МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1983

УДК 532.54

О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ТРУБЕ

КОЧИНА Н. Н.

Методом последовательных приближений решается задача о неустановившемся движении вязкой сжимаемой жидкости в полубесконечной трубе с горизонтальной осью. Круговое поперечное сечение трубы зависит от координаты, отсчитываемой вдоль оси трубы, по экспоненциальному закону. На конце трубы установлен такой изменяющий расход жидкости агрегат, как задвижка, компрессор, поршневой насос, турбина. Процесс предполагается баротропным.

1. Неустановившееся движение вязкой жидкости в трубах рассмотрено в работах [1—6]. В [5] получено обобщенное решение рассмотренной задачи. Эта задача сводится к нахождению решения уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}+g'(u)\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(u),\qquad P=P_0+u \tag{1.1}$$

с начальными и граничным условиями

$$u=0,\quad P=P_0,\quad t\leqslant 0 \tag{1.2}$$

$$\Omega[u(0,t),\quad P(0,t)]=\zeta(t),\quad t>0 \tag{1.3}$$

Здесь u — средняя скорость в сечении трубы, зависящем от продольной координаты x по закону

$$S=S_0\exp(\varkappa x) \tag{1.4}$$

где $S_0>0$, $\varkappa>0$, $\varkappa\sqrt{S_0}\ll 1$.

В формулах (1.1)—(1.3) P — функция, связанная со средним давлением p в сечении трубы зависимостью

$$P=\int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho(p)a(p)} \tag{1.5}$$

где $a(p)$ — скорость звука в трубе, равная, в предположении, что упругостью стенок трубы можно пренебречь, скорости звука текущей в трубе жидкости, $\Omega(x, y)$ и $\zeta(t)$ — известные функции, зависящие от типа агрегата, присоединенного к концу трубы.

Если в трубе течет вода, то функция $a(P)$ имеет вид

$$a(P)=c+(n-1)P/2 \tag{1.6}$$

причем $c=1400$ м/с, а константа n близка к 7 ($n=7{,}15$ [7], $n=6{,}6667$ [8]).

Входящие в формулы (1.1) функции $g'(u)$ и $\varphi(u)$ имеют вид [5]

$$g'(u)=c+\frac{n-1}{2}P_0+\frac{n+1}{2}u$$
$$\varphi(u)=-\varkappa\left(c+\frac{n-1}{2}P_0\right)u-\frac{\varkappa(n-1)}{2}u^2 \tag{1.7}$$

Функция $\varphi(u)$ характеризует гидравлическое сопротивление потока.

2. В данной работе решение задачи (1.1)–(1.7) найдено в явном виде, методом последовательных приближений. При движении воды в чугунном водопроводе выполняются соотношения [5] $u \ll c$, $P \ll c$

В связи с этим разложим искомые безразмерные функции в ряды по степеням малого безразмерного параметра $\varepsilon = u_*/c$, где u_* – некоторая константа размерности скорости

$$U = U_1 + \varepsilon U_2 + \varepsilon^2 U_3 + \ldots, \quad Q = U + Q_0$$
$$U = u/u_*, \quad Q = P/u_*, \quad Q_0 = P_0/u_* \tag{2.1}$$

В формулах (1.1)–(1.7) нужно считать, что безразмерный параметр $\varkappa\sqrt{S_0}$ порядка ε

$$\varkappa\sqrt{S_0} = \lambda\varepsilon \tag{2.2}$$

С учетом (2.2) первое и второе приближения получим в виде

$$U_1 = 0, \quad Q_1 = Q_0, \quad U_2 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad t \leqslant x/c$$
$$U_1 = \eta_0(t - x/c)\exp(-\varkappa x), \quad Q_1 = U_1 + Q_0$$
$$U_2 = \eta_1\left(t - \frac{x}{c}\right)\exp(-\varkappa x) + \frac{n-1}{2}Q_0\eta_0'\left(t - \frac{x}{c}\right)\frac{x}{c}\exp(-\varkappa x) +$$
$$+\left[\eta_0^2\left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{n+1}{2\varkappa c}\eta_0\left(t - \frac{x}{c}\right)\eta_0'\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]\exp(-\varkappa x)\,[1 - \exp(-\varkappa x)],$$
$$Q_2 = U_2, \quad t > x/c$$

Пусть теперь параметр $\varkappa\sqrt{S_0}$ порядка ε^2, т. е. $\varkappa\sqrt{S_0} = \lambda\varepsilon^2$, тогда первое и второе приближения принимают вид

$$U_1 = 0, \quad Q_1 = Q_0, \quad U_2 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad t \leqslant x/c$$
$$U_1 = \eta_0\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad U_2 = \Phi\left(t - \frac{x}{c}\right)\frac{x}{c} + \eta_1\left(t - \frac{x}{c}\right)$$
$$\left(\Phi(z) = -\frac{\lambda u_*}{\sqrt{S_0}}\eta_0(z) + \eta_0'(z)\left[\frac{n+1}{2}\eta_0(z) + \frac{n-1}{2}Q_0\right]\right)$$
$$Q_1 = \eta_0\left(t - \frac{x}{c}\right) + Q_0, \quad Q_2 = U_2, \quad t > \frac{x}{c}.$$

Используя граничное условие (1.3), найдем для последовательного определения функций $\eta_0(z)$, $\eta_1(z), \ldots$ уравнения

$$\Omega_*(\eta_0, Q_0 + \eta_0) = \zeta_0(t) \tag{2.3}$$
$$\frac{\partial\Omega_*(\eta_0, Q_0+\eta_0)}{\partial U}U_2(0,t) + \frac{\partial\Omega_*(\eta_0, Q_0+\eta_0)}{\partial Q}Q_2(0,t) = \zeta_1(t)$$
$$\frac{\partial\Omega_*(\eta_0, Q_0+\eta_0)}{\partial U}U_3(0,t) + \frac{\partial\Omega_*(\eta_0, Q_0+\eta_0)}{\partial Q}Q_3(0,t) +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega_*(\eta_0, Q_0+\eta_0)}{\partial U^2}U_2^2(0,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega_*(\eta_0, Q_0+\eta_0)}{\partial Q^2}Q_2^2(0,t) +$$
$$+\frac{\partial^2\Omega_*(\eta_0, Q_0+\eta_0)}{\partial U\,\partial Q}U_2(0,t)Q_2(0,t) = \zeta_2(t) \quad (\Omega_*(U,Q) = \Omega(u,P))$$

Уравнения (2.3) получены из граничного условия (1.3) с использованием разложений

$$\zeta(t) = \zeta_0(t) + \varepsilon\zeta_1(t) + \varepsilon^2\zeta_2(t) + \ldots, \quad \eta(t) = \eta_0(t) + \varepsilon\eta_1(t) + \varepsilon^2\eta_2(t) + \ldots$$

Легко видеть, что поверхности разрывов совпадают с характеристиками $x=c(t-T_i)$.

3. Уравнения (1.3) кроме стационарного решения $u=0$, $P=P_0$ имеют также стационарное решение

$$x=-\frac{1}{\varkappa}\ln\left\{\frac{|u|\,|\omega+(n-1)u/2|^{2/(n-1)}}{|\vartheta|\,|\omega+(n-1)\vartheta/2|^{2/(n-1)}}\right\} \tag{3.1}$$

$$u(0)=\vartheta,\quad \omega=c+(n-1)P_0/2,\quad P=u+P_0,$$
$$\vartheta\neq 0,\quad \vartheta>-2\omega/(n+1)$$

Проекции характеристик уравнения (1.1) на плоскость $(x,\ t)$ имеют вид

$$x=C_2+\omega(t-C_1)+\frac{n+1}{\varkappa(n-1)}\ln\left|1\mp\frac{n-1}{2}\exp[-\varkappa\omega(t-C_1)]\right| \tag{3.2}$$

Знак в формуле (3.2) совпадает со знаком функции $-u(x,\ t)$.

Если $C_2=\omega C_1$, при $C_2\to-\infty$ из (3.2) получаем прямолинейную характеристику $x=\omega t$, по которой решение задачи $u(x,\ t)$, $P(x,\ t)$ сопрягается с покоем $u=0$, $P=P_0$ $(\vartheta=0)$. Решение задачи о неустановившемся движении жидкости в трубе сопрягается со стационарным решением (3.1) при значениях констант

$$C_1=\frac{1}{\varkappa\omega}\ln\left(\frac{|\vartheta|}{\omega+(n-1)\vartheta/2}\right),\qquad C_2=\frac{1}{\varkappa}\ln\left\{\frac{|\vartheta|}{\omega}\left(\frac{\omega+(n-1)\vartheta/2}{\omega}\right)^{2/(n-1)}\right\}$$

Уравнение характеристики, по которой сопрягаются эти решения, имеет вид

$$x=\omega t+\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\ln\left[\frac{\omega+(n-1)\vartheta(1-\exp(-\varkappa\omega t))/2}{\omega}\right] \tag{3.3}$$

В [9] показано, что более общее, чем (1.1), квазилинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}+g'(u)\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(u) \tag{3.4}$$

с граничным условием

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=Q[u(0,t)] \tag{3.5}$$

где $Q(z)$ — заданная функция, имеет стационарное решение

$$x=F(u)-F(\vartheta)\left(F(u)=\int\frac{g'(u)}{\varphi(u)}du\right). \tag{3.6}$$

При этом предполагается, что ϑ — значение функции $u(x)$ при $x=0$ — корень уравнения $\varphi(\vartheta)=g'(\vartheta)Q(\vartheta)$. Методом малых возмущений в [9] исследована устойчивость решения (3.6) и найдено условие его устойчивости $\lambda<0$ и неустойчивости $\lambda>0$, где

$$\lambda=g'(\vartheta)\left\{\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{\varphi(\vartheta)}{g'(\vartheta)}\right)-Q'(\vartheta)\right\} \tag{3.7}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский Н. Е.* О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. М.–Л.: Гостехиздат, 1949. 104 с.
2. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975. 296 с.
3. *Аронович Г. В., Картвелишвили Н. А., Любимцев Я. К.* Гидравлический удар и уравнительные резервуары. М.: Наука, 1968. 247 с.
4. *Картвелишвили Н. А.* Динамика напорных трубопроводов. М.: Энергия, 1979. 224 с.
5. *Кочина Н. Н.* О неустановившемся движении вязкой жидкости в длинной трубе.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 6, с. 35–43.
6. *Кочина Н. Н.* О движении жидкости в длинной трубе.– Докл. АН СССР, 1981, т. 259, № 4, с. 795–799.
7. *Коул Р.* Подводные взрывы. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. 495 с.
8. *Кочина Н. Н., Мельникова Н. С.* О взрыве в воде с учетом сжимаемости.– Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1966, т. 87, с. 35–65.
9. *Кочина Н. Н.* Об автоколебаниях жидкости большой плотности в трубах.– ПММ, 1963, т. 27, № 4, с. 609–617.

Москва

Поступила в редакцию
13.X.1981