

УДК 532.517.4

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА УСКОРЯЮЩИХСЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ

КАДЕР Б. А.

Целью представляемой работы является определение профиля скорости и закона трения в турбулентных пограничных слоях, развивающихся в условиях продольного отрицательного градиента давления ($dP/dx < 0$). В отличие от многочисленных работ, посвященных этой задаче и основанных на полумпирическом замыкании гидродинамических уравнений, общие формулы (содержащие, разумеется, некоторые эмпирические коэффициенты) будут получены на основе одних лишь соображений размерности и подобия. В этом смысле приведенные ниже результаты представляют собой естественное продолжение анализа замедляющихся пристенных турбулентных течений, проведенного в [1, 2]. Показывается, что найденные таким образом общие зависимости хорошо согласуются с многочисленными опытными данными.

Предметом исследования будут являться двумерные пограничные слои несжимаемой жидкости у гладкой непроницаемой стенки, совпадающей с плоскостью $y=0$. При этом предполагается, что поток является градиентным (т. е. $dP/dx \neq 0$); точнее говоря, считается, что в потенциальном потоке существует ускоряющий течение (т. е. отрицательный) кинематический градиент давления, по абсолютной величине равный $\gamma = \rho^{-1} |dP/dx|$. Будем предполагать, что скорость изменения продольного градиента давления $\dot{\gamma}$ достаточно мала, так что поле скоростей в пограничном слое в каждом сечении успеваеет приспособиться к изменившемуся значению γ , и в этом смысле турбулентный пограничный слой можно считать локально равновесным. При выполнении этого условия наличие ненулевого градиента dP/dx приводит к появлению единственного нового существенного для задачи размерного параметра γ , в то время как старшие производные $d^n P/dx^n$, $n > 1$ можно уже не учитывать. Таким образом, здесь не будут рассматриваться течения, существенно зависящие от условий вверх по потоку, т. е. обладающие заметной «памятью». Кроме того, будут исключены из рассмотрения «реламинаризованные» пограничные слои, в которых наличие сильного отрицательного градиента давления приводит к подавлению турбулентности в пограничном слое (см., например, обзор [3]).

В рассматриваемых условиях все кинематические (т. е. не зависящие от размерности массы) характеристики градиентного турбулентного потока определяются следующими размерными параметрами: кинематическим коэффициентом вязкости ν ; величиной кинематического градиента давления γ ; характерным вертикальным масштабом течения δ в рассматриваемом сечении пограничного слоя, определяемым условием: $U(\delta) = 0,99U_0$, где U_0 — скорость на внешней границе пограничного слоя; характерной скоростью в этом сечении. В качестве последнего параметра будем использовать скорость трения $u_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$, при этом одним из результатов теоретического анализа должен явиться вывод «закона сопротивления», связывающего отношение u_*/U_0 (т. е. коэффициент сопротивления $c_f = 2(u_*/U_0)^2$) с величинами ν , γ , δ и u_* . Гидродинамическая структура локально равновесного градиентного потока, согласно сказанному выше, зависит от трех независимых масштабов длины: вязкостного ($\delta_\nu = \nu/u_*$), градиентного ($\delta_p = u_*^2/\gamma$) и внешнего (δ).

Градиентный масштаб δ_p определяет глубину проникновения влияния внешнего градиента давления в пограничный слой. В случае, когда эта глубина достигает области максимальной генерации турбулентности ($10 \lesssim y_+ \lesssim 30$, где $y_+ = y/\delta_\nu = yu_*/\nu$),

можно ожидать кардинального изменения турбулентной структуры в пограничном слое. Опытные данные (см., например, обзор [3]) показывают, что сильное ускорение потока приводит к его реламинаризации, т. е. к обратному переходу от турбулентного к ламинарному течению. Согласно приводимым здесь общим соображениям подобия, эта реламинаризация должна иметь место при относительно небольших значениях отношения $S = \delta_p / \delta_v = u_*^3 / \gamma v$, начиная с некоторого «критического» значения этого параметра, что удовлетворительно согласуется со всеми приведенными в [3] данными.

Опираясь на соображения размерности и то известное обстоятельство, что верхняя граница зоны максимального порождения турбулентной энергии располагается вблизи $y \sim 30\delta_v$, можно даже попытаться оценить значение этого критического отношения — оно должно характеризоваться величиной порядка немногих десятков. Этот вывод также хорошо согласуется с экспериментальными данными [4–6], показывающими, что реламинаризация обычно наступает при $\delta_p / \delta_v \approx 40–50$. В литературе, посвященной теоретическому и экспериментальному изучению ускоряющихся течений, для характеристики обратного перехода обычно используется другая безразмерная характеристика $K = v U_0' / U_0^2 = \gamma v / U_0'^2$, $U_0' = dU_0/dx$. Очевидно, что эти два комплекса связаны простым соотношением: $K = (c_1/2)^{3/2} / (u_*^3 / \gamma v)$. Оценки возможного критического значения K , основанные на величине отношения $u_*^3 / \gamma v \approx 50$, приводят к значениям K порядка $3 \cdot 10^{-6}$, очень хорошо согласующимся с экспериментально полученными величинами $(2–3,5) \cdot 10^{-6}$ (см. табл. 1 в [3]).

Перечисленные выше размерные параметры задачи позволяют также оценить условие выполнимости предположения о локальной равновесности градиентного потока. Для этого необходимо, чтобы время релаксации поля скорости, задаваемое соотношением $\tau_1 \sim (\delta / \gamma)^{1/2}$, было бы намного меньше, чем характерное время изменения потенциальной скорости $\tau_2 \sim 1 / U_0' \sim U_0 / \gamma$, являющегося причиной деформации структуры пограничного слоя вдоль оси x . Таким образом, необходимое условие локального равновесия сводится к требованию $U_0 / \sqrt{\gamma \delta} \gg 1$.

Из-за наличия трех независимых масштабов профиль средней скорости здесь описывается функцией трех переменных

$$\partial U / \partial y = (V/L) \Phi(y/\delta_v, y/\delta_p, y/\delta), \quad (1)$$

где L — один из трех характерных масштабов течения, а V — характерный масштаб скорости, в качестве которого может использоваться либо скорость трения u_* , либо внешний масштаб скорости $\sqrt{\gamma \delta}$. Попытка определения функции от трех переменных по экспериментальным данным представляется практически безнадежной задачей. Формула (1), однако, может быть существенно упрощена за счет того, что в отдельных областях течения некоторые аргументы функции Φ принимают очень большие или очень малые значения и в предположении существования соответствующих пределов могут быть в первом приближении заменены нулем или бесконечностью. Анализ соотношения (1) показал [1, 2], что для градиентных течений с сильно разнесенными характерными масштабами $\delta_v \ll \delta_p \ll \delta$ вблизи граничной поверхности справедлив «закон стенки» (2), в ядре пограничного слоя выполняется «градиентный закон» (3), а во внешней зоне профиль скорости определяется «законом дефекта» (4):

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{u_*}{\delta_v} \Phi_1\left(\frac{y}{\delta_v}\right), \quad \frac{U}{u_*} = f_1(y_+) \quad (y \ll \delta_p) \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{u_*}{\delta_p} \Phi_2\left(\frac{y}{\delta_p}\right) \quad (\delta_v \ll y \ll \delta) \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \sqrt{\frac{\gamma}{\delta}} \Phi_3\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad \frac{U_0 - U}{\sqrt{\gamma \delta}} = f_3(\eta) \quad (y \gg \delta_p) \quad (4)$$

Тогда в области перекрытия зон применимости законов (2) и (3) распределение скорости следует хорошо известному «логарифмическому закону»

$$\frac{\partial U}{\partial y} = A \frac{u_*}{y}, \quad \frac{U}{u_*} = A \ln y_+ + B \quad (\delta_v \ll y \ll \delta_p) \quad (5)$$

а в области перекрытия зон применимости градиентного закона (3) и закона дефекта (4) имеет место также известный в литературе по замедляющимся пограничным слоям «закон квадратного корня»

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{2} K_1 \sqrt{\frac{\gamma}{y}}, \quad \frac{U}{u_*} = K_1 \sqrt{\frac{y\gamma}{u_*^2}} + K_2(S) \quad (\delta_p \ll y \ll \delta) \quad (6)$$

Выписанные выше общие соотношения в принципе справедливы как для ускоряющихся, так и для замедляющихся локально равновесных течений. Однако в пристенных потоках, развивающихся в условиях отрицательного градиента давления, условие $\delta_p \ll \delta$, как правило, не выполняется. Таким образом, даже если $\delta \gg \delta_v$, т. е. условие $\delta u_* / \nu \gg 1$, обеспечивающее развитую турбулентность, имеет место, параметр $Z = \delta / \delta_p = \delta \gamma / u_*^2$ обычно оказывается не очень большим. Для замедляющихся потоков [1] при $Z < 100$ в число аргументов зависимости (3) и (4) входит также и отношение Z , но тем не менее закон квадратного корня (6) оказывается справедливым и в этом случае, но только $K_1 = K_1(Z)$.

Естественно ожидать, что аналогично должно обстоять дело и в случае ускоряющихся течений. Проинтегрировав уравнение (6) с $K_1 = K_1(Z)$ от нижней границы $y = y_1$ области его применимости до какого-то значения y , принадлежащего этой области, получим

$$\frac{U}{u_*} = K_1(Z) \sqrt{\xi} + K_2(S, Z), \quad \xi = \frac{y}{\delta_p} = \frac{y\gamma}{u_*^2}, \quad K_2 = \frac{U(y_1)}{u_*} - K_1 \sqrt{\frac{\gamma y_1}{u_*^2}} \quad (7)$$

Аналогично этому интегрирование (6) от переменного значения y до верхней границы y_2 области применимости формулы (6) приводит к зависимости

$$\frac{U_0 - U}{\sqrt{\gamma \delta}} = -K_1(Z) \sqrt{\eta} + K_3(Z), \quad \eta = \frac{y}{\delta}, \quad K_3 = K_1 \sqrt{\frac{y_2}{\delta}} - \frac{U_0 - U(y_2)}{\sqrt{\gamma \delta}} \quad (8)$$

Сложение двух последних соотношений дает закон трения ускоряющегося турбулентного пограничного слоя о граничную поверхность

$$U_0 / u_* = K_2(S, Z) + \sqrt{Z} K_3(Z) \quad (9)$$

Выполнение пристенного закона Прандтля в градиентных потоках уже давно привлекло внимание экспериментаторов. Классические опыты, выявившие универсальную применимость этого закона и логарифмического соотношения (5) при наличии даже довольно значительных градиентов давления, как ускоряющих, так и замедляющих течение, выполнены в [7]. В дальнейшем такого рода опыты многократно повторялись. В настоящее время факт справедливости формул (2) и (5) для градиентных течений стал настолько общепринятым, что послужил основанием для широкого использования метода Клаузера определения касательного напряжения сдвига на стенке по логарифмической формуле (5) в случае течений с заметным градиентом скорости. Именно так, например, определялось значение u_* в сводке использованных далее экспериментальных данных [8], где принято: $A = 2,44$ и $B = 5,0$. Отметим, что, согласно развиваемым здесь соображениям, для выполнимости логарифмической формулы (5) должно быть справедливым неравенство $\delta_p \gg \delta_v$, т. е. $S = u_*^3 / \gamma \nu$ должно быть достаточно большим, скажем, превышать 10^2 . Так как в сильно градиентных течениях толщина логарифмического слоя незначительна, то и определенное по методу Клаузера значение u_* здесь, по-видимому, является не очень надежным.

Сложнее обстоит дело с законом квадратного корня (6). Приведенные выше рассуждения, разумеется, справедливы для течений с градиентом

давления любого знака; однако в имеющейся литературе, посвященной полям средней скорости в ускоряющихся пристенных потоках, формулы типа (6) не использовались. В частности, ранее не отмечалось, что в таких потоках во внешней зоне градиентного подслоя величина скорости U должна линейно зависеть от \sqrt{y} . Для проверки последнего вывода и определения значений коэффициента пропорциональности K_1 были использованы относящиеся к ускоряющимся течениям экспериментальные данные, приведенные в табличной форме в [8] (где можно найти также и точные ссылки на первоначальные публикации всех использующихся ниже экспериментальных работ; в данной статье будут указываться лишь номера, присвоенные в [8] соответствующим экспериментам). При этом оказалось, что все анализировавшиеся профили скорости, представленные в виде функций от \sqrt{y} , включают заметный прямолинейный участок, отвечающий как раз закону квадратного корня.

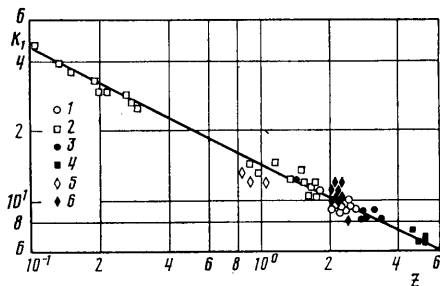
Для того чтобы подобрать эмпирическую формулу, аппроксимирующую зависимость $K_1(Z)$, желательнее попытаться сперва оценить значение этого коэффициента в (7) при $Z \gg 1$. Согласно теории размерности, это значение должно быть универсальной константой. Можно показать, что в случае очень сильных отрицательных градиентов давления K_1 должно быть весьма малым, так что $K_1 \rightarrow 0$ при $Z \rightarrow \infty$. Действительно, анализ уравнения баланса кинетической энергии турбулентности, так же как и многочисленные экспериментальные данные (см., например, [3]), показывают, что сильное ускорение потока прекращает порождение турбулентности, связанное с поперечным градиентом средней скорости, и приводит к реламинаризации течения. Эта реламинаризация должна начинаться во внешней части пограничного слоя и при возрастании Z приводит к постепенному уменьшению градиента скорости во внешней зоне; таким образом, в рассматриваемых условиях в ядре пограничного слоя $U(y) \rightarrow U_0$ (профиль скорости становится более заполненным), т. е. в формуле (8) $K_1(Z) \rightarrow 0$ и $K_3(Z) \rightarrow 0$ при $Z \rightarrow \infty$ (при этом одновременно также уменьшается и толщина пограничного слоя δ , но $\gamma\delta$ тем не менее возрастает). Закон трения (9) в условиях предельно сильного ускорения приобретает вид $U_0/\sqrt{\gamma\delta} \rightarrow 0$ при $Z \rightarrow \infty$, т. е. он только еще раз указывает на то, что при возрастании абсолютного значения градиента давления и фиксированном значении U_0 значение $\gamma\delta$ возрастает, хотя δ и уменьшается.

Заметим, что из соотношения $U_0/\sqrt{\gamma\delta} \rightarrow 0$ при $Z \rightarrow \infty$, кроме того, следует, что сильно ускоренные течения уже не могут рассматриваться как локально равновесные, так как необходимое условие такого равновесия ($U_0/\sqrt{\gamma\delta} \gg 1$) для них уже не выполняется. Таким образом, оказывается, что структура течения во внешней части реламинаризованных пограничных слоев существенным образом определяется «памятью течения» — разрушением сформировавшихся ранее турбулентных вихрей, и не может быть должным образом описана теориями, основанными на локальном приближении.

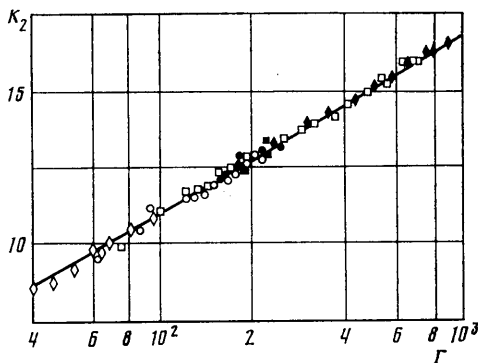
В случае умеренных градиентов давления, однако, закон квадратного корня в заметной части пограничного слоя оказывается справедливым. Значение K_1 при этом может быть определено по собранным в [8] экспериментальным данным: 1 — Людвиг и Тилмана (1300); 2 — Шубауэра и Клебанова (2100); 3, 4 — Херринга и Норбури (2700, 2800); 5 — Бела (3100); 6 — Бауэра (6300). Полученные результаты представлены на фиг. 1; они показывают, что в широком диапазоне изменения значений Z эмпирические значения $K_1(Z)$ могут быть неплохо аппроксимированы простым соотношением

$$K_1(Z) = 14,5Z^{-1/2} \quad (10)$$

Структура этой формулы, так же как и вид функции $K_2(S, Z)$, зависящей от перепада скоростей в пристенном слое (простирающемся от стенки до нижней границы применимости закона квадратного корня), могут быть



Фиг. 1



Фиг. 2

получены из простого условия гладкого (с точностью до первой производной) смыкания логарифмического закона (5) с формулой (7) в точке $y=y_1$

$$y_1/\delta \cong (2A/K_1)^2 Z^{-1} \quad (11)$$

$$K_2 \cong A \ln(4A^2 S/K_1^2) + B - 2A \quad (12)$$

Нижняя граница области применимости закона квадратного корня, по-видимому, располагается ненамного выше верхней границы логарифмического подслоя. Поэтому, опираясь на известные данные о расположении верхней границы логарифмического подслоя (см., например, [9]), можно в первом приближении принять, что $y_1/\delta \cong 0,15$. Тогда из (12) при $A=2,5$ следует формула (10) с коэффициентом пропорциональности, близким к 13, что не слишком сильно отличается от величины 14,5, при которой достигается наилучшее согласие с экспериментальными точками на фиг. 1.

Функцию $K_2(S, Z)$, следуя (12), будем искать в виде $K_2 = A \ln \Gamma + \text{const}$, где аргумент $\Gamma = 4A^2 S/K_1^2 = (5/14,5)^2 (\delta u_* / \nu)$ оказывается зависящим лишь от произведения SZ . Сравнение этой зависимости с имеющимися экспериментальными данными, собранными на фиг. 2, где использованы те же обозначения, что на фиг. 1, а под K_2 понимается среднее арифметическое значение разности $U(y)/u_* - K_1 \sqrt{\xi}$ во всех точках, попадающих в область применимости закона квадратного корня, показывает, что она хорошо согласуется с результатами измерений, если приписать аддитивной постоянной значение $-0,5$ (лежащее даже в пределах разброса экспериментальных значений $B-2A$)

$$K_2 = 2,5 \ln \Gamma - 0,5, \quad \Gamma = 0,126_+ \quad (13)$$

Перейдем к анализу формы закона дефекта, который для умеренных значений Z может быть представлен в форме

$$\frac{U_0 - U}{\nu \gamma \delta} = f_4(\eta, Z), \quad f_4(\eta, Z) \rightarrow f_5(\eta) \cong 0 \quad \text{при } Z \rightarrow \infty \quad (14)$$

При малых Z справедлива формула

$$f_4(\eta, Z) = Z^{-1/2} f_5(\eta) \quad (Z \ll 1) \quad (15)$$

влекущая за собой хорошо известное соотношение

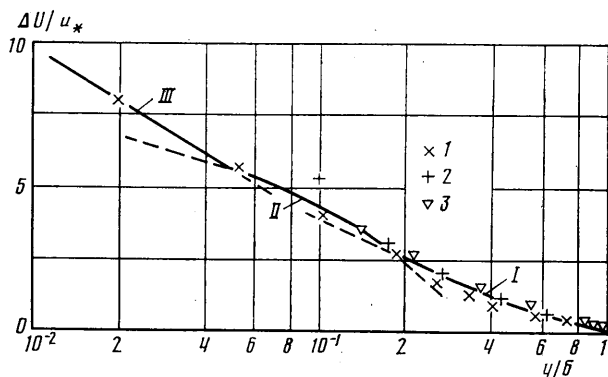
$$(U_0 - U)/u_* = f_5(\eta) \quad (Z=0) \quad (16)$$

справедливое для безградиентных течений. Функция $f_5(\eta)$, входящая в закон дефекта скорости (16), хорошо описывается простой формулой

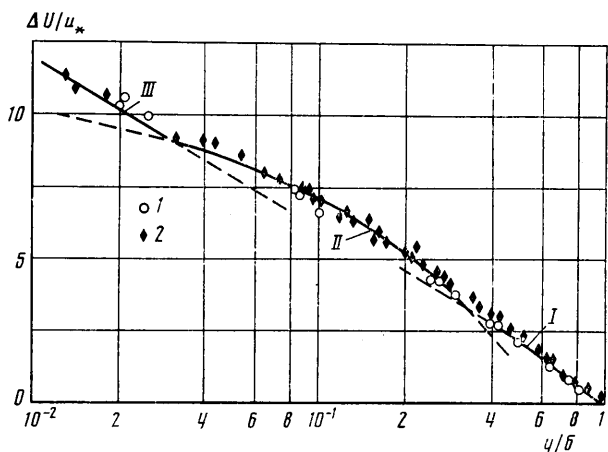
$$f_5(\eta) = -2,5 \ln \eta + 1,2w(\eta); \quad w(\eta) = 2 - 6\eta^2 + 4\eta^3 \quad (17)$$

где $w(\eta)$ — функция следа Коулса, аппроксимированная многочленом Мозеса.

Для определения вида универсальной функции $f_4(\eta, Z)$ в другом предельном случае больших Z необходимо использовать данные о распределении скорости во внешней зоне пограничного слоя, развивающегося в условиях сильного продольного градиента давления ($Z > 100$). Так как таких данных в [8] не содержится, то следует обратиться к результатам [10], полученным при течении воды в плоских конфузорах с различными углами конусности, при Z равном 1 — 850, 2 — 748 и 3 — 572. Законы дефекта могут



Фиг. 3



Фиг. 4

зависеть от типа течения; однако в рассматриваемом случае сильное ускорение потока приводит к существенному уточнению пограничного слоя и образованию значительной области потенциального течения, разделяющего пограничные слои на противоположных стенках канала. Таким образом, при условии, что δ снова определяется из условия $U(\delta) = 0,99U_0$, где U_0 — скорость на оси, закон дефекта скорости здесь не должен отличаться от соответствующего закона в случае ускоряющегося пограничного слоя.

Экспериментальные данные, собранные на фиг. 3, можно представить (I) в виде зависимости вида (16), но с функцией $f_5(\eta)$

$$f_5(\eta) = -2,5 \ln \eta - 0,85w(\eta) \quad (18)$$

вполне удовлетворительно описывающей распределение скорости в значительной части сильно ускоренного пограничного слоя ($10^{-1} \lesssim \eta \lesssim 1$) и отличающейся от случая безградиентного течения лишь множителем при функции следа $w(\eta)$. Это обстоятельство заметно облегчило проблему конструирования интерполяционной формулы для функции $Z^{1/2}f_4(\eta, Z)$, кото-

рую представим в виде

$$\frac{\Delta U}{u_*} = \frac{U_0 - U}{u_*} = -2,5 \ln \eta + \frac{6 - 0,85Z^{3/2}}{5 + Z^{3/2}} (2 - 6\eta^2 + 4\eta^3) \quad (19)$$

Правая часть (19), очевидно, переходит в (17) при $Z \rightarrow 0$ и в (18) при $Z \rightarrow \infty$. Для иллюстрации приемлемости этой формулы также и при промежуточных значениях Z приведем фиг. 4, на которой представлены экспериментальные данные: 1 — Людвига и Тилмана (1300) в воздухе и 2 — Бауэра (6300) в водяном потоке, относящиеся к фиксированному значению $Z \approx 2,2$ (точнее говоря, к $Z = 2,0 - 2,4$) — в этом случае закон (19) приобретает вид (I): $\Delta U/u_* = -2,5 \ln \eta + 0,41(2 - 6\eta^2 + 4\eta^3)$. Сравнение фиг. 3 и 4 показывает, что в соответствии с приведенными ранее соображениями область применимости закона квадратного корня, представленного (II) зависимостью $14,5(1 - \sqrt{\eta}) - 5,5$ на фиг. 3 и формулой $14,5(1 - \sqrt{\eta}) - 2,9$ на фиг. 4, с ростом Z сокращается. Ясно различимая на фиг. 4 эта область практически пропадает при значениях Z , соответствующих опытам [10]. Закон дефекта скорости (I) при этом непосредственно переходит в полупологарифмическую зависимость (5), также нанесенную (III) на фиг. 3 и 4. Отметим, кроме того, что при $Z \approx 3,7$ коэффициент при $w(\eta)$ в интерполяционной формуле (19) равен нулю, так что здесь $(U_0 - U)/u_* = -2,5 \ln \eta$. Такой закон дефекта характерен для турбулентного течения Куэтта, в случае которого $d\delta/dx = 0$; любопытно, что при $Z \approx 3,7$ также и $d\delta/dx \approx 0$ (ср. [11]).

Полученные результаты позволяют с неплохой точностью описать весь профиль скорости $U(y)$ в ускоряющихся турбулентных пограничных слоях с помощью трехслойной модели:

$$\frac{U(y)}{u_*} = \begin{cases} y_+ \exp \left[- \left(\frac{y_+}{10} \right)^3 \right] + [2,5 \ln(1 + y_+) + 5,5] \exp \left[- \left(\frac{10}{y_+} \right)^3 \right] & (0 \leq y_+ \leq y_1 u_* / v) \\ K_1 \sqrt{\xi} + K_2 & (y_1 \gamma / u_*^2 \leq \xi \leq y_2 \gamma / u_*^2) \\ \frac{U_0}{u_*} + 2,5 \ln \eta - \frac{6 - 0,85Z^{3/2}}{5 + Z^{3/2}} (2 - 6\eta^2 + 4\eta^3) & (y_2 / \delta \leq \eta \leq 1) \end{cases} \quad (20)$$

Здесь K_1 и K_2 определяются соотношениями (10), (13), а y_1 и y_2 являются ординатами точек пересечения законов, фигурирующих в первой и второй или же второй и третьей строках правой части (20). В случае, если y_1 или y_2 не существует, либо $y_1 > y_2$, то определяется ордината $y_{1,2}$ пересечения пристенного закона и закона дефекта и профиль скорости аппроксимируется только этими двумя формулами.

Сравнение полученных соотношений с экспериментальными данными показало, что наблюдающиеся отклонения не превышали 3–5% и в среднем составляли около 1%, т. е. находились в пределах точности эксперимента.

Общий закон трения ускоряющегося потока о гладкую стенку дается формулой (9), где функция $K_2(S, Z)$ определяется соотношением (13), а $K_3(Z) = (U_0/u_* - K_2)/\sqrt{Z}$, так что эту функцию можно рассчитать по имеющимся экспериментальным данным.

Выше уже отмечалось, что $K_3(Z)$ должно стремиться к нулю при $Z \rightarrow \infty$.

Для существования конечного предела $\lim_{Z \rightarrow \infty} \sqrt{Z} K_3(Z)$ необходимо выпол-

нение соотношения $K_3(Z) \sim Z^{-1/2}$ при $Z \rightarrow \infty$. Коэффициент пропорциональности в этом соотношении может быть определен по экспериментальным

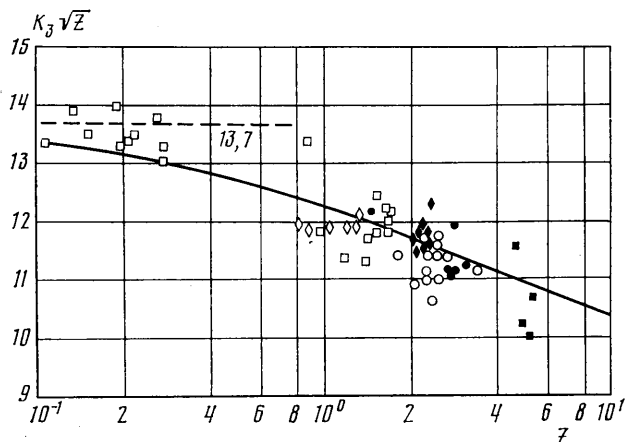
данным [10] и оказывается равным 9,5. Таким образом, $\sqrt{Z}K_3(Z) \rightarrow 9,5$ при $Z \rightarrow \infty$. Так как при этом $K_2 = 2,5 \ln \delta_+ - 5,8$, то универсальный закон трения приобретает вид

$$U_0/u_* = 2,5 \ln \delta_+ + 3,7 \quad (Z \rightarrow \infty) \quad (21)$$

В другом предельном случае безградиентного течения [9]

$$U_0/u_* = 2,5 \ln \delta_+ + B_1 \quad (Z=0), \quad (22)$$

где $B_1 \cong 7,9$ и поэтому $\sqrt{Z}K_3(Z) \cong 13,7$ при $Z \ll 1$.



Фиг. 5

В интервале промежуточных значений Z искомая функция может быть аппроксимирована простым соотношением

$$\sqrt{Z}K_3(Z) = 9,5 + 4,5 \exp(-0,5\sqrt{Z}) \quad (23)$$

которое сравнивается с экспериментальными данными на фиг. 5 (обозначения — те же, что на фиг. 1).

Получаемый таким образом общий закон трения турбулентного потока, развивающегося в условиях отрицательного градиента давления о гладкую стенку, приобретает вид

$$U_0/u_* = 2,5 \ln \delta_+ + 3,7 + 4,5 \exp(-0,5\sqrt{Z}) \quad (24)$$

Этот закон хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Отметим в заключение, что использование общего соотношения для расчета функции $\delta(x)$ в условиях градиентного течения, полученного в работе [11], позволяет построить замкнутую систему расчета трения и профилей скорости в ускоряющемся течении на пластине с заданным значением функции $U_0(x)$. Эта расчетная схема, требующая для своего осуществления использование метода последовательных приближений, неплохо согласуется с опытными результатами.

Автор благодарит А. М. Яглома за внимание к работе и полезные советы при ее выполнении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kader B. A., Yaglom A. M. Similarity treatment of moving-equilibrium turbulent boundary layers in adverse pressure gradients.— J. Fluid Mech., 1978, v. 89, № 2, p. 305–342.
2. Кадер Б. А., Яглом А. М. Профили средней скорости и закон сопротивления в турбулентных пограничных слоях с тормозящим градиентом давления.— В кн.: Механика турбулентных потоков. М.: 1980, с. 188–206.

3. *Narasimha R., Sreenivasan K. R.* Relaminarization of fluid flows.— *Adv. Appl. Mech.*, N. Y.: 1979, v. 19, p. 221–309.
4. *Schraub F. A.* A study of the structure of the turbulent boundary layers with and without longitudinal pressure gradients: Doct. diss. Stanford. Univ., 1965. 178 p.
5. *Patel V. C., Head M. R.* Reversion of turbulent to laminar flow.— *J. Fluid Mech.*, 1968, v. 34, № 2, p. 371–392.
6. *Narayanan M. A. B., Ramjee V.* On the criteria for reverse transition in a two-dimensional boundary layer flow.— *J. Fluid Mech.*, 1969, v. 35, № 2, p. 225–241.
7. *Ludwig H., Tillmann W.* Untersuchungen über die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten.— *Ing.-Arch.*, 1949, B. 17, № 4, S. 288–299.
8. Computation of turbulent boundary layers. Proc. AFOSR – IFP – Stanford Conf. Stanford, 1968, Stanford, 1969. 519 p.
9. *Кадер Б. А., Яглом А. М.* Законы подобия для пристенных турбулентных течений.— В кн.: Итоги науки и техники. ВИНТИ. Сер. Механика жидкости и газа. Т. 15. М.: 1980, с. 81–155.
10. *Nikuradse J.* Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen. В.: VDI – Forschungsheft, 1929, № 289. 49 S.
11. *Кадер Б. А.* Изменение толщины несжимаемого турбулентного пограничного слоя при наличии продольного градиента давления.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1979, № 2, с. 150–156.

Москва

Поступила в редакцию
4.1.1982