

УДК 532.51:532.61

**СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНОВЫЕ РЕЖИМЫ В СТЕКАЮЩЕЙ
ПЛЕНКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**

СЕМЕНОВА И. П., ЯКУБЕНКО А. Е.

Изучаются стационарные волновые решения нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка [1], описывающего поведение волновой границы тонкой пленки вязкой жидкости, стекающей по вертикальной стенке. Показано, что для длинных волн малой амплитуды общее уравнение приводится к виду [2], содержащему единственный безразмерный параметр. Проведено качественное исследование поведения интегральных кривых и типов особых точек в фазовом пространстве. Показано, что уединенная волна существует при дискретных значениях безразмерного параметра. Найдено численное решение. Качественно исследована структура скачка толщины пленки. Получены численные решения немонотонной структуры при различных параметрах.

1. Рассмотрение ведется на основе системы уравнений, полученной методом интегральных соотношений из уравнений, описывающих движение тонкого слоя вязкой жидкости со свободной границей по вертикальной стенке с использованием предположения о параболическом профиле скорости и постоянстве давления поперек слоя и учетом сил поверхностного натяжения. Система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) = h \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2} \right] + gh - 3 \frac{\nu q}{h^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad q = \int_0^h u \, dy$$

Здесь h — толщина пленки, σ — коэффициент поверхностного натяжения, g — ускорение силы тяжести, ν — кинематическая вязкость.

Будем искать решение системы уравнений (1.1), описывающее распространение стационарных волн, бегущих по поверхности жидкости со скоростью c , не зависящей от x и t . Введем новую переменную $\xi = x - ct$. Из второго уравнения (1.1) имеем интеграл

$$q - ch = q_0 \quad (1.2)$$

Первое уравнение (1.1) с использованием (1.2) представим в виде

$$\frac{\sigma}{\rho} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{d^2 h}{d\xi^2} \left(1 + \left(\frac{dh}{d\xi} \right)^2 \right)^{-3/2} \right] + \frac{q_0^2 - c^2 h^2}{5h^3} \frac{dh}{d\xi} + \frac{gh^3 - 3\nu(q_0 + ch)}{h^3} = 0 \quad (1.3)$$

Ищется решение уравнения (1.3) типа уединенной волны, т. е. такое, что $h \rightarrow \text{const}$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Уравнение (1.3) при $\xi \rightarrow \pm\infty$ определяет «стационарные» решения исходного уравнения

$$gh^3 - 3\nu ch - 3\nu q_0 = 0 \quad (1.4)$$

Здесь предполагается, что $c > 0$. При $q_0 > 0$ и $c > 0$ уравнение (1.4) имеет только один действительный положительный корень. При $q_0 < 0$ есть либо два действительных положительных корня, либо ни одного. Рассмотрим случай $q_0 < 0$.

Введя безразмерные переменные и параметры, представим (1.1) в виде

$$H = \frac{h}{h_1}, \quad \xi = \frac{\xi}{h_1}, \quad z = \frac{v}{u_1}, \quad \text{Re} = \frac{3u_1 h_1}{v}, \quad W = \frac{9\gamma}{\sqrt[3]{\text{Re}^5}}$$

$$\gamma = \frac{\sigma}{\rho} \frac{1}{\sqrt[3]{v^4 g}}, \quad \omega(z) = 5z^2 - 12z + 6$$

$$[H''(1+(H')^2)^{-3/2}]' + \frac{\omega(z) - z^2(H^2 - 1)}{5WH^3} H' + \frac{9[H^3 - 1 - z(H-1)]}{\text{Re}WH^3} = 0 \quad (1.5)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по ξ_1 . Сделаем преобразование координат $\zeta = \alpha \xi_1$. Выберем α так, чтобы $\alpha^3 \text{Re} W = 9$ и пренебрежем в дальнейшем величиной $\alpha^2 H'^2$. Имеем

$$H''' + \Delta H^{-3} [\omega(z) - z^2(H^2 - 1)] H' + [H^3 - 1 - z(H-1)] H^{-3} = 0$$

$$\Delta = \frac{1}{5\alpha^2 W} \quad (1.6)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка, содержащее два безразмерных параметра Δ и z . Решениями, которые при $\zeta \rightarrow \pm\infty$ принимают постоянные значения, являются решения уравнения (1.4), записанного в безразмерном виде $H_1 = 1$, $H_2 = -0,5 + [0,25 + (z-1)]^{1/2}$.

В работе [2] получено численное решение уравнения (1.6) при $z < 3$ и $\text{Re} \sim 20-50$.

2. Дальнейшее исследование вопроса о существовании стационарных уединенных волн на поверхности стекающей пленки вязкой жидкости проводится для случая малых чисел Рейнольдса. Сделаем в (1.5) замену переменных $H = 1 + \varepsilon U$, $\zeta_1 = \kappa \zeta$. Параметры ε , κ и λ определим соотношениями

$$\kappa = \left[\frac{|\omega(z)| \text{Re}^{3/2}}{45\gamma} \right]^{1/2}, \quad \varepsilon = \frac{2 \text{Re}^{1/6} |\omega(z)|^{1/2}}{3(45^3 \gamma)^{1/2}}$$

$$\lambda = \frac{z-3}{\text{Re}^{1/6}} \sqrt{\frac{45^3 \gamma}{|\omega(z)|^3}} \quad (2.1)$$

Числовые коэффициенты в соотношениях (2.1) выбраны так, чтобы при малых значениях ε получилось известное уравнение [3, 4].

После преобразований уравнение (1.5) примет вид

$$(1 + \varepsilon U)^3 U''' + [1 - \varepsilon \beta(z) U(2 + \varepsilon U)] U' - \left(\lambda - 2U - \frac{2}{3} \varepsilon U^2 \right) U = 0 \quad (2.2)$$

$$\beta(z) = z^2 / \omega(z)$$

Будем считать, что $\varepsilon \ll 1$. Из соотношения для λ следует, что если $z-3 \sim \varepsilon$, то λ принимает конечное значение. При $z \rightarrow 3$ величина $\omega^{1/2}(z)$, входящая в выражение для ε , конечна и, следовательно, малость ε соответствует малости числа Рейнольдса. Из выражения для κ следует, что при $z \rightarrow 3$ и малом числе Рейнольдса величина κ мала. Это означает, что при малых числах Рейнольдса уединенные волны, если они существуют, должны быть длинными волнами малой амплитуды, скорость которых близка к $z=3$ — скорости малых длинноволновых возмущений.

Если в (2.2) пренебречь членами порядка ϵ , то получится уравнение, совпадающее с уравнением, полученным асимптотическим методом разложения по малому параметру $1/\gamma$ [3, 4]

$$U''' + U' - \lambda U + 2U^2 = 0 \quad (2.3)$$

Решения, асимптотически стремящиеся к постоянным значениям при $\zeta_1 \rightarrow \pm\infty$, есть $U_1=0$, $U_2=0,5\lambda$.

3. Дадим качественное исследование дифференциального уравнения (2.3). Запишем его в виде системы уравнений первого порядка, взяв в качестве независимой переменной функцию U :

$$P \frac{dP}{dU} = Q, \quad P \frac{dQ}{dU} = -P + \lambda U - 2U^2, \quad U' = P, \quad P' = Q \quad (3.1)$$

Рассмотрение поведения интегральных кривых системы (3.1) будем проводить в фазовом пространстве U, P, Q . В этом пространстве стационарные точки системы имеют координаты $A(0, 0, 0)$ и $B(\lambda/2, 0, 0)$. Решение типа уединенной волны удовлетворяет асимптотическим граничным условиям $U \rightarrow 0$ при $\zeta_1 \rightarrow \pm\infty$. Это означает, что $P \rightarrow 0$ и $Q \rightarrow 0$ при $\zeta_1 \rightarrow \pm\infty$. Таким образом, интегральная кривая в фазовом пространстве, описывающая уединенную волну, должна представлять собой замкнутую кривую, которая выходит из точки A при $\zeta_1 \rightarrow -\infty$ и возвращается в эту же точку при $\zeta_1 \rightarrow +\infty$.

Линеаризация уравнения (2.3) (или более общего уравнения (1.6)) вблизи $U=0$ дает уравнение вида

$$U''' + U' - \lambda U = 0 \quad (3.2)$$

Характеристическое уравнение для (3.2) при $\lambda > 0$ (т. е. $z > 3$) имеет один положительный действительный корень $k_1 > 0$ и два комплексно-сопряженных, причем $\text{Re} k_{2,3} = -0,5k_1$. Решение должно гладко убывать при $\zeta_1 \rightarrow -\infty$ и убывать, колеблясь, при $\zeta_1 \rightarrow +\infty$. Поведение решения вблизи точки A в фазовом пространстве можно уточнить, если искать P и Q в виде

$$P = k_1 U + p_2 U^2 + p_3 U^3 + \dots, \quad Q = k_1^2 U + q_2 U^2 + q_3 U^3 + \dots \quad (3.3)$$

Соотношения (3.3) определяют поведение интегральной кривой, соответствующей уединенной волне в окрестности точки A при $\zeta_1 \rightarrow -\infty$.

Когда $\zeta_1 \rightarrow +\infty$, решение линейного уравнения есть

$$U = \exp(-0,5k_1(C_2 \cos \delta \zeta_1 + C_3 \sin \delta \zeta_1)), \quad \delta = \text{Im } k_{2,3}$$

В фазовом пространстве решение можно представить так

$$Q = aP + bU + cU^2 + dUP + eP^2 + \dots \quad (3.4)$$

Это двухпараметрическое семейство, которое представляет собой двумерную поверхность в пространстве U, P, Q , состоящую из множества кривых, наматывающихся на точку A , которая в данном случае (при $\zeta_1 \rightarrow +\infty$) есть фокус. Если единственная интегральная кривая (3.3), выходящая из точки A , попадает на поверхность (3.4), то кривая обязана прийти в точку A .

Если в соотношении (3.4) оставить только линейные члены, то нетрудно показать, что для колебательного решения вблизи точки $A(0, 0, 0)$ в фазовом пространстве имеется зависимость

$$Q = \frac{dP}{dU} = -k_1 P - (1 + k_1^2) U \quad (3.5)$$

Введем новую независимую переменную $\text{tg } \Phi = P/U = \Phi$, где Φ — полярный угол в плоскости P, U . Интегрирование (3.6) показывает, что точка $(0, 0)$ в плоскости P, U есть особая точка типа фокус. Решение имеет вид

$$U = \frac{\text{const}}{\sqrt{\Phi^2 + k_1 \Phi + 1 + k_1^2}} \exp \frac{k_1}{2} \text{Arctg} \frac{\Phi + 1/2 k_1}{\sqrt{1 + 3/4 k_1^2}}$$

Нетрудно видеть, что пересечение проекциями интегральных кривых на плоскости P, U линии $P=0$ происходит с вертикальной касательной, при этом $P dP/dU = Q = \text{const}$. Действительно, из (3.1) следует, что если $P=0$ ($U \neq 0, Q \neq 0$), то dP/dU и dQ/dU обращаются в бесконечность. Из условия $dP/dU \rightarrow \infty$ при $P \rightarrow 0$ имеем $dU/dP \rightarrow 0$ при $P \rightarrow 0$, следовательно, для U в окрестности оси U ($P=0$) справедливо представление $U = U_0 + P dU/dP \approx U_0$. Перейдем в уравнениях к независимой переменной P вместо U и положим $U = U_0$. Имеем

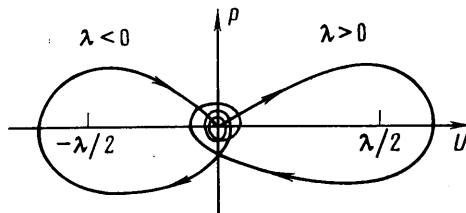
$$\frac{dU}{dP} = \frac{P}{Q}, \quad \frac{1}{2} \frac{dQ^2}{dP} = -P + (\lambda U_0 - 2U_0^2) \quad (3.6)$$

Интегрируя, получим

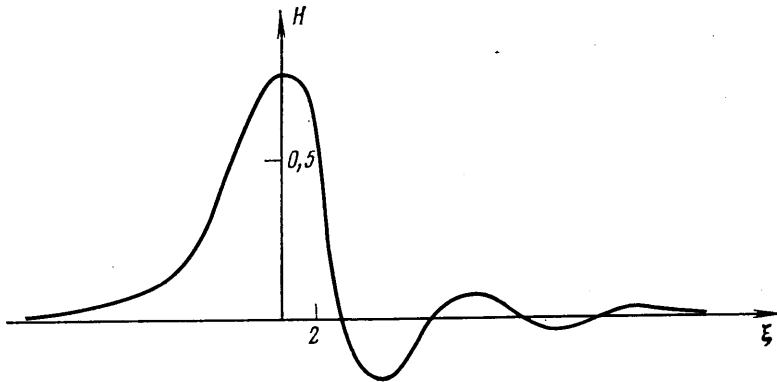
$$Q^2 = -P^2 + 2(\lambda U_0 - 2U_0^2)P + \text{const}$$

При $P \rightarrow 0$ получаем $Q = Q_0$. Из первого уравнения (3.6) следует, что $U = U_0 \pm 0,5P^2/Q_0$, т. е. при пересечении линии $P=0$ проекции интегральных кривых в плоскости P, Q ведут себя как параболы. Исключением являются особые точки $U=0$ и $U=0,5\lambda$, в которых наклон может быть конечным.

Качественную картину поведения решения, соответствующего уединенной волне, можно представить, если спроектировать пространственные интегральные кривые на плоскость U, P (фиг. 1). Параметром, характеризующим направление движения по этой кривой, является координата ξ_1 . Направление движения соответствует росту ξ_1 и изображено на кривой стрелками.



Фиг. 1



Фиг. 2

Отметим здесь, что уравнение (2.3) инвариантно при замене $\lambda \rightarrow -\lambda$, $U \rightarrow -U$, $\xi_1 \rightarrow -\xi_1$, т. е. проекция кривой на плоскость U, P симметрично отобразится при такой замене относительно линии $U=0$. Направление стрелок поменяется. Условимся, что значения $\lambda > 0$ соответствуют положительному солитону ($z > 3$), при $\lambda < 0$ имеем $z < 3$ — отрицательный солитон.

Численное решение найдено при $\lambda = 1,2161$ и представлено в физических координатах U, ξ_1 на фиг. 2. В работе [4] представлено численное решение для уединенной волны, найденное другим методом. Оно соответствует тому же значению λ в пределах точности вычислений.

Обсудим вопрос о том, при каких значениях параметра λ существует решение уравнения (2.3), описывающее уединенную волну.

Пусть $P = P(U, \lambda)$, $Q = Q(U, \lambda)$ — уравнение той интегральной кривой системы (3.1), которая в фазовом пространстве U, P, Q выходит из начала координат. Как было показано, эта выходящая из точки $(0, 0, 0)$ кривая единственна. Пусть уравнение поверхности Σ , содержащей все интегральные кривые, наматывающиеся на точку $(0, 0, 0)$, задано соотношением $F(U, P, Q, \lambda) = 0$. Если решение, описывающее уединенную волну, существует, то кривая $P = P(U, \lambda)$, $Q = Q(U, \lambda)$ должна принадлежать поверхности Σ . Это означает, что $F(U, P(U, \lambda), \lambda) = 0$ и в окрестности любой точки кривой, кроме особой, вектор касательной τ к кривой должен быть перпендикулярен вектору нормали к поверхности в этой точке, т. е. скалярное произведение $\text{grad } F \tau = 0$. Исключая U из этих двух соотношений, получаем для определения λ уравнение $\Phi_1(\lambda) = 0$.

В силу аналитической зависимости решения исходного дифференциального уравнения от параметра функция $\Phi_1(\lambda)$ будет аналитической и уравнение $\Phi_1(\lambda)=0$ должно иметь дискретное число корней. Как было показано выше, численные решения найдены для двух значений $\lambda=\pm 1,21$.

4. Нетрудно видеть, что у уравнения (1.6) есть два асимптотических решения, которые стремятся к различным постоянным значениям при $\xi_1 \rightarrow \pm\infty$. Этими решениями являются $H_1=1$ и $H_2>0$. Связь H_2 и z определяется алгебраическим соотношением

$$H^2+H-(z-1)=0 \quad (4.1)$$

Толщину слоя при $\xi \rightarrow +\infty$ примем за характерное значение, т. е. $H=H_1=1$. Введем величину скачка толщины стекающего слоя $\eta=H_2-1$. Тогда из (4.1) следует выражение для скорости скачка z через η

$$z=3+3\eta+\eta^2 \quad (4.2)$$

При $\eta>0$ ($H_2>1$) имеем $z>3$. Будем называть такие скачки положительными. Они могут возникать при увеличении расхода жидкости на входе.

Если расход на входе скачком уменьшается, то $H_2<1$. При этом поскольку $H_2>0$, имеем $\eta<0$, причем $|\eta|<1$. Для таких скачков скорость z , как следует из (4.2), меньше трех. Назовем такие скачки отрицательными. Скорость положительного скачка ограничена снизу значением $z=3$ при $\eta=0$, т. е. $H_1=H_2=1$.

Если отнести безразмерную скорость z скачка к скорости потока за скачком, то получим

$$z_2 = \frac{c}{u_2} = \frac{u_1}{u_2} \left[\left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \left(\frac{h_2}{h_1} \right) + 1 \right] = 1 + \left(\frac{h_1}{h_2} \right) + \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 \quad (4.3)$$

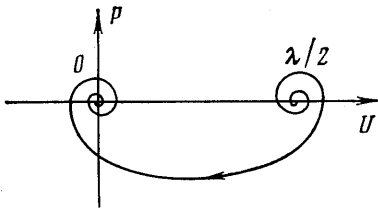
При этом была использована зависимость между средней скоростью и толщиной пленки при свободном стекании $u=gh^2/3\nu$.

Из (4.3) следует, что для положительных скачков, для которых $H_2=h_2/h_1>1$ и $z>3$, скорость z_2 по состоянию за скачком меньше трех. Для отрицательных ступенек $H_2=h_2/h_1<1$ и $z_2<3$ скорость волн z_2 относительно скорости жидкости за скачком больше трех.

Безразмерной скоростью малых возмущений при свободном стекании пленки жидкости по вертикальной стенке является значение $z=3$. Положительный скачок распространяется по невозмущенному состоянию (при $\xi \rightarrow +\infty$) со «сверхзвуковой» скоростью, по возмущенному состоянию — с «дозвуковой» скоростью. Таким образом, малые возмущения по обе стороны от поверхности разрыва приходят на эту поверхность. Возмущение скорости разрыва за счет этого взаимодействия можно определить из единственного закона сохранения, который выполняется на таком разрыве — сохранения величины $q_0=gh^3/3\nu-ch$. Положительный скачок, таким образом, удовлетворяет определению эволюционного разрыва.

Отрицательный скачок является «дозвуковым» по состоянию до скачка ($z<3$) и «сверхзвуковым» по состоянию после скачка ($z>3$). Малые возмущения уходят от поверхности разрыва. Поскольку на скачке есть только один закон сохранения q_0 , для определения амплитуд уходящих возмущений недостает граничных условий. Отрицательный скачок не эволюционен.

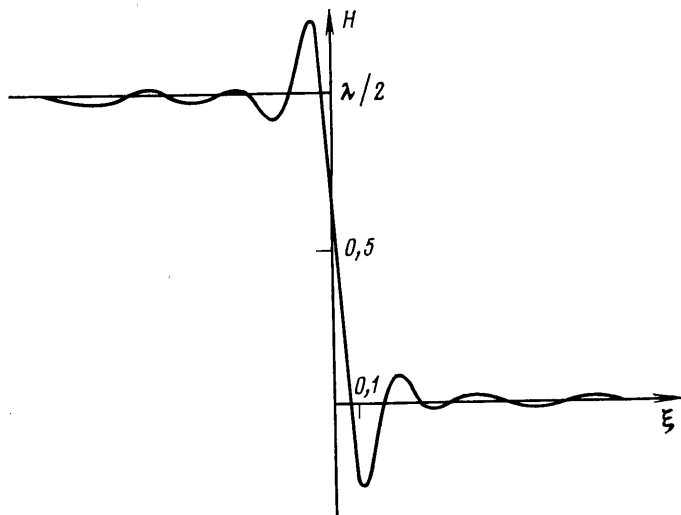
Введение в рассмотрение дифференциальных членов, т. е. решение полного уравнения (1.7) с граничными условиями $H \rightarrow 1$ при $\xi \rightarrow +\infty$, $H=H_2$ при $\xi \rightarrow -\infty$, причем H_2 определяется соотношением (4.1), сводится



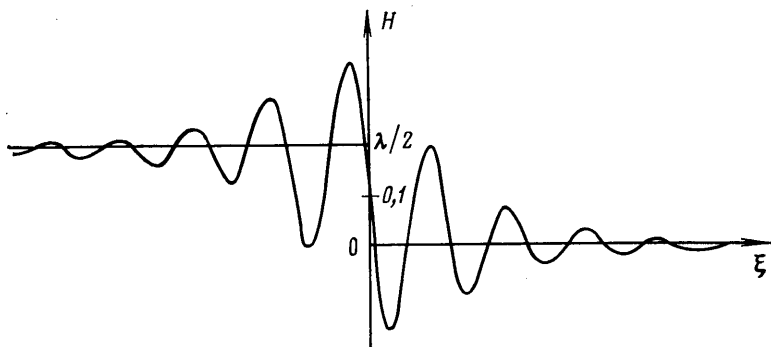
Фиг. 3

к задаче о нахождении структуры скачка, движущегося со скоростью z , зависящей от величины скачка η .

Асимптотическое поведение решения уравнения (1.6) при указанных граничных условиях было проведено выше в п. 3 для случая произвольных чисел Рейнольдса. В фазовом пространстве интегральная кривая, которая соответствует решению о структуре скачка толщины стекающей пленки жидкости, представляет собой линию пересечения двух поверхностей, уравнения которых в окрестности особых точек заданы соотношениями (3.3). На этих поверхностях все принадлежащие им интегральные кривые



Фиг. 4



Фиг. 5

накладываются на особые точки — фокусы. Линия пересечения этих поверхностей принадлежит каждой из них и обязана наматываться на обе особые точки. Качественное поведение проекции интегральной кривой на плоскость P, U представлено на фиг. 3. Стрелки показывают направление движения, соответствующее росту координаты ξ . В соответствии с выводами общей теории [5] эволюционный разрыв имеет единственную структуру.

В отличие от решения задачи об уединенной волне, которое существует, как было показано выше, при дискретных значениях безразмерной скорости волны λ решения типа ступеньки существуют при любых значениях λ . На фиг. 4, 5 представлено в физических координатах численное решение, полученное для случая малых чисел Рейнольдса при $\lambda=2,0$, $\lambda=0,327$. Величина λ , которая пропорциональна $z-3$, определяет в силу (4.1) интенсивность скачка η . При малых числах Рейнольдса, как было

показано, отклонение поверхности от невозмущенного уровня мало, поэтому величиной η^2 в (4.2) можно пренебречь. Имеем $z-3=3\eta$, т. е. скорость скачка пропорциональна его интенсивности.

В заключение авторы благодарят А. А. Бармина и С. А. Регирера за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 1, с. 43–59
2. Шкадов В. Я. Уединенные волны в слое вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 1, с. 63–66.
3. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 3, с. 28–34.
4. Цвелодуб О. Ю. Стационарные бегущие волны на пленке, стекающей по наклонной плоскости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 4, с. 142–146.
5. Бармин А. А., Куликовский А. Г. О разрывных решениях в механике сплошной среды.— В кн.: Некоторые вопросы механики сплошной среды. М.: 1978, с. 70–78.

Москва

Поступила в редакцию
26.I.1982.