к которой она стремится, l_ν^*. Если в начальный момент времени скорость ударной волны не превосходит скорости профиля, к которой она стремится, то l_ν^* определяется расстоянием между ударной волной и этой точкой в начальный момент времени. В противном случае расстояние от разрыва до его предельной точки на профиле будет в течение некоторого времени увеличиваться.

Произведя замену в (13) переменной интегрирования $y=\alpha x/a_0$ и перейдя к пределу при $\alpha\to 0$, получим размерные асимптотические формулы для ударных волн в «чистом» газе при произвольной форме начального профиля (в случае $\nu=0$ члены с символом O следует отбросить), из которых, в частности, следует, что асимптотики ударных волн, полученные для треугольных профилей [13], верны в главных членах и для профилей с особенностью в точке r_{01}.

Автор благодарен за ценные обсуждения В. А. Левину, руководившему работой, и А. Г. Куликовскому, указавшему автору на возможность сведения задачи к характеристической.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ткаленко Р. А.* Об автомодельных движениях двухфазных сред.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 3, с. 78–88.
2. *Жолобов В. В., Жолобова Л. Г.* Простые волны уравнений одномерного движения газопылевой смеси.– ПМТФ, 1978, № 3, с. 54–61.
3. *Сидоркина С. И.* О некоторых движениях аэрозоля.– Докл. АН СССР, 1957, т. 112, № 3, с. 398–399.
4. *Davidson G. A.* Burger's equation approach to finite amplitude acoustics in aerosol media.– J. Sound and Vibr., 1975, v. 38, № 4, p. 75–495.
5. *Davidson G. A.* Burger's equation for finite amplitude acoustics in fogs.– J. Sound and Vibr., 1976, v. 45, № 4, p. 473–485.
6. *Тараканов С. В.* Исследование нестационарных процессов формирования и деформации ударных волн в аэровзвесях: Дис. на соискание уч. ст. канд. наук. Л.: ЛГУ, 1979.
7. *Луговцов А. А.* Распространение слабых ударных волн в магнитном поле.– ПМТФ, 1966, № 4, с. 91–93.
8. *Коробейников В. П.* Затухание слабых магнитогидродинамических ударных волн.– Магнитная гидродинамика, 1967, № 2, с. 25–30.
9. *Levin W. A.* Asymptotic shok wave propogation in electromagnetic field.– Arch. mech. stosow., 1977, v. 27, № 3, p. 497–501.
10. *Крайко А. Н., Стернин Л. Е.* К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами.– ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, с. 418–430.
11. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
12. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике сплошных сред. М.: Наука, 1967. 428 с.
13. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957. 796 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.XII.1981