

безразмерного параметра τ . Уменьшение подъемной силы свидетельствует о том, что с течением времени (t е. после прохождения цилиндром пути, равного 25–30 диаметрам цилиндра, от момента возникновения импульсного движения) при $Re = (0,6-1,3) \cdot 10^5$ за цилиндром перестает образовываться течение типа вихревых дорожек, а происходит турбулентное перемешивание потока в следе [5].

С целью определения влияния турбулентного потока на коэффициент сопротивления цилиндра при импульсном возникновении движения были проведены опыты с шероховатым цилиндром и с цилиндром, снабженным двумя турбулизующими проволоками. Отношение высоты элементов шероховатости к радиусу цилиндра r составляло $\varepsilon/r \approx 0,017$. Две турбулизующие проволоки ($d_n/r = 0,004$) располагались на гладком цилиндре на относительном расстоянии от передней критической точки $x/r \approx 1,4$ ($\theta = \pm 80^\circ$) по обе стороны. На шероховатом цилиндре, а также при наличии турбулизующей проволоки на цилиндре наблюдается более ранний отрыв пограничного слоя, чем в случае гладкой поверхности его.

На фиг. 5 приведены коэффициенты сопротивления гладкого цилиндра (кривая 1), шероховатого (кривая 2) и цилиндра с турбулизующей проволокой (кривая 3). Удлинение цилиндра равнялось $\lambda = 12$, число $Re = 0,95 \cdot 10^5$. В связи с турбулизацией потока уменьшается и максимальное значение коэффициента сопротивления после отрыва пограничного слоя по сравнению с его значением для гладкого цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwabe M. Pressure distribution in nonuniform two-dimensional flow.— NASA, TM, 1943, № 1039.
2. Sarpkaya T. Separated flow about lifting bodies and impulsive flow about cylinders.— AIAA Journal, 1966, v. 4, № 3, p. 414–420.
3. Щеглова М. Г., Огнев В. И. Результаты экспериментального исследования по формированию силы, действующей на цилиндр, при импульсивном и ускоренном движении.— Тр. ЦАГИ, 1971, вып. 1379. 23 с.
4. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 520 с.
5. Bienk H., Fuchs D., Liebers L. Über die Messung von Wirbelfrequenzen.— Luftfahrtforschung, 1936, v 12, S. 38–41.

Москва

Поступила в редакцию
11.V.1981

УДК 532.58

О ДВИЖЕНИИ ДВУХ ПУЛЬСИРУЮЩИХ ШАРОВ В ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

БУРОВ А. В.

Задача о взаимодействии двух пульсирующих шаров в идеальной несжимаемой жидкости впервые подробно исследована Бьеркнесом [1]. Однако в указанной и последующих работах на эту тему [2–5] изучались только силы взаимодействия между шарами, в то время как закон их движения не рассматривался из-за гораздо большей сложности последней задачи. Целью настоящей работы является нахождение приближенного аналитического решения задачи о движении двух пульсирующих шаров в идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей всю внешнюю по отношению к шарам область пространства, в предположении потенциального характера течения жидкости.

Система уравнений движения. Пусть два шара с массами m_k (здесь и далее $k = 1, 2$), радиусы которых a_k могут зависеть от времени t , движутся вдоль их линии центров, которую примем за ось координат, и обозначим через x_k координаты центров шаров, а через b — расстояние между центрами. Предположим, что шары могут совершать малые пульсации, причем во все время движения $a_k \ll b$ и внешние силы отсутствуют. Движение шаров будем приближенно описывать системой уравнений [6]

$$\frac{d}{dt} (L_1 \dot{x}_1 - M \dot{x}_2) + 6\pi \rho a_1^3 a_2^3 b^{-4} \dot{x}_1 \dot{x}_2 = 0 \quad (1)$$

$$L_k = m_k + \frac{2}{3} \pi \rho a_k^3, \quad M = 2\pi \rho a_1^3 a_2^3 b^{-3}$$

(второе уравнение получается перестановкой индексов с изменением знака последнего слагаемого), где ρ — плотность жидкости, точка означает дифференцирование по t . Точность описания зависит от параметра $\varepsilon = [\max_{(k,t)} \{a_k b^{-1}\}]^3$, который уже при умеренных величинах отношения a_k к b может быть весьма малым (например, для

двух воздушных пузырьков в воде диаметром по 0,1 мм, находящихся на расстоянии 1 мм, $\varepsilon = 1,25 \cdot 10^{-4} \ll 1$).

Пусть l и T — некоторые характерные длина и время. Из теории размерности [7] следует, что уравнения движения (1) можно свести к безразмерным уравнениям, содержащим два независимых безразмерных параметра, в качестве которых возьмем α_k

$$\frac{d}{d\tau} \left(A_1 \dot{u}_1 - \frac{B}{y^3} \dot{u}_2 \right) + 3 \frac{B}{y^4} \dot{u}_1 \dot{u}_2 = 0$$

$$\tau = t/T, \quad x_k = u_k l, \quad y = u_1 - u_2, \quad a_k = R_k l (4/9\pi)^{1/3}, \quad V_k = 4/3\pi R_k^3$$

$$A_k = \alpha_k + V_k, \quad B = V_1 V_2, \quad \alpha_k = 9m_k / (2\pi\rho l^3) \quad (2)$$

(второе уравнение получается перестановкой индексов с изменением знака последнего слагаемого), где точка означает дифференцирование по τ .

Сложив почленно уравнения системы (2), получим ее первый интеграл $(A_1 - B y^{-3}) \dot{u}_1 + (A_2 - B y^{-3}) \dot{u}_2 = C = \text{const}$, откуда, учитывая, что $\dot{y} = \dot{u}_1 - \dot{u}_2$, найдем выражения для \dot{u}_k

$$\dot{u}_1 = \frac{C + (A_2 - B y^{-3}) \dot{y}}{A_1 + A_2 - 2B y^{-3}} \quad (3)$$

(формула для \dot{u}_2 получается перестановкой индексов с изменением знака перед круглой скобкой в числителе).

Если подставить выражения для \dot{u}_k в одно из уравнений движения (2), то вместо двух уравнений получим одно. Чтобы избежать в дальнейшем громоздких выкладок, ограничимся случаем $C=0$ (при $C \neq 0$ никаких новых принципиальных трудностей не возникает). Тогда, подставив (3) в первое из уравнений (2), получим с точностью до малых порядка ε

$$\frac{d}{d\tau} \left[D \left(1 + \frac{2E}{y^3} \right) \dot{y} \right] - \frac{3DE}{y^4} \dot{y}^2 = 0,$$

$$D = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}, \quad E = \frac{B}{A_1 + A_2} \quad (4)$$

Теперь задачу можно сформулировать так: при заданных функциях $E(\tau)$, $D(\tau)$ требуется найти решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$. Решение уравнения (4) будет правильно описывать движение шаров только до тех пор, пока справедливо основное предположение, т. е.

$$\max_{(\tau)} \{E y^{-3}\} \sim \varepsilon \ll 1 \quad (5)$$

Интегрирование уравнения движения. Если во все время движения $D > 0$, то сделав замену $\dot{y} = Z(y)$, приведем уравнение (4) к виду

$$\frac{dZ}{dy} - 9 \frac{E}{y(y^3 + 2E)} Z = -F, \quad F = \ln D \quad (6)$$

Считая, что функции E , F от y явно не зависят, уравнение (6) можно формально проинтегрировать как линейное уравнение относительно $Z(y)$

$$Z(y) = \left(1 + \frac{2E}{y^3} \right)^{-1,5} \left[C_1 - F \int \left(1 + \frac{2E}{y^3} \right)^{1,5} dy \right]$$

откуда, определив C_1 из начальных условий, имеем с точностью до малых порядка ε уравнение для отыскания \dot{y}

$$Z(y) = \dot{y} = \dot{y}_0 \left(1 + \frac{3E_0}{y_0^3} - \frac{3E}{y^3} \right) + F_0 y_0 \left(1 - 1,5 \frac{E_0}{y_0^3} - 3 \frac{E}{y^3} \right) - F y \left(1 - 4,5 \frac{E}{y^3} \right) \quad (7)$$

Уравнение (7) можно формально проинтегрировать по τ и записать в интегральной форме

$$y = W y, \quad W y = y_0 + \int_0^\tau \dot{y} d\tau \quad (8)$$

где \dot{y} определяется правой частью (7).

Будем решать интегральное уравнение (8) методом итераций, положив $y^{(0)} = y_0 \neq 0$, $y^{(n)} = W y^{(n-1)}$; $n = 1, 2, \dots$

Тогда первое приближение можно записать в виде

$$y^{(1)} = Wy^{(0)} = y_0 + G(\tau) + y_0^{-3}H(\tau), \quad G(\tau) = (\dot{y}_0 + y_0 F_0)\tau - y_0(F - F_0)$$

$$H(\tau) = 1,5 \int_0^\tau [2\dot{y}_0(E_0 - E) - F_0 y_0(E_0 + 2E) + 3y_0 F E] d\tau$$

Второе приближение с точностью до малых порядка ϵ имеет вид

$$y^{(2)} = y_0 + G - \int_0^\tau F G d\tau - y_0^{-3} \int_0^\tau F H d\tau + 1,5 \frac{E_0}{y_0^3} (2\dot{y}_0 - F_0 y_0)\tau -$$

$$- 3(\dot{y}_0 + F_0 y_0) \int_0^\tau \frac{E}{(y_0 + G)^3} d\tau + 4,5 \int_0^\tau \frac{F E}{(y_0 + G)^2} d\tau \quad (9)$$

Как будет видно из дальнейшего, уже второе приближение совпадает с асимптотикой точного решения уравнения (4) для неп пульсирующих шаров, так что в случае малых пульсаций шаров вторым приближением можно ограничиться.

Движение неп пульсирующих шаров. В этом случае $D, E = \text{const}$ и уравнение (4) допускает точное решение в квадратурах

$$\int_{y_0}^y \left(1 + \frac{2E}{y^3}\right)^{1,5} dy = \dot{y}_0 \left(1 + \frac{2E}{y_0^3}\right)^{1,5} \tau$$

где интеграл в левой части в элементарных функциях не выражается, однако, проведя вычисления с точностью до малых порядка ϵ , можно получить приближенное решение

$$y = y_0 + \dot{y}_0 \left(1 + \frac{3E}{y_0^3}\right) \tau + 1,5E \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y_0^2}\right) \quad (10)$$

которое соответствует формуле (9), если в ней положить $E, F = \text{const}$.

Формула (10) определяет решение, если известны три константы: y_0, \dot{y}_0, E . Число определяющих констант можно сократить до двух, если ввести новую переменную $\dot{Y} = y/y_0$ и через $q(Y)$ обозначить комбинацию $1,5E/(Y^3 y_0^3)$, положив $Y_0 = y(0)/y_0 = 1, Y_0 = \dot{y}_0/y_0, q_0 = q(Y_0)$. Тогда формулу (10), определяющую движение неп пульсирующих шаров, можно записать с точностью до малых порядка ϵ в более простом виде

$$Y(1 - q + q_0) = 1 + Y_0(1 + 3q_0)\tau$$

Движение пульсирующих шаров. Пусть шары могут совершать малые пульсации так, что их безразмерные объемы V_k периодически изменяются относительно некоторых средних значений $\langle V_k \rangle$. Положим

$$V_k = \langle V_k \rangle (1 + v_k), \quad \langle v_k \rangle = 0, \quad \delta = \max_{(k, \tau)} \{|v_k(\tau)|\} \ll 1$$

Тогда из (2), (4), (6) имеем с точностью до малых порядка δ

$$E = \langle E \rangle (1 + e), \quad F = \langle F \rangle + f; \quad \langle e \rangle, \langle f \rangle = 0; \quad |e|, |f| \sim \delta \ll 1$$

$$e = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2, \quad f = \sigma_1 v_1 + \sigma_2 v_2$$

$$\gamma_1 = 1 - \frac{\langle V_1 \rangle}{\langle A_1 \rangle + \langle A_2 \rangle}, \quad \sigma_1 = \frac{\langle V_1 \rangle \langle A_2 \rangle}{\langle A_1 \rangle (\langle A_1 \rangle + \langle A_2 \rangle)}$$

Здесь γ_2 и σ_2 получаются перестановкой индексов.

Подставляя найденные выражения для E, F в правую часть (9), получим с точностью до малых порядка δ

$$y^{(2)} = g + y_0(f_0 - f) + \left[\dot{y}_0 + y_0 f_0 \left(1 - 4,5 \frac{\langle E \rangle}{y_0^3}\right) \right] \left(\tau f - \int_0^\tau f d\tau \right) +$$

$$+ 1,5 \langle E \rangle \left\{ \frac{1 + e_0}{y_0^3} (2\dot{y}_0 - y_0 f_0)\tau - \frac{1}{y_0^2} + \frac{1}{g^2} + \right.$$

$$\left. + 2(\dot{y}_0 + y_0 f_0) \left[\int_0^\tau \frac{e}{g^3} d\tau + 3y_0 \int_0^\tau \frac{f - f_0}{g^4} d\tau \right] + 3 \int_0^\tau \frac{f}{g^2} d\tau \right\} \quad (11)$$

$$g(\tau) = y_0 + (\dot{y}_0 + y_0 f_0)\tau$$

Если шары не пульсируют, то $e, f=0$ и (11) приобретает вид, соответствующий найденному ранее для этого случая решению (10).

Если в начальный момент времени шары неподвижны ($\dot{y}_0=0$), то, сохраняя в (11) только важнейшие члены, имеем $y^{(2)}=y_0(1+f_0\tau)$, откуда видно, что при $f_0>0$ пульсирующие шары начнут расходиться, а при $f_0<0$ — сближаться.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bjercknes V. Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte. Leipzig, Barth, 1900, В. 1. 338 S; 1902, В. 2. 316 S.
2. Акустическая коагуляция аэрозолей. М.: Госхимиздат, 1961. 184 с.
3. Медников Е. П. Акустическая коагуляция и осаждение аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 263 с.
4. Прикладная акустика. Сб. ст. Вып. 1. Таганрог, 1968. 256 с.
5. Миронов М. А. Силы Бьеркнеса в вязкой среде и акустическая коагуляция аэрозолей. — Акуст. ж., 1976, т. 22, № 6, с. 941–942.
6. Ламб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
7. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967. 428 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
25.VI.1981

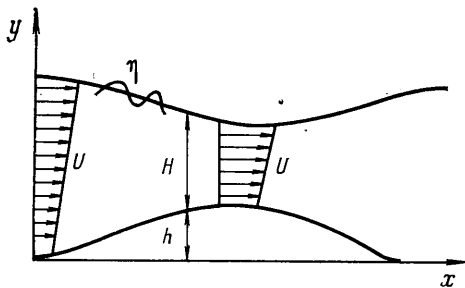
УДК 532.59.013.4

О ДЕСТАБИЛИЗАЦИИ ТЕЧЕНИЙ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ ВОЛНАМИ

ЕЗЕРСКИЙ А. Б.

При распространении волновых пакетов малой, но конечной амплитуды в жидкостях и газах из-за нелинейности сред возникают средние поля (средние течения, средние смещения границ раздела разнородных жидкостей и т. д.) [1, 2], величина которых пропорциональна квадрату амплитуды волн. В настоящем сообщении исследуются такие поля, возникающие при распространении пакета поверхностных волн на горизонтально неоднородном течении. Выяснено, что индуцированные волнами средние потоки могут существенно дестабилизировать или стабилизировать основное течение.

Исследуется следующий механизм воздействия пакета поверхностных волн на основное течение. Пусть медленно изменяющийся поток возникает в результате обтекания препятствия (см. фигуру). Характер течения зависит от числа Фруда $Fr=U/\sqrt{gH}$, где U — скорость течения, H — глубина потока, g — ускорение силы тяжести (предполагается, что есть только горизонтальная компонента и она однородна по глубине). Если $Fr<1$, то обтекание докритическое — спокойный поток, если $Fr>1$, то сверхкритическое — бурный поток [3]. Если в горизонтально неоднородном потоке распространяется волновой пакет, а максимальное число Fr близко к 1, то средние величины, обусловленные волной (поправки к H и U), могут изменить число Fr , и, следовательно, стабилизировать или дестабилизировать течение.



Рассчитаем средние величины η_c и u_c , обусловленные распространением стационарного пакета поверхностных волн $\eta=a(x)e^{i(\omega t-kx)}$. Будем считать, что поверхностные волны потенциальны: $u=\partial\varphi/\partial x$, $v=\partial\varphi/\partial y$ (φ — потенциал, x, y — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости), u_c не зависит от вертикальной координаты y , а $U=U_0+\Omega y$, Ω — завихренность основного течения. Из усредненных по фазе $\theta=\omega t-kx$ уравнений Эйлера получим

$$\frac{\partial u_c}{\partial t} + \frac{\partial(U(H_1)u_c)}{\partial x} - \Omega \frac{\partial(u_c H)}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\rangle \quad (1)$$

Здесь $\langle \rangle$ означают усреднения по θ , $H_1=H+h$. Отметим, что значение правой части (1) не зависит от y

$$\left\langle \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\rangle = (\omega - kU(H_1)) \frac{|a|^2}{\text{sh}^2 kH}$$