МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1983

УДК 532.528

ОБ ИНТЕГРАЛЕ ЭНЕРГИИ ПРИ ДВИЖЕНИИ С МАЛЫМИ ЧИСЛАМИ КАВИТАЦИИ И ПРЕДЕЛЬНЫХ ФОРМАХ КАВЕРН

ЯКИМОВ Ю. Л.

Рассматривается задача о форме осесимметричной тонкой каверны, возникающей за кавитатором, движущимся в покоящейся идеальной несжимаемой жидкости при малых числах кавитации σ.

Пусть $v(t)$ — скорость движения кавитатора, r_0 — его радиус, c_x — коэффициент сопротивления. Введем безразмерные координату x вдоль оси каверны, радиус каверны r, время t и потенциал на поверхности каверны φ по формулам [1, 2]

$$x=\frac{x_p}{2r_0\sqrt{c_x}},\qquad r=\frac{r_p}{2r_0\sqrt{c_x}}$$

$$t=\frac{vt_p}{2r_0\sqrt{c_x}},\qquad \varphi=\frac{\varphi_p}{2vr_0\sqrt{c_x}}$$

где те же размерные параметры снабжены индексом p. В этих безразмерных переменных известная асимптотическая формула для формы бесконечной каверны при нулевом числе кавитации [1—3] имеет вид

$$u=\frac{x}{\sqrt{\ln x}},\quad u=r^2 \tag{1}$$

В [1, 2] рассмотрены три варианта вывода дифференциальных уравнений разной степени точности для формы тонких нестационарных каверн. Наибольший интерес из них, по-видимому, представляет приведенная ниже относительно простая система, описывающая форму передней части каверны и допускающая при $\sigma=0$ асимптотику (1). Вывод этой системы и оценка точности не связаны с длиной каверны, так что она может быть использована для анализа бесконечно длинных каверн при $\sigma\to0$. Эта система имеет вид

$$\varphi_t-\frac{1}{2}r_t^2=\frac{\sigma}{2} \tag{2}$$

$$\frac{1}{4}u_{tx}\ln\frac{u}{[|x-x_i|+\sqrt{(x-x_i)^2+2u}]^2}-\frac{u_t}{4\sqrt{(x-x_i)^2+2u}}=-r_tr_x+\varphi_x-F_x \tag{3}$$

где x_i — координата конца каверны, F — потенциал от особенностей, расположенных на поверхности кавитатора и замыкателя [1], а неизвестными являются φ и $u=r^2$. Уравнение (2) — безразмерный интеграл Коши — Лагранжа, в котором опущены члены, несущественные для каверн, имеющих большое относительное удлинение. Уравнение (3) получено приравниванием величины скорости жидкости вдоль оси x на поверхности каверны, полученной из кинематических условий (правая часть) и из формулы Грина (левая часть), в которой нормальная производная в интеграле простого слоя выражается через производные u_t и u_{tx}, при этом существенно используется тонкость каверны.

Уравнения (2), (3) образуют систему, справедливую вблизи конца каверны x_1 $(i=1)$. Положив в (3) $i=2$, получим систему уравнений для конца каверны x_2. Систему уравнений, справедливую на всем промежутке (x_1x_2), можно представить в виде

$$\varphi_t-\frac{1}{2}r_t^2=\frac{\sigma}{2} \tag{4}$$

$$\frac{1}{4}u_{tx}\ln\frac{4u(x_2-x_1)^2}{[(x-x_1)+\sqrt{(x-x_1)^2+2u}]^2[(x_2-x)+\sqrt{(x_2-x)^2+2u}]^2}-$$
$$-\frac{u_t}{\sqrt{(x-x_1)^2+2u}}+\frac{u_t}{\sqrt{(x_2-x)^2+2u}}=-r_tr_x+\varphi_x-F_x \tag{5}$$

Вблизи концов интервала (x_1x_2) уравнение (5) совпадает с (3) с точностью до малых более высокого порядка, чем порядок членов, сохраненных в этих приближенных уравнениях. Действительно, выражение под знаком логарифма в левой части уравнения (5) вблизи концов интервала отличается от соответствующего выражения в (3) несущественным множителем порядка 1, а из двух последних слагаемых левой части (5) вблизи концов каверны будет существенно только одно, совпадающее с соответствующим слагаемым уравнения (3). В средней части каверны второе слагаемое левой части (3) и соответственно второе и третье слагаемые левой части (5) несущественны. Таким образом, (5) мало отличается от (3) на всем промежутке (x_1x_2).

Положив в (4), (5) $t=x$ и исключив φ, получим уравнение для стационарного движения

$$\frac{1}{4}u_{xx}\ln\frac{4u(x_2-x_1)^2}{[(x-x_1)+\sqrt{(x-x_1)^2+2u}]^2[(x_2-x)+\sqrt{(x_2-x)^2+2u}]^2}-$$
$$-\frac{u_x}{4\sqrt{(x-x_1)^2+2u}}+\frac{u_x}{4\sqrt{(x_2-x)^2+2u}}+\frac{1}{8}\frac{u_x^2}{u}=\frac{\sigma}{2}-F_x \tag{6}$$

Это уравнение для стационарного случая в средней части каверны совпадает с результатом [4] с точностью до несущественного множителя порядка 1 под знаком логарифма.

Рассмотрим (6) в интервале $(x_1+\Delta x,\ x_2-\Delta x)$ и преобразуем его. Выберем Δx таким, чтобы F_x, имеющая порядок $1/(\Delta x)^2$, была пренебрежимо мала. Заметим, что из тонкости каверны на этом интервале следует, что $u\ll x-x_1$ и $u\ll x_2-x$. Совместив начало координат с точкой x_1, положив $x_2=2L$ и отбросив несущественные члены, получим

$$\frac{1}{4}u_{xx}\ln\frac{uL^2}{x^2(2L-x)^2}-\frac{u_x}{4x}+\frac{u_x}{4(2L-x)}+\frac{1}{8}\frac{u_x^2}{u}=\frac{\sigma}{2}.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению

$$\frac{d}{dx}u_x^2\ln\frac{uL^2}{x^2(2L-x)^2}=4\sigma u_x$$

После интегрирования и перемены знаков получим

$$u_x^2\ln\frac{x^2(2L-x)^2}{uL^2}=c-4\sigma u \tag{7}$$

Положив $c=4\sigma u_{\max}$, будем иметь вместо (7)

$$u_x^2\ln\frac{x^2(2L-x)^2}{uL^2}=4\sigma(u_{\max}-u) \tag{8}$$

В стационарном случае система (2), (3) имеет аналогичный интеграл

$$u_x^2 \ln \frac{4x^2}{u} = c - 4\sigma u \tag{9}$$

Из (8) можно сделать вывод о том, что форма каверны вне концевых участков симметрична относительно миделевого сечения ($u=u_{\max}$, $x=L$). Правая часть (8) может быть отождествлена с безразмерной работой против разности сил давления σ при расширении сечения каверны, а левая может быть истолкована как некоторая кинетическая энергия кольца жидкости, окружающего данное сечение, масса которого зависит от u и x. Таким образом, (8) можно трактовать как закон сохранения механической энергии. При $u_x=0$ имеем минимальную кинетическую энергию и максимальную потенциальную, соответствующую $u=u_{\max}$.

Рассмотрим асимптотики (7) и (9). Вблизи x_1 и x_2 при $\sigma\to 0$ они совпадают, так как $(L-x)/L\to 1$. Действительно, при $\sigma\to 0$ из (9) имеем $u_x^2 \ln(4x^2/u)=c$, где c — постоянная интегрирования. Так как из (9) имеем $\ln(4x/u) \sim \ln(4\sqrt{\ln x}) \ll \ln x$, то

$$u_x \approx \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\ln x}} \tag{10}$$

При $c=1$ (10) соответствует асимптотике (1), так как, дифференцируя (1), имеем

$$u_x = \frac{d}{dx}\frac{x}{\sqrt{\ln x}} = \frac{1}{\sqrt{\ln x}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\ln^3 x}} \simeq \frac{1}{\sqrt{\ln x}}$$

Рассмотрим снова (7). При $\sigma\to 0$ течение вблизи x_1 близко к течению, соответствующему $\sigma\to 0$, и, следовательно, в (7) $c=1$. Отсюда при $u_x=0$ и $u=u_{\max}$ следует $4\sigma u_{\max}=1$. Это условие, полученное как следствие асимптотических законов, совпадает с экспериментом [5] с точностью до коэффициента 0,96—1.

Рассмотрим вопрос о форме и удлинении стационарной каверны. После афинного преобразования плоскости (ux) по следующим формулам вместо (8) получим

$$u = \frac{w}{\sigma}, \qquad x = \xi\frac{\sqrt{\ln 1/\sigma}}{\sigma}, \qquad L = L_1\frac{\sqrt{\ln 1/\sigma}}{\sigma} \tag{11}$$

$$w_\xi^2 \left[\ln\frac{\xi^2(2L_1-\xi)}{wL_1} + \ln\ln\frac{1}{\sigma} + \ln\frac{1}{\sigma}\right]\frac{1}{\ln 1/\sigma} = 1 - 4w \tag{12}$$

Если предположить, что в квадратных скобках последнего уравнения главными членами при $\sigma\to 0$ являются $\ln\ln 1/\sigma + \ln 1/\sigma$, то оно будет представлять собой дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. После интегрирования (12) получим, что форма каверны в этих переменных имеет вид эллипсоида с полуосями

$$r_{1\max} = \sqrt{w_{\max}} = \frac{1}{2}, \qquad L_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ln\ln 1/\sigma}{\ln 1/\sigma}}$$

При $\sigma\to 0$ эллипсоид близок к сфере радиуса $^1/_2$. Это эллипсоид вращения является предельной формой основной центральной части каверны, так как после подстановки параметров эллипсоида в (12) получим, что вне окрестности точек ξ_1 и ξ_2 неучтенный член много меньше оставленных

$$\ln\frac{\xi_1^2(2L_1-\xi)}{wL_1} \ll \ln\ln\frac{1}{\sigma} + \ln\frac{1}{\sigma}, \qquad \sigma\to 0$$

В окрестности точек ξ_1 и ξ_2 эта оценка несправедлива, но, как показано выше, справедлива асимптотика (1), которая после прямой подстановки

(11) в (1) дает уравнение свободной поверхности, близкое к той же сфере радиуса $^1/_2$. Возвратившись к исходным переменным u, x (11), для удлинения каверны χ при $\sigma \to 0$ получим

$$\chi^2 = \frac{u_{\max}}{L^2} = \sigma \left[\ln \frac{1}{\sigma} + \ln \ln \frac{1}{\sigma} \right]^{-1} \tag{13}$$

Концевые участки каверны, соответствующие асимптотике (1), расположены внутри предельного эллипсоида, а его удлинение (13) несколько превышает удлинение каверны.

Выражение (13) в главном члене совпадает с аналогичными формулами, полученными в [6, 7]. Приведенные в [7] экспериментальные данные показывают, что при $\sigma \leqslant 0{,}1$ (13) хорошо соответствует эксперименту.

В отличие от [7], где заранее предполагается, что форма каверны имеет вид эллипсоида вращения, в данной статье это свойство, а также формулы для площади миделевого сечения и удлинения каверны, хорошо подтверждаемые экспериментами, получены из анализа асимптотических уравнений без дополнительных предположений. Хорошее соответствие для частного случая стационарного течения позволяет использовать исходные системы (2), (3) или (4), (5) для решения более сложных нестационарных задач, задач с переменными $\sigma(x, t)$ и т. д., для которых в настоящее время систематические экспериментальные и теоретические результаты отсутствуют.

Аналогичные результаты для каверны в сжимаемой жидкости в акустическом приближении получены в [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Якимов Ю. Л.* Асимптотические законы вырождения формы тонких каверн.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 3, с. 3–10.
2. *Якимов Ю. Л.* Некоторые вопросы гидродинамики больших скоростей.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 2, с. 62–74.
3. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Физматгиз, 1961. 496 с.
4. *Якимов Ю. Л.* Об осесимметричном срывном обтекании тела вращения при малых числах кавитации.– ПММ, 1968, т. 32, вып. 3, с. 499–501.
5. *Логвинович Г. В.* Гидродинамика течений со свободными границами.– Киев: Наук. думка, 1969. 121 с.
6. *Garabedian P. R., Lewy H., Schiffer M.* Axially symmetric cavitational flow.– Ann. Math., 1952, v. 56, с. 560–602.
7. *Петров А. Г.* Прямой вариационный метод расчета плоских и осесимметричных кавитационных течений.– Докл. АН СССР, 1981, т. 257, № 6, с. 1323.
8. *Якимов Ю. Л.* Тонкая кавитационная каверна в сжимаемой жидкости. В кн.: Сборник трудов, посвященный Г. Г. Черному. Изд. МГУ, 1983.

Москва — Поступила в редакцию 13.IV.1982