МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1983

УДК 532.546

ОБ ОДНОМ ЗАКОНЕ ФИЛЬТРАЦИИ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ

БАСАК Н. К., ДОМБРОВСКИЙ Г. А.

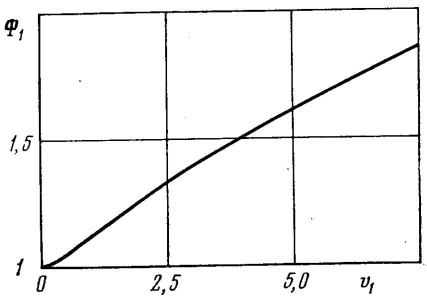
Рассматривается плоская установившаяся фильтрация несжимаемой жидкости с предельным градиентом. Принят специальный закон фильтрации, позволяющий пользоваться при решении задач аппаратом теории функций комплексного переменного. Для этого закона дано решение известной [1] задачи о движении в полосе от плоского точечного источника.

1. Пусть x, y — прямоугольные декартовы координаты точки плоскости движения; $z=x+iy\,(i=\sqrt{-1})$; v — модуль вектора скорости фильтрации; θ — угол наклона вектора скорости фильтрации к оси x; $\varphi=-H+\mathrm{const}$, где H — напор; ψ — функция тока; $\Phi(v)$ — функция, определяющая закон фильтрации [2].

Имеем систему уравнений и дифференциальное соотношение [1]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{\Phi^2(v)}{v\Phi'(v)}\frac{\partial\psi}{\partial v};\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\Phi(v)}{v^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\tag{1.1}$$

$$dz=\left[\frac{d\varphi}{\Phi(v)}+i\frac{d\psi}{v}\right]\exp(i\theta)\tag{1.2}$$



Фиг. 1

Рассмотрим функцию $\Phi(v)$, заданную параметрически (параметр (σ, $\sigma\geqslant 0$) формулами

$$\Phi=\frac{\lambda\exp\sigma}{\sigma+1},\qquad v=\frac{\lambda\sigma\exp\sigma}{a}\tag{1.3}$$

где λ и a — произвольные положительные постоянные.

Полагая $\sigma=0$, получаем $v=0$, $\Phi=\lambda$. Имеем, следовательно, закон фильтрации с предельным градиентом. Если $\sigma\to\infty$, то $v\to\infty$, $\Phi\to\infty$. На фиг. 1 изображена, согласно формулам (1.3), зависимость $\Phi/\lambda=\Phi_*$ от $av/\lambda=v_*$. Точка с координатами $av/\lambda=\sqrt{e}/2$, $\Phi/\lambda=2\sqrt{e}/3$ является точкой перегиба графика.

Приняв условие (1.3), приходим к системе

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{a}{\sigma^2}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}=-\frac{a}{\sigma^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\tag{1.4}$$

Общее решение этой системы представим в форме

$$\varphi=a\sigma^{-1}\operatorname{Re}F'(\omega),\qquad \psi=\operatorname{Im}[F(\omega)-\sigma F'(\omega)]\tag{1.5}$$

где $F(\omega)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного $\omega=\sigma+i\theta$. Пользуясь (1.2), (1.3) и (1.5), получаем формулу для перехода от плоскости ω к физической плоскости z

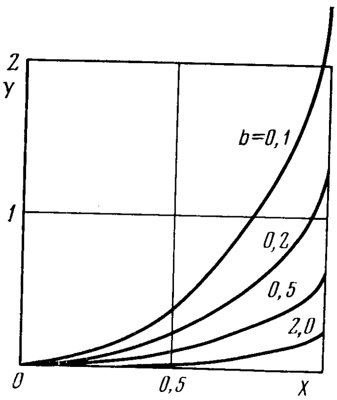
$$\frac{\lambda}{a}\bar{z}=\frac{1}{2\sigma}[F'(\omega)+\overline{F'(\omega)}]e^{-\omega}+\int e^{-\omega}F''(\omega)d\omega \qquad (1.6)$$

Закон фильтрации, определяемый формулами (1.3), был указан как закон, при котором система (1.1) приобретает вид (1.4), в работе [3]. Для эффективного его применения авторы данной заметки записали общее решение системы (1.4) в форме (1.5) и получили формулу перехода (1.6).

2. Рассмотрим задачу о движении с застойными зонами, которое создается в полосе с непроницаемыми границами $x=-l$ и $x=+l$ плоским точечным источником с мощностью $4q$, находящимся в начале координат. Значение v в бесконечно удаленных точках полосы обозначим v_1, а соответствующее значение $\sigma-\sigma_1$.

Ввиду симметрии достаточно исследовать только часть потока в первом квадранте. Этой части потока в плоскости ω соответствует полуполоса $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$, $\sigma\geqslant0$. Граничное условие для функции $\psi(\sigma,\theta)$ будет следующим: $\psi(\sigma, 0)=0(\sigma\geqslant0)$, $\psi(0,\theta)=0(0\leqslant\theta\leqslant\pi/2)$, $\psi(\sigma,\pi/2)=0(0\leqslant\sigma<\sigma_1)$, $\psi(\sigma,\pi/2)=q(\sigma>\sigma_1)$.

Решаем задачу методом аналитического продолжения, широко применяемым начиная с работы [4], при решении плоских дозвуковых задач теории газовых струй. Для этого разбиваем полуполосу $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$, $\sigma\geqslant0$ отрезком прямой $\sigma=\sigma_1$ на две подобласти: бесконечную и конечную. Представляем функцию $F(\omega)$ в первой и второй подобласти в виде



Фиг. 2

$$F_1(\omega)=\frac{2q}{\pi}\left(A+\omega-\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{-2k\omega}\right) \qquad (2.1)$$

$$F_2(\omega)=\frac{2q}{\pi}\left(B+R\omega^2+\sum_{k=1}^{\infty}B_k \operatorname{ch} 2k\omega\right) \qquad (2.2)$$

так что при любых действительных постоянных A, B, R, A_k, B_k граничное условие для функции $\psi(\sigma,\theta)$ будет удовлетворительно. Применяя при $\sigma=\sigma_1$ условие аналитического продолжения для функции тока (равенство значений на линии $\sigma=\sigma_1$ слева и справа как функции ψ, так и ее производной по σ), получаем

$$A_k=(-1)^k \operatorname{sh} 2k\sigma_1/2k^2\sigma, \qquad B_k=(-1)^k e^{-2k\sigma_1}/2k^2\sigma_1 \qquad (2.3)$$

Учитывая этот результат, ряды, входящие в выражения для функций $F_1'(\omega)$ и $F_2'(\omega)$, можно просуммировать. Если положить $R=1/2\sigma_1$, то придем к единому для всей полуполосы виду решения

$$F(\omega)=\frac{2q}{\pi}\int_0^{\omega}\left[1+\frac{1}{2\sigma_1}\ln\frac{1+\exp(-2\sigma_1-2\omega)}{1+\exp(2\sigma_1-2\omega)}\right]d\omega \qquad (2.4)$$

При помощи формулы (1.6) устанавливаем далее связь между координатами соответствующих точек плоскости ω и плоскости z. После интегрирования и преобразований имеем

$$z=\frac{2qa}{\pi\lambda\sigma_1}\left[\frac{1}{4\sigma}e^{-\sigma+i\theta}\ln\frac{\operatorname{sh}^2(\sigma_1+\sigma)+\cos^2\theta}{\operatorname{sh}^2(\sigma_1-\sigma)+\cos^2\theta}+e^{-\sigma_1}\operatorname{arctg}(e^{\sigma_1-\sigma+i\theta})-\right.$$

$$\left.-e^{\sigma_1}\operatorname{arctg}(e^{-\sigma_1-\sigma+i\theta})\right] \tag{2.5}$$

причем постоянная интегрирования определена из условия $z=0$ при $\sigma=\infty$. В результате осуществления предельного перехода в правой части формулы (2.5) при $\sigma\to 0$ получаем уравнение границы застойной области

$$z(\theta)=\frac{qa}{\pi\lambda\sigma_1}\left[\frac{\operatorname{sh}2\sigma_1\cos\theta}{\operatorname{sh}^2\sigma_1+\cos^2\theta}-2\operatorname{ch}\sigma_1\operatorname{arctg}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sh}\sigma_1}+\pi e^{-\sigma_1}+\right.$$

$$\left.+i\left(\frac{\operatorname{sh}2\sigma_1\sin\theta}{\operatorname{sh}^2\sigma_1+\cos^2\theta}+\operatorname{sh}\sigma_1\ln\frac{\operatorname{ch}\sigma_1-\sin\theta}{\operatorname{ch}\sigma_1+\sin\theta}\right)\right] \tag{2.6}$$

Проведен расчет по этой формуле с привлечением равенства $qa=l\lambda\sigma_1e^{\sigma_1}$, которое следует из очевидного равенства $q=lv_1$. Результаты расчета при некоторых значениях параметра $b=\sigma_1e^{\sigma_1}=av_1/\lambda$ представлены на фиг. 2 в координатах $X=x/l$, $Y=\pi y/10l$. Если устремить σ_1 к нулю, то придем к предельному случаю, когда $v_1=0$ и $l=\infty$. Из уравнения (2.6) в пределе при $\sigma_1\to 0$ получаем

$$z(\theta)=\frac{2qa}{\pi\lambda}\left[\left(\frac{2}{\cos\theta}-\frac{\pi}{2}\right)+i\left(\frac{\operatorname{tg}\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)\right]$$

Задача, таким образом, решается так же просто, как и при законе фильтрации, предложенном в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бернадинер М. Г., Ентов В. М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 200 с.
2. *Христианович С. А.* Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси.– ПММ, 1940, т. 4, вып. 1, с. 33–52.
3. *Ильинский Н. Б., Фомин В. М., Шешуков Е. Г.* О нелинейных законах фильтрации специального вида и решении краевых задач.– Тр. Семинара по краев. задачам. Казан. ун-т, 1972, вып. 9, с. 92–102.
4. *Фалькович С. В.* К теории газовых струй.– ПММ, 1957, т. 21, вып. 4, с. 459–464.
5. *Панько С. В.* О некоторых задачах фильтрации с предельным градиентом.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 4, с. 117–181.

Харьков

Поступила в редакцию
27.I.1982