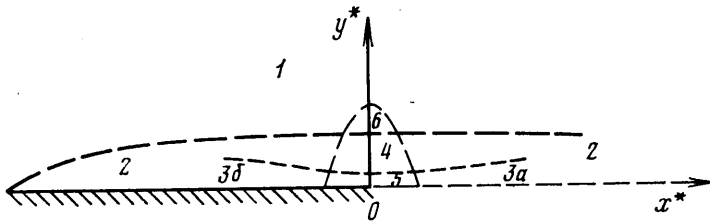


УДК 532.517

ТЕЧЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ЗАДНЕЙ КРОМКИ ПЛАСТИНЫ, ОБТЕКАЕМОЙ ТРАНСЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОГО ГАЗА

КОРОЛЕВ Г. Л.

Классическим примером течения, которое не может быть полностью описано в рамках теории пограничного слоя, является течение в окрестности задней кромки тонкого профиля. Для пластины эта теория дает решение Блазиуса [1]. Однако чтобы удовлетворить условию нулевого трения в следе, необходимо ввести вдоль оси следа тонкий подслой [2]. Вертикальная составляющая скорости, индуцируемая этим подслоем, имеет особенность при стремлении к задней кромке. Поэтому в следующем приближении по числу Рейнольдса она вызывает во внешнем невязком потоке отрицательный градиент давления, который ведет себя также особым образом. Ясно поэтому, что решение, построенное на основе уравнений Прандтля, не является равномерно пригодным около задней кромки.



Фиг. 1

Течение около задней кромки плоской пластины исторически явилось первым течением несжимаемой жидкости, для которого соображения о свободном взаимодействии привели к построению рациональной асимптотической теории. С помощью анализа особенности в решении для вязкого слоя и его воздействия на внешний невязкий поток было показано в [3] и независимо в [4], что около задней кромки плоской пластины лежит область свободного взаимодействия, которая характеризуется взаимной зависимостью внешнего невязкого потока и внутреннего вязкого подслоя. Численное решение задачи для этого случая позднее было получено в [5].

Аналогичная структура течения имеет место в окрестности задней кромки пластины при сверхзвуковом обтекании [6]. Численное решение сверхзвуковой задачи дано в [7].

Соответствующие порядки величин для области свободного взаимодействия при трансзвуковом обтекании были определены при изучении взаимодействия косога скачка уплотнения с пограничным слоем [8]. Взаимодействие турбулентного пограничного слоя с внешним невязким потоком в окрестности задней кромки профиля изучалось в [9].

Настоящая работа посвящена исследованию влияния числа Маха и вязкости на течение в окрестности задней кромки пластин. Число Маха предполагается величиной $M_\infty^2 - 1 = O(R^{-1/3})$, что соответствует режиму трансзвукового взаимодействия. Показано, что если число Маха такое, что $|M_\infty^2 - 1| > O(R^{-1/3})$, то задача в области свободного взаимодействия при соответствующем преобразовании величин сводится к ранее известным решениям для несжимаемой жидкости [5] и сверхзвукового течения [7].

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание тонкой пластины трансзвуковым потоком вязкого газа при нулевом угле атаки (фиг. 1). Компоненты вектора скорости U^* , V^* направлены соответственно вдоль осей

x^* , y^* . Характерный продольный размер пластины обозначим через l . Далее введем следующие обозначения: p^* — давление, ρ^* — плотность, μ^* — первый коэффициент вязкости, M — число Маха, индекс ∞ обозначает значения газодинамических величин в однородном набегающем потоке. Будем предполагать, что течение ламинарное и коэффициент вязкости μ линейно зависит от температуры $\mu^* = \mu_\infty CT^*/T_\infty$.

Пусть $\varepsilon^2 = \mu_\infty / \rho_\infty U_\infty l = R^{-1} \rightarrow 0$. Тогда давление в первом приближении постоянно и для пограничного слоя на пластине справедливо решение Блазиуса [1]. С другой стороны, чтобы удовлетворить условию симметрии вдоль оси следа (условие отсутствия трения), вводим в пограничном слое за задней кромкой пластины течения вязкий подслой [2]

$$\begin{aligned} x^* &= lx, & y^* &= l\varepsilon Y, & U^* &= U_\infty U_{20} + \dots \\ V^* &= U_\infty \varepsilon V_{20} + \dots, & p^* &= p_\infty + \dots, & \rho^* &= \rho_\infty \rho_{20} + \dots \\ \mu^* &= \mu_\infty \mu_{20} + \dots \end{aligned}$$

Так как пограничный слой на пластине подходит к задней кромке с ненулевым значением трения

$$\left. \frac{\partial U_{20}}{\partial Y} \right|_{Y=0} = a_0 + \dots, \quad x \rightarrow -0$$

то в этом вязком подслое (зона $3a$)

$$\begin{aligned} U_{20} &\sim Y, & \frac{U_{20}^2}{x} &\sim \frac{U_{20}}{Y^2} \\ U_{20} &= x^{1/3} f_0'(Yx^{-1/3}), & V_{20} &= x^{-1/3} (1/3 Yx^{-1/3} f_0' - 2/3 f_0) \\ \frac{C}{\rho_w^2} f_0''' + \frac{2}{3} f_0 f_0'' - \frac{1}{3} f_0'^2 &= 0, & f_0(0) &= f_0''(0) = 0 \\ f_0'(\eta) &= a_0 \eta + \dots, & \eta &= Yx^{-1/3}, \quad \eta \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Поведение решения уравнения при $\eta \rightarrow +\infty$ [2] показывает, что подслой индуцирует в основном пограничном слое вертикальную составляющую скорости, имеющую особенность при $x \rightarrow +0$

$$V_{20} = -\frac{0,892}{3} a_0^{2/3} \rho_w^{-2/3} C^{1/3} x^{-2/3} Y + \dots, \quad Y \rightarrow 0 \quad (1.1)$$

Поэтому в основном пограничном слое при $x \rightarrow 0$ разложение для U_{20} и V_{20} имеет вид

$$U_{20} = U_{200}(Y) + \dots, \quad V_{20} = x^{-2/3} V_{200}(Y) + \dots, \quad \rho_{20} = \rho_{200}(Y) + \dots$$

Подстановка в уравнения пограничного слоя дает

$$U'_{200}/U_{200} = V'_{200}/V_{200} \quad (1.2)$$

Используя краевое условие (1.1) для решения уравнения (1.2), получим, что тонкий вязкий подслой $3a$ индуцирует на внешнюю границу пограничного слоя вертикальную составляющую вектора скорости

$$V^* = -U_\infty \varepsilon \frac{0,892}{3} a_0^{-1/3} C^{1/3} \rho_w^{-2/3} x^{-2/3} + \dots, \quad Y \rightarrow +\infty \quad (1.3)$$

Здесь ρ_w представляют обезразмеренное значение плотности на пластине при $x \rightarrow 0$, взятое из решения Блазиуса.

Рассмотрим влияние вертикальной составляющей скорости, индуцируемой вязким подслоем, на распределение давления. Для этого введем об-

ласть (1) со следующими характерными размерами:

$$\begin{aligned} x^* &= lx, & y^* &= l\beta^{-1/2}y_1, & \beta &= |M_\infty^2 - 1| \\ U^* &= U_\infty(1 + \varepsilon\beta^{-1/2}U_1 + \dots), & V^* &= U_\infty\varepsilon V_1 + \dots \\ p^* &= p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2 \varepsilon\beta^{-1/2}p_1 + \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

Результат подстановки формул (1.4) в систему уравнений Навье — Стокса и совершение предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0$ при условии, что $\beta(\varepsilon) \gg \varepsilon^{3/2}$, дает уравнения

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} \pm \frac{\partial V_1}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial y_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

Срачивание с пограничным слоем определяет граничное условие для V_1

$$\begin{aligned} V_1(x, 0) &= c_1 x^{-2/3} + O(x^{-1/3}), & x &\rightarrow +0 \\ V_1(x, 0) &= O(1), & x &\rightarrow -0; & c_1 &= -\frac{0,892}{3} \rho_w^{-2/3} C^{1/3} a_0^{-1/3} \end{aligned}$$

Знак плюс в уравнении (1.5) перед $\partial V_1 / \partial y_1$ соответствует $M_\infty < 1$, минус — $M_\infty > 1$.

Решение этих уравнений известно

$$\begin{aligned} p_1(x, 0) &= c_1 x^{-2/3} + \dots, & M_\infty &> 1, & x &\rightarrow +0 \\ p_1(x, 0) &= -\frac{c_1}{\sqrt{3}} x^{-2/3} + \dots, & M_\infty &< 1; & x &\rightarrow +0 \end{aligned}$$

Влияние этого сингулярного члена в давлении на пограничный слой показывает, что разложение для продольной составляющей скорости в этой области имеет следующий вид:

$$U^* = U_\infty(U_{20} + \varepsilon\beta^{-1/2}U_{21} + \dots) \quad (U_{20} \gg \varepsilon\beta^{-1/2}U_{21}) \quad (1.6)$$

Однако в окрестности задней кромки в подслое $3a$, где основное значение продольной составляющей вектора скорости определяется решением Гольдштейна $U_{20} = x^{1/2}f_0'(Yx^{-1/2})$, для U_{21} получаем следующую оценку:

$$\frac{U_{20}U_{21}}{x} \sim \frac{p_1}{x} \sim \frac{U_{21}}{Y^2}, \quad U_{21} = x^{-1}f_1(Yx^{-1/2}) \quad (1.7)$$

2. Область свободного взаимодействия. Оценка (1.7) показывает, что разложение (1.6) становится неравномерно пригодным, когда $x^{1/2} \sim \varepsilon\beta^{-1/2}x^{-1}$. Это означает, что в окрестности точки O с продольным размером $x \sim \varepsilon^{3/4}\beta^{-3/8}$ расположена область свободного взаимодействия, в которой пограничный слой и внешний потенциальный поток взаимно обусловлены.

Начнем анализ с зоны 4 , которая охватывает большую часть пограничного слоя в области свободного взаимодействия

$$x^* = l\varepsilon^{3/4}\beta^{-3/8}X, \quad y^* = l\varepsilon Y \quad (2.1)$$

Из условия срачивания с зоной 3 следует, что разложение искомых функций в асимптотические ряды в этой области имеет такой вид

$$\begin{aligned} U^* &= U_\infty(U_{40} + \varepsilon^{1/4}\beta^{-1/8}U_{41} + \dots), & V^* &= U_\infty\varepsilon^{1/2}\beta^{3/8}V_{40} + \dots \\ p^* &= p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2 \varepsilon^{1/2}\beta^{-1/8}p_{41} + \dots, & \rho^* &= \rho_\infty(\rho_{40} + \varepsilon^{1/4}\beta^{3/8}\rho_{41} + \dots) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставляя формулы (2.1) и (2.2) в систему уравнений Навье — Стокса, получим

$$U_{40} = U_{40}(Y), \quad \rho_{40} = \rho_{40}(Y), \quad p_{41} = p_{41}(X), \quad V_{41} = -A'(X)U_{40}$$

$$U_{41} = A(X)\frac{\partial U_{40}}{\partial Y}, \quad \rho_{41} = A(X)\frac{\partial \rho_{40}}{\partial Y}$$

где $A(X)$ — некоторая, пока неизвестная функция.

Сращивание U_{40} и ρ_{40} с основным пограничным слоем дает

$$U_{40} = U_{200}(Y), \quad \rho_{40} = \rho_{200}(Y)$$

Таким образом, основная часть пограничного слоя здесь играет пассивную роль. Давление и наклон линий тока поперек этого слоя с точностью до малых более высокого порядка передаются без изменения.

Рассмотрим теперь вязкую пристеночную зону 5 области свободного взаимодействия, в которую приходит при $x \sim \varepsilon^{3/4} \beta^{-3/8}$ подзона 3a. Здесь следует положить

$$\begin{aligned} x^* &= l \varepsilon^{3/4} \beta^{-3/8} X, & y^* &= l \varepsilon^{3/4} \beta^{-1/8} y_5 \\ U^* &= U_\infty \varepsilon^{1/4} \beta^{-1/8} U_5 + \dots, & V^* &= U_\infty \varepsilon^{3/4} \beta^{1/8} V_5 + \dots \\ p^* &= p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2 \varepsilon^{1/2} \beta^{-1/4} p_5 + \dots, & \rho^* &= \rho_\infty \rho_5 + \dots, \quad \mu^* = \mu_\infty \mu_5 \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнения Навье – Стокса, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_5}{\partial X} + \frac{\partial V_5}{\partial y_5} &= 0 \\ \rho_w \left(U_5 \frac{\partial U_5}{\partial X} + V_5 \frac{\partial U_5}{\partial y_5} \right) &= - \frac{\partial p_5}{\partial X} + \frac{C}{\rho_w} \frac{\partial^2 U_5}{\partial y_5^2} \\ \frac{\partial p_5}{\partial y_5} &= 0; \quad \rho_5 = \rho_w = \rho_{200}(0); \quad \mu_5 = \frac{C}{\rho_w} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Сращивание решения в зоне 5 с решениями в зоне 4 и подзоне 3a позволяет получить краевые условия, необходимые для интегрирования системы (2.3)

$$\begin{aligned} U_5 &= a_0 y_5 + \dots, \quad X \rightarrow -\infty; \quad U_5 = a_0 y_5 + A(X) + \dots, \quad y_5 \rightarrow +\infty \\ U_5 &= X^{1/2} f_0'(y_5 X^{-1/2}) + \dots, \quad X \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$U_5(X, 0) = 0, \quad X \leq 0, \quad \left. \frac{\partial U_5}{\partial y_5} \right|_{y_5=0} = 0, \quad X > 0$$

Для замыкания системы соотношений, описывающих область свободного взаимодействия, необходимо еще рассмотреть внешний потенциальный поток (зона 6), где, согласно условию сращивания с зоной 1, решение следует искать в виде

$$\begin{aligned} x^* &= l \varepsilon^{3/4} \beta^{-3/8} X, & y^* &= l \varepsilon^{3/4} \beta^{-1/8} y_6 \\ U^* &= U_\infty (1 - \varepsilon^{1/2} \beta^{-1/4} U_6 + \dots), & V^* &= U_\infty \varepsilon^{1/2} \beta^{1/4} V_6 + \dots \\ p^* &= p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2 \varepsilon^{1/2} \beta^{-1/4} p_6 + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

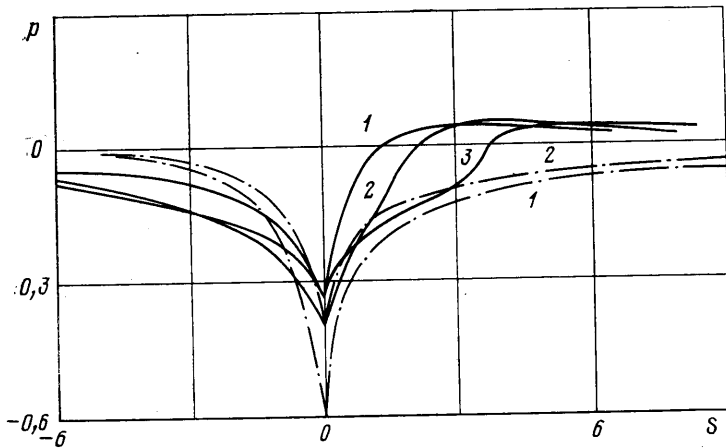
В результате подстановки (2.6) в уравнения Навье – Стокса получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_6}{\partial X} [\alpha U_6 \pm 1] + \frac{\partial V_6}{\partial y_6} &= 0 \\ \frac{\partial U_6}{\partial y_6} &= \frac{\partial V_6}{\partial X} \\ p_6 &= -U_6, \quad \alpha = (\gamma + 1) \varepsilon^{1/2} \beta^{-3/4} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Сращивание с зонами 4 и 5 дает

$$p_6(X, 0) = p_5(X), \quad V_6(X, 0) = -A'(X)$$

Из выражения для α видно, что если $\beta \gg \varepsilon^{3/4}$, то нелинейный член в уравнении (2.6) пропадает и постановку задачи в области свободного взаимодействия после некоторого аффинного преобразования можно свести к ранее



Фиг. 2

известным задачам для несжимаемой жидкости [5] или сверхзвукового течения [7].

Рассмотрим случай, когда $\beta \sim \epsilon^{2/3}$. Тогда величина α порядка единицы и представляет собой свободный параметр задачи.

Совершим групповое преобразование

$$X = a_0^{-5/4} \rho_w^{-1/4} C^{-1/4} S, \quad y = a_0^{-3/4} \rho_w^{-3/4} C^{1/4} y, \quad y_6 = a_0^{-5/4} \rho_w^{-1/4} C^{-1/4} \eta$$

$$U_5 = a_0^{1/4} \rho_w^{-3/4} C^{1/4} U, \quad U_6 = a_0^{1/2} \rho_w^{-1/2} C^{1/2} u$$

$$V_5 = a_0^{3/4} \rho_w^{-5/4} C^{3/4} V$$

$$V_6 = a_0^{1/2} \rho_w^{-1/2} C^{1/2} v, \quad p_6 = a_0^{1/2} \rho_w^{-1/2} C^{1/2} p$$

В новых переменных система уравнений (2.3) – (2.6) примет вид

$$U \frac{\partial U}{\partial S} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{\partial p(S, 0)}{\partial S} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial U}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$U = y + \dots, \quad S \rightarrow -\infty, \quad y \rightarrow +\infty; \quad U(S, 0) = 0, \quad S \leq 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(S, 0) = 0, \quad S > 0$$

Распределение давления заранее неизвестно, оно определяется при совместном решении уравнений вязкого подслоя (2.7) с нелинейными трансзвуковыми уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial S} (\alpha^* u \pm 1) + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial S}, \quad p = -u \quad (2.8)$$

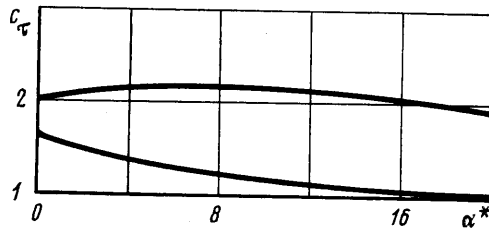
$$v(S, 0) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{V}{U}, \quad \alpha^* = (\gamma + 1) \epsilon^{1/3} C^{1/3} a_0^{-1/3} \rho_w^{-1/3} \beta^{-5/4}$$

Знак плюс перед единицей в уравнении (2.8) соответствует течению, когда число Маха на бесконечности меньше единицы, минус – больше единицы.

Входящая в (2.8) величина α^* является критерием подобия рассматриваемого сечения.

3. Результаты расчета. Для решения нелинейной системы уравнений (2.7) – (2.8) использовался численный метод работ [10–11]. На фиг. 2

представлено распределение давлений вдоль оси симметрии пластины в области свободного взаимодействия. Кривые 1–3 соответствуют числу α^* , равному соответственно 0, 10, 20. Сплошные кривые соответствуют $M_\infty < 1$, штрихпунктирные — $M_\infty > 1$. Видно, что с увеличением α^* ($M_\infty < 1$) ускоряющий эффект задней кромки увеличивается. С появлением сверхзвукового течения он ослабляется. Переход от дозвукового течения к сверхзвуковому впервые происходит при $\alpha^* = 2,8$. Для случая $\alpha^* = 0$ разница в расчете настоящей работы с представленными ранее для несжимаемой жидкости [5] и сверхзвукового течения [7] не превышает 6%.



Фиг. 3

Ускорение потока в окрестности задней кромки пластины приводит к увеличению общего сопротивления. В этом случае сопротивление пластины c_d определяется формулой

$$c_d = \frac{1}{\rho_\infty U_\infty^2 l} \int_{-l}^0 \mu_w^* \frac{\partial U^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0} dx^* = \varepsilon c_B + \varepsilon^{7/4} \beta^{-3/8} a_0^{-1/4} C^{3/4} \rho_w^{-5/4} c_\tau + \dots$$

где c_B определяется из решения Блазиуса. Второй член представляет добавочное сопротивление, определяемое областью свободного взаимодействия. График зависимости коэффициента c_τ от числа Маха дан на фиг. 3. Верхняя кривая соответствует случаю $M_\infty < 1$, нижняя — $M_\infty > 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Blasius H. H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung.— Z. Math. Phys., 1908, В. 56, S. 1–37.
2. Goldstein S. Concerning some solutions of the boundary-layer equations in hydrodynamics.— Proc. Cambridge Phil. Soc., 1930, v. 26, p. 1–30.
3. Stewartson K. On the flow near trailing edge of a flat plate. 2.— Mathematica, 1969, v. 16, № 1, p. 106–121.
4. Messiter A. F. Boundary-layer flow near the trailing edge of a flat plate.— SIAM J. Appl. Math., 1970, v. 18, № 1, p. 241–257.
5. Jobe C. E., Burggraf O. R. The numerical solution of asymptotic equations of trailing edge flow.— Proc. Roy. Soc. Lond. A, 1974, v. 340, № 1620, p. 91–111.
6. Stewartson K. On laminar boundary layers near corners.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1970, v. 23, № 2, p. 137–152.
7. Daniels P. G. Numerical and asymptotic solutions for the supersonic flow near the trailing edge of a flat plate at incidence.— J. Fluid Mech., 1974, v. 63, № 4, p. 641–656.
8. Messiter A. F., Feo A., Melnic R. E. Shock-wave strength for separation of a laminar boundary layer at transonic speeds.— AIAA Journal, 1971, v. 9, № 6, p. 1197–1198.
9. Melnic R. E., Chow R., Mead H. R. Theory of viscous transonic flow over airfoils at high Reynolds number.— AIAA Pap., 1977, № 680, 21 p.
10. Королев Г. Л. Численное решение асимптотической задачи об отрыве ламинарного пограничного слоя от гладкой поверхности.— Уч. зап. ЦАГИ, 1980, т. 11, № 2, с. 27–36.
11. Ballhaus W. F., Goorjian P. M. Implicit Finite — Difference Computations of unsteady Transonic Flows about Airfoils.— AIAA Journal, v. 15, № 12, 1977, p. 1728–1735.

Москва

Поступила в редакцию
9.IX.1981