

УДК 532.529+577

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСЕДАНИЯ АГРЕГИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ

ЛОСЕВ Е. С.

С использованием методов термодинамики необратимых процессов построена трехфазная модель суспензии, учитывающая образование агрегатов из взвешенных частиц и задержание части несущей жидкости в агрегатах. Модель позволяет описать как движение агрегатов относительно несущей жидкости, так и фильтрацию жидкости сквозь структуру агрегата, а также упругие свойства агрегатов. В рамках построенной модели рассмотрена задача об одномерном оседании под действием силы тяжести агрегирующих частиц в конечной трубке.

Исследование оседания агрегирующих частиц представляет интерес, в частности, в связи с проблемой интерпретации «реакции оседания эритроцитов». Теоретическое описание агрегации эритроцитов совместно с гидродинамикой оседания до недавнего времени отсутствовало. Анализ ограничивался либо формулой Стокса для оседания одиночной частицы и ее обобщениями, либо описанием динамики концентрации [1–3]. Модель оседания агрегирующих эритроцитов без учета задержания плазмы крови в агрегатах предложена в [4]. Вопросы оседания частиц с учетом образования агрегатов рассматривались в связи с проблемами химической технологии [5–6]. Однако при этом также не было совместного описания гидродинамики оседания и кинетики агрегации, а также учета динамики задержания несущей жидкости. В [7] рассматривалось оседание агрегирующих частиц при малых концентрациях.

1. Уравнения агрегации. Теория процесса агрегации в общем случае основана на кинетических уравнениях для функции распределения агрегатов по размерам. Для описания кинетики агрегации с учетом захвата жидкой фазы в состав агрегата можно вводить функцию распределения $\varphi(w, V)$, задающую ожидаемое в единичном физическом объеме число агрегатов с объемами от w до $w+dw$, содержащих объемы жидкости от V до $V+dV$. Для функции $\varphi(w, V)$ могут быть сконструированы соответствующие кинетические уравнения, обобщающие известные уравнения теории коагуляции и близкие к моделям, описывающим процесс конденсации [8].

Феноменологические уравнения агрегации, учитывающие захват жидкости агрегатами, строились в [9]. При феноменологическом описании интерес представляют макроскопические характеристики, являющиеся моментами функции распределения, в первую очередь числовая концентрация агрегатов N , объемная концентрация агрегатов H и истинная объемная концентрация взвешенных частиц C

$$N = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi(w, V) dw dV, \quad H = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w \varphi(w, V) dw dV \quad (1.1)$$

$$C = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (w-V) \varphi(w, V) dw dV$$

В качестве дополнительного параметра можно рассматривать также характеристику разброса агрегатов по объему $q=1-QN/H^2$, где

$$Q = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w^2 \varphi(w, V) dw dV$$

Этот параметр может играть заметную роль при гравитационном механизме сближения агрегатов — за счет разности в скоростях оседания агрегатов, имеющих различный объем. Балансовые уравнения для введенных характеристик имеют следующую структуру:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \dots = G, \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \dots = \theta, \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \dots = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial t} + \dots = \xi \quad (1.2)$$

где ради краткости опущены конвективные члены; G — итоговая скорость образования агрегатов, θ — скорость зашипания жидкости в агрегатах, ξ — скорость изменения дисперсности.

Выражения для G , θ , ξ можно конструировать, исходя из физических соображений и теории размерностей. Для агрегатов, оседающих под действием силы тяжести при отсутствии во взвеси сдвигового течения, имеют место два специфических механизма сближения агрегатов: за счет разности в скоростях агрегатов, имеющих различные размеры, и за счет случайных флуктуаций скорости оседания. Первый механизм учтем введением в число аргументов характеристики дисперсности q , второй — введением средней флуктуационной энергии E_f . Кроме того, будем считать, что агрегация определяется следующими параметрами: g — ускорение силы тяжести, ρ_c — плотность частиц, $\delta\rho$ — разность плотностей частиц и несущей жидкости, μ — вязкость несущей жидкости, концентрации N , H , C , безразмерные параметры χ_i , характеризующие геометрическую форму агрегатов. Из перечисленных размерных величин можно составить три безразмерные комбинации: $a = E_f N^{1/3} / g \delta\rho$, $b = \delta\rho / \rho_c$, $d = \rho_c g \delta\rho / \mu^2$; последняя имеет смысл числа Рейнольдса для оседающих частиц. Полагая b , $d \ll 1$, из соображений размерностей будем иметь

$$G = \frac{g \delta\rho}{\mu} N^{2/3} f_1, \quad \theta = \frac{g \delta\rho}{\mu} N^{-1/3} f_2, \quad \xi = \frac{g \delta\rho}{\mu} N^{-1/3} f_3 \quad (1.3)$$

где f_i — функции безразмерных аргументов H , C , q , a , χ_i . Если влияние флуктуационного механизма сближения мало ($a \ll 1$), то, согласно (1.3), для скорости агрегации имеем $G \sim N^{2/3}$. Отметим, что соотношения (1.3) не являются единственно возможными. В частности, если в число размерных параметров входит максимальная числовая концентрация N_0 , то в число аргументов войдет новый безразмерный параметр N/N_0 , и тогда не обязательно выполнение соотношения $G \sim N^{2/3}$.

2. Трехфазная модель суспензии агрегирующих частиц. Рассмотрим среду, состоящую из несущей несжимаемой ньютоновской жидкости (фаза 1) и взвешенных в ней агрегатов, содержащих деформируемый каркас из твердых несжимаемых частиц (фаза 2) и запертую жидкость (фаза 3). Запертая жидкость образуется в процессе образования агрегатов при захвате части несущей жидкости в состав агрегата. Состав смеси будем характеризовать концентрациями N , H , C , определенными согласно (1.1). Характеристику дисперсности q здесь для простоты рассматривать не будем, считая, что q может быть выражено через другие параметры состояния.

Для внутренних энергий U^α , приходящихся на единицу массы фазы α ($\alpha=1, 2, 3$), предполагаем зависимости

$$U^1 = U^1(S^1, C, H), \quad U^2 = U^2(S^2, C, H, \epsilon_{ij}), \quad U^3 = U^3(S^3, C, H) \quad (2.1)$$

где S^α — энтропия единицы массы фазы α , ϵ_{ij} — девиатор тензора деформаций твердой фазы, образующей «каркас» агрегатов $\epsilon_{ii} = 0$. Зависимость U^2 от объемного сжатия твердой фазы в рассматриваемом случае несжимаемости частиц отражена в зависимости U^2 от C . Учитывая, что распад

агрегатов не рассматривается, и ради простоты пренебрегая вкладом в производство энтропии от образования агрегатов, в число аргументов внутренней энергии не включено N . Включение N в число аргументов, как это сделано в [9], привело бы в конечном счете лишь к переопределению давлений фаз в уравнениях движения и к появлению зависимости давлений от N . Предполагая тепловое равновесие между фазами, введем обозначения

$$\frac{\partial U^\alpha}{\partial S^\alpha} = T, \quad \rho^\alpha \frac{\partial U^\alpha}{\partial C} = -p_c^\alpha, \quad \rho^\alpha \frac{\partial U^\alpha}{\partial H} = -p_H^\alpha, \quad \rho^2 \frac{\partial U^2}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad (2.2)$$

Уравнения сохранения массы, импульса и энергии фаз в прямоугольных декартовых координатах имеют вид

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho^\alpha u_i^\alpha}{\partial x_i} = \theta^\alpha \quad (2.3)$$

$$\rho^\alpha \frac{d_\alpha u^\alpha}{dt} = - \frac{\partial P_{ik}^\alpha}{\partial x_i} + \rho^\alpha f_k^\alpha + R_k^\alpha, \quad \frac{d_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.4)$$

$$\rho^\alpha \frac{d_\alpha E^\alpha}{dt} = - \frac{\partial Q_i^\alpha}{\partial x_i} + \dot{u}_k^\alpha (\rho^\alpha f_k^\alpha + R_k^\alpha) + W^\alpha \quad (2.5)$$

$$\rho^1 = (1-H)\rho_p, \quad \rho^2 = C\rho_c, \quad \rho^3 = (H-C)\rho_p \quad (2.6)$$

где ρ_c, ρ_p — истинные плотности частиц и жидкости, u_i^α — средние массовые скорости фаз, θ^α — скорости массообмена между фазами ($\theta^2=0$), P_{ik}^α — тензоры напряжений, f_k^α — внешние массовые силы, R_k^α — объемные силы межфазового взаимодействия, $E^\alpha = U^\alpha + 1/2 u_i^\alpha u_i^\alpha$ — полная энергия на единицу массы фазы α , Q_i^α — поток энергии в фазе α , W^α — межфазовые потоки энергии. Имеют место соотношения

$$\sum_{\alpha=1}^3 \theta^\alpha = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^3 R_k^\alpha = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^3 (W^\alpha + u_k^\alpha R_k^\alpha) = 0 \quad (2.7)$$

К уравнениям (2.3)–(2.5) необходимо добавить уравнение (1.2) для полного числа агрегатов

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N u_i^2}{\partial x_i} = G \quad (2.8)$$

Учитывая несжимаемость частиц и жидкости, а также (2.6) и (2.7), уравнения (2.3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial(1-H)}{\partial t} + \frac{\partial(1-H)u_i^1}{\partial x_i} = -\theta, \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C u_i^2}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial(H-C)}{\partial t} + \frac{\partial(H-C)u_i^3}{\partial x_i} = \theta, \quad \theta = \frac{\theta^3}{\rho_p} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Складывая эти равенства, получим условие несжимаемости среды в целом

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [(1-H)u_i^1 + C u_i^2 + (H-C)u_i^3] = 0 \quad (2.10)$$

Уравнения притока тепла, получаемые из (2.3)–(2.5), имеют вид

$$\rho^\alpha \frac{d_\alpha U^\alpha}{dt} = - \frac{\partial q_i^\alpha}{\partial x_i} - P_{ik}^\alpha e_{ik}^\alpha + W^\alpha \quad (2.11)$$

$$q_i^\alpha = Q_i^\alpha - u_k^\alpha P_{ik}^\alpha, \quad e_{ik}^\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\alpha}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^\alpha}{\partial x_i} \right)$$

Запишем также соотношение, следующее из (2.1) и (2.2) и имеющее смысл тождества Гиббса

$$\sum_{\alpha=1}^3 \rho^\alpha \frac{d_\alpha U^\alpha}{dt} = \sum_{\alpha=1}^3 \left(\rho^\alpha T \frac{d_\alpha S^\alpha}{dt} - p_c^\alpha \frac{d_\alpha C}{dt} - p_H^\alpha \frac{d_\alpha H}{dt} \right) + \sigma_{ik} w_{ik} \quad (2.12)$$

$$w_{ik} = \frac{d_2 \varepsilon_{ik}}{dt} + \varepsilon_{ik} e_{i1}^2 + \varepsilon_{li} e_{ik}^2 \quad (2.13)$$

где w_{ik} – тензор скоростей упругих деформаций второй фазы [10].

Отметим, что, несмотря на $\varepsilon_{li}=0$, согласно выписанному соотношению, w_{li} , вообще говоря, не равно нулю. Складывая уравнения (2.11), исключая затем внутреннюю энергию из (2.11) и (2.12), добавляя к полученному соотношению условие несжимаемости (2.10), умноженное на неопределенный множитель, который запишем в виде p/T , и используя (2.7) и (2.9), получим уравнение баланса энтропии для смеси в целом

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial G_l}{\partial x_l} = R, \quad \rho S = \sum_{\alpha=1}^3 \rho^\alpha S^\alpha, \quad G_l = \sum_{\alpha=1}^3 \left(\rho^\alpha u_l^\alpha S^\alpha + \frac{q_l^\alpha}{T} \right)$$

где R – скорость производства энтропии.

Рассматривая скорость производства энтропии, согласно линейной теории термодинамики необратимых процессов, как сумму произведений термодинамических сил и потоков, между которыми имеют место линейные зависимости, пренебрегая перекрестными эффектами, будем иметь

$$\begin{aligned} P_{ik}^1 &= [(p+p_H^1)(1-H) - \mu_1 e_{ii}^1] \delta_{ik} - 2\mu_2 e_{ik}^1 & (2.14) \\ P_{ik}^2 &= [(p-p_c^1 - p_c^2 - p_c^3 - p_H^3)C - \mu_3 (e_{ii}^2 - w_{ii})] \delta_{ik} - 2\mu_4 (e_{ik} - w_{ik}) \\ P_{ik}^2 + \sigma_{ik} &= [(p-p_c^1 - p_c^2 - p_c^3 - p_H^3)C - \mu_5 w_{ii}] \delta_{ik} - 2\mu_6 w_{ik} \\ P_{ik}^3 &= [(p-p_H^2 - p_H^3)(H-C) - \mu_7 e_{ii}^3] \delta_{ik} - 2\mu_8 e_{ik}^3 \\ R_i^1 &= F(u_i^2 - u_i^1) - p \frac{\partial H}{\partial x_i} + p_c^1 \frac{\partial C}{\partial x_i} \\ R_i^3 &= D(u_i^2 - u_i^3) + (p - p_H^2) \frac{\partial (H-C)}{\partial x_i} + (p_c^3 + p_H^3) \frac{\partial C}{\partial x_i} \end{aligned}$$

где μ_j , F , D – термодинамические коэффициенты, зависящие от концентраций; F – обобщение коэффициента стокова сопротивления частице, движущейся в вязкой среде; D обобщает коэффициент, обратный коэффициенту проницаемости в законе фильтрации Дарси. Соотношения (2.14) замыкают систему (2.3), (2.4) для изотермических процессов. Напряжения во второй фазе P_{ik}^2 определяются из второго и третьего уравнений (2.14) после задания конкретного вида зависимости $U^2(\varepsilon_{ik})$, причем используется соотношение (2.13).

3. Постановка одномерной задачи об оседании в конечной трубке. Используем полученные соотношения для моделирования процесса оседания под действием силы тяжести частиц, способных образовывать агрегаты с захватом части несущей жидкости. Считая процесс одномерным, выберем ось x вдоль направления силы тяжести. Пренебрегая инерционными членами, вязкими напряжениями в фазах по сравнению с силами вязкого межфазового взаимодействия ($\mu_j=0$), а также полагая $p_c^\alpha = p_H^\alpha = 0$ ($\alpha=1,3$), но сохраняя давления p_c^2 и p_H^2 , характеризующие упругое взаимодействие частиц в агрегатах, уравнения (2.5) с учетом $\varepsilon_{li}=0$ и (2.14) запишем в виде

$$0 = -(1-H) \frac{\partial p}{\partial x} + F(u^2 - u^1) + \rho_p (1-H) g \quad (3.1)$$

$$0 = -C \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p_c^2 C}{\partial x} + p_H^2 \frac{\partial (H-C)}{\partial x} - F(u^2 - u^1) - D(u^2 - u^3) + \rho_c C g$$

$$0 = -(H-C) \frac{\partial (p-p_H^2)}{\partial x} + D(u^2 - u^3) + \rho_p (H-C) g$$

Здесь u^α — компоненты скоростей фаз вдоль координаты x , g — ускорение силы тяжести.

Будем считать, что среда в целом неподвижна. Тогда из (2.10) имеем

$$(1-H)u^1 + Cu^2 + (H-C)u^3 = 0 \quad (3.2)$$

Из (3.1), (3.2) находим скорости фаз

$$u^1 = -\frac{H(1-H)}{F} \xi_1 + \frac{(H-C)^2}{D} \xi_2, \quad u^2 = \frac{(1-H)^2}{F} \xi_1 + \frac{(H-C)^2}{D} \xi_2 \quad (3.3)$$

$$u^3 = \frac{(1-H)^2}{F} \xi_1 + \frac{(H-C)(1-H+C)}{D} \xi_2$$

$$\xi_1 = C(\rho_c - \rho_p)g + \frac{\partial [p_c^2 C + p_H^2 (H-C)]}{\partial x}, \quad \xi_2 = \xi_1 - \frac{\partial p_H^2}{\partial x}$$

Задавая зависимость $U^2(H, C)$ и конкретный вид F, D, G, θ как функций концентраций N, H, C , получим уравнение (2.8) и первые два уравнения (2.9) в одномерном случае с учетом (2.2) и (3.3) как систему трех уравнений относительно трех переменных N, H, C . В общем случае каждое из этих уравнений имеет первый порядок по времени и второй порядок по пространственной координате, при этом уравнения сильно нелинейны по концентрациям и содержат произведения первых пространственных производных от концентраций. После задания начальных и граничных условий указанные уравнения позволяют определить динамику распределения концентраций по времени.

Учитывая, что зависимость $U^2(H, C)$ связана с непосредственным упругим взаимодействием частиц, для упрощения дальнейшего исследования положим

$$U^2(H, C) = 0 \quad (1-H \sim 1), \quad U^2(H, C) = U(C) \quad (1-H \ll 1) \quad (3.4)$$

При этом следует полагать, что $\partial U(C)/\partial C \rightarrow \infty$ при $C \rightarrow C_m \ll 1$, где C_m означает максимальной упаковки частиц.

Случай $1-H \sim 1$. Вместо числовой концентрации N далее будем рассматривать средний объем твердой фазы в агрегатах $v = C/N$. Соответствующее уравнение для v , полученное из (2.8) с учетом (2.9), вместе с первыми двумя уравнениями (2.9), учитывая (3.3), (3.4), в рассматриваемом случае образуют систему квазилинейных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u^2 \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{Gv^2}{C} \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \gamma_{11} \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma_{12} \frac{\partial C}{\partial x} + \gamma_{13} \frac{\partial v}{\partial x} &= \theta \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \gamma_{21} \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma_{22} \frac{\partial C}{\partial x} + \gamma_{23} \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ u^1 &= \left[-\frac{H(1-H)}{F} + \frac{(H-C)^2}{D} \right] C(\rho_c - \rho_p)g \\ u^2 &= \left[\frac{(1-H)^2}{F} + \frac{(H-C)^2}{D} \right] C(\rho_c - \rho_p)g \\ \gamma_{11} &= u^1 - (1-H) \frac{\partial u^1}{\partial H}, \quad \gamma_{12} = -(1-H) \frac{\partial u^1}{\partial C}, \quad \gamma_{13} = -(1-H) \frac{\partial u^1}{\partial v} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\gamma_{21} = C \frac{\partial u^2}{\partial H}, \quad \gamma_{22} = u^2 + C \frac{\partial u^2}{\partial C}, \quad \gamma_{23} = C \frac{\partial u^2}{\partial v}$$

Для оседания в конечной трубке высотой L начальные и граничные условия примут вид

$$H(0, x) = H_0, \quad C(0, x) = C_0, \quad v(0, x) = v_0; \\ u^1(H, C, v) = u^2(H, C, v) = 0 \quad (x=L)$$

После конкретизации F, D, G, θ как функций v, H, C система (3.5) может быть решена методом характеристик. Уравнения характеристик системы (3.5) и условия на характеристиках можно записать в виде

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = u_* + u_f, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{2,3} = u_* + u_f + \frac{1}{2} A(1 \pm S) \\ \frac{dv}{dt} + \frac{Gv^2}{C} = 0 \\ R_{2,3} \left(\frac{dv}{dt} + \frac{Gv^2}{C}\right) + \frac{1}{2} A(1 \pm S) \left[S_{2,3} \left(\frac{dH}{dt} - \theta\right) + \gamma_{12} \frac{dC}{dt} \right] = 0 \\ A = A_1 + A_2, \quad A_1 = H \frac{\partial u_*}{\partial H} - (1-H) \frac{\partial u_f}{\partial H}, \quad A_2 = C \frac{\partial u_*}{\partial C} + C \frac{\partial u_f}{\partial C} \quad (3.6)$$

$$S_{2,3} = \frac{1}{2} [A_1(1 \pm S) - A_2(1 \mp S)], \quad R_{2,3} = \gamma_{12} \gamma_{23} + \gamma_{13} S_{2,3}$$

$$S = \sqrt{1 - \frac{B}{A^2}}, \quad B = 4C \left(\frac{\partial u_*}{\partial H} \frac{\partial u_f}{\partial C} - \frac{\partial u_*}{\partial C} \frac{\partial u_f}{\partial H} \right) \\ u_* = \frac{(1-H)^2 C (\rho_c - \rho_p) g}{F}, \quad u_f = \frac{(H-C)^2 C (\rho_c - \rho_p) g}{D} \quad (3.7)$$

Выражения для G и θ определяются формулами (1.3). Исходя из соображений размерностей, для F и D положим

$$F = \mu (Hv/C)^{-r_1} \varphi_1(H, C, \chi_i), \quad D = \mu v_0^{-r_2} \varphi_2(H, C, \eta_i) \quad (3.8)$$

где μ — вязкость несущей жидкости, v_0 — объем единичной частицы, χ_i, η_i — безразмерные параметры, характеризующие геометрическую форму и структуру агрегатов, φ_1, φ_2 — безразмерные функции. Далее будем считать

$$\varphi_1 = \alpha H (1-H)^{-r_1}, \quad \varphi_2 = \beta C (1-C/H)^{-r_2} \quad (3.9)$$

где α, β, r_1, r_2 — постоянные положительные коэффициенты. Выражение для φ_1 выбрано в соответствии с известными из литературы данными по зависимости вязкости и скорости оседания частиц в суспензии от концентрации [11, 12]. Выражение для φ_2 записано по аналогии с φ_1 , учитывая аналогию между процессами оседания и фильтрации.

Подставляя (3.8), (3.9) в (3.7), будем иметь

$$u_* = \frac{(\rho_c - \rho_p) g v_0^{r_2}}{\alpha \mu} \left(\frac{C}{H}\right)^{r_1} (1-H)^{2+r_1}, \quad u_f = \frac{(\rho_c - \rho_p) g v_0^{r_2}}{\beta \mu} \left(1 - \frac{C}{H}\right)^{r_2} (H-C)^2 \quad (3.10)$$

Расчет с использованием трех семейств характеристик (3.6) с учетом (3.10) в общем случае довольно громоздок. Рассмотрим поэтому приближенную постановку. В начальной стадии процесса $u_f \ll u_*$, поскольку $(H-C)/(1-H) \ll 1$. В этом случае, учитывая (3.6) и (3.10), пренебрегая величинами порядка u_f/u_* , уравнения характеристик и условия на характеристиках запишем в виде

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{1,3} = u_s, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = \left[1 - \frac{H(2+r_1)}{1-H}\right] u_s \quad (3.11)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{Gv^2}{C} = 0, \quad \frac{dH}{dt} - \frac{H}{C} \frac{dC}{dt} = \theta \quad (3.12)$$

$$\frac{2}{v} \left(\frac{dv}{dt} + \frac{Gv^2}{C}\right) - \frac{1+(3r_1+5)H}{H(1-H)} \left(\frac{dH}{dt} - \theta\right) + \frac{1}{C} \frac{dC}{dt} = 0$$

Отметим, что приближение $u_f \ll u_s$ может считаться выполненным не только в начальной стадии процесса оседания, но также на стадии развитой агрегации за счет $v \gg v_0$. Это обстоятельство распространяет область применимости указанного приближения (при достаточно малых θ) на весь процесс оседания, за исключением области, где $1-H \ll 1$, т. е. практически на всю область применимости уравнений (3.5). При $\theta=0$ сформулированная постановка сводится к предельной в [4]. (В условии (21) работы [4] допущена ошибка, не повлиявшая на полученные формулы и результаты численного расчета. Правильное условие следует из второго уравнения (3.12) при $\theta=0$ и $H=C$.)

Система (3.5) допускает разрывы, обычные для систем квазилинейных гиперболических уравнений первого порядка. Условия на разрывах

$$v_I = v_{II}, \quad (1-H_I)(u_I^1 - Z) = (1-H_{II})(u_{II}^1 - Z) \\ C_I(u_I^1 - Z) = C_{II}(u_{II}^1 - Z)$$

где римские индексы обозначают параметры с различных сторон разрыва, Z — скорость распространения разрыва. Отметим, что один разрыв имеет место всегда. Он разделяет слой жидкости, не содержащий частиц ($H=C=0$), образующийся вверху (сила тяжести направлена вниз), и нижний слой оседающих частиц. Из соотношений на разрыве и уравнений характеристик (3.6) или (3.11) видно, что траектория движения этого разрыва совпадает с первой характеристикой. Для концентрированных суспензий, в частности для крови при постановке «реакции оседания эритроцитов», скорость движения указанного разрыва является основным показателем процесса оседания.

Случай $1-H \ll 1$. Будем считать, что H достаточно близко к единице, так что, согласно (3.12), $u_s/u_f \ll 1$, а также H в выражении для u_f можно положить равным единице. В таком случае v и H не войдут в число переменных параметров, а для C , согласно (3.3), (2.2), (3.4), (3.10) и пренебрегая величинами порядка u_s/u_f , будем иметь уравнение

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (3.13)$$

$$u(C) = (1-C)^{2+r_2 v_0^{2/3}} (\rho_c - \rho_p) \frac{g}{\beta \mu}, \quad \lambda(C) = \frac{(1-C)^{2+r_2 v_0^{2/3}}}{\beta \mu} \left[C \frac{d^2 U}{dC^2} + \frac{dU}{dC} \right]$$

Таким образом, в предположении (3.4) весь столбик смеси можно разделить на три зоны. В первой, верхней зоне частицы отсутствуют ($H=C=0$); в третьей, нижней зоне справедливо уравнение (3.13); во второй, средней зоне, оседание описывается уравнениями (3.5). Первая и вторая зоны, как было сказано, разделены разрывом, допускаемым системой (3.5). Границу между второй и третьей зонами можно задать соотношениями $C_{II} = C_{III}$, $u_{II}^2 = u_{III}$. Условие на нижней границе для (3.13) имеет вид

$$u(C) + \frac{\lambda(C)}{C} \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (x=L)$$

Если вместо (3.5) использовать приближенную постановку, соответствующую уравнениям (3.11), (3.12), то между второй зоной, где справедливы эти уравнения, и третьей зоной будет промежуточная зона, в которой $u_s = u_f$. Толщину промежуточной зоны можно приближенно оценить соотношением (при $Gv_0t \gg 1$)

$$\delta \sim \frac{u_0}{\theta} \frac{(1-C)^2}{Gv_0t}$$

где u_0 — характерная скорость оседания одиночной частицы, t — время, прошедшее с момента начала оседания. Если δ достаточно мала, то во второй зоне можно использовать уравнения (3.11), (3.12), сохраняя представление процесса оседания на основе трех зон.

Отметим, что если вместо (3.4) положить $U^2(H, C) = 0$ при всех H и $C < C_m$, а при $C = C_m$ упругое взаимодействие приводит к остановке движения, то во второй и третьей зоне можно использовать уравнения (3.5), дополненные условием $u^i = u^2 = 0$ при $C = C_m$. При этом если δ достаточно мала, то вместо (3.5) можно использовать приближенную постановку, соответствующую уравнениям (3.6) при $B = 0$, которая систему (3.5) сводит к двум характеристикам.

В заключение отметим, что расчеты на основе предложенной модели позволяют хорошо описать эксперименты по оседанию эритроцитов в крови. Однако довольно большое количество варьируемых параметров снижает значение точности описания экспериментов, например описание одного и того же эксперимента может быть с хорошей точностью достигнуто при различном наборе варьируемых параметров. Модель, содержащая, по-видимому, наименьшее количество переменных параметров, необходимых для описания «реакции оседания эритроцитов», была предложена в [4]. Однако эта модель недостаточно хорошо описывает поздние стадии процесса при умеренной начальной концентрации эритроцитов, а также не учитывает повышения эффективной концентрации эритроцитов в начальной стадии. Указанные недостатки могут быть устранены на основе более общего подхода, предложенного выше.

Автор признателен С. А. Региреру за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huang G. R., Whelan T. A., Wang H.-H., Copley A. L. A mathematical model of sedimentation analysis applied to human whole blood.— *Biorheology*, 1971, v. 8, № 3–4, p. 157–163.
2. Sartory W. K. Prediction of concentration profiles during erythrocyte sedimentation by a hindered settling model.— *Biorheology*, 1974, v. 11, № 4, p. 253–264.
3. Hill C. D., Bedford A. A model for erythrocyte sedimentation.— *Biorheology*, 1981, v. 18, № 2, p. 255–266.
4. Лосев Е. С. К гидродинамической теории оседания эритроцитов.— *Мех. композит. материалов*, 1980, № 1, с. 136–141.
5. Michaels A. S., Bolger J. C. Settling rates and sediment volumes of flocculated kaolin suspensions.— *Industr. and Engng Chem. Fundament*, 1962, v. 1, № 1, p. 24–33.
6. Fitch B. Sedimentation of flocculent suspensions: state of the art.— *A.I.Ch.E. Journal*, 1979, v. 25, № 6, 913–930.
7. Яремко З. М., Солтыс М. Н. К оценке агрегации частиц суспензий методом седиментометрического анализа.— *Коллоидный ж.*, 1976, т. 38, № 5, с. 1032–1034.
8. Волощук В. М., Седунов Ю. С. Процессы коагуляции в дисперсных системах. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 320 с.
9. Регирер С. А., Шадрин Н. Х. О моделях тиксотропных жидкостей.— *ПММ*, 1978, т. 42, вып. 5, с. 856–865.
10. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
11. Ханпель Дж., Брекнер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
12. Richardson J. F., Jeronimo M. A. Velocity – voidage relations for sedimentation and fluidisation.— *Chem. Eng. Sci.*, 1979, v. 34, № 12, p. 1419–1422.

Москва

Поступила в редакцию
26.I.1982