ЛИТЕРАТУРА

1. *Бирих Р. В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости.— ПМТФ, 1966, № 3, с. 69—72.
2. *Бердников В. С.* Термокапиллярная конвекция в горизонтальном слое жидкости.— Теплофиз. исслед. Новосибирск, 1977, с. 99—104.
3. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972, 392 с.
4. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974, 711 с.

Пермь

Поступила в редакцию 28.IX.1981

УДК 532.546

ОЦЕНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ВЕРИГИНА В ПЛОСКОРАДИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

КАРИМОВ М. Ф., МУХАМЕДШИН Р. К.

Исследуется задача о плоскорадиальном вытеснении газом жидкости из однородного неограниченного пласта. С помощью теоремы сравнения получены нижняя и верхняя оценки распределения давления. Расчеты, проведенные по полученным формулам, показали, что разница между верхней и нижней оценками составляет доли процента. Таким образом, при расчете давления с большой степенью точности можно пользоваться его нижней оценкой.

Рассматривается задача Веригина о вытеснении жидкости газом из однородного неограниченного пласта с пористостью m, проницаемостью k, толщиною h и пьезопроводностью $\varkappa$ [1]. Закачка газа ведется одиночной скважиной с постоянным массовым расходом G_0, с использованием методов интенсификации, обеспечивающих поршневое вытеснение [2]. В случае плоскорадиальной фильтрации математическая постановка этой задачи записывается следующим образом:

$$\frac{\partial p_1^2}{\partial t}=\frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_1^2}{\partial r}\right),\qquad 0<r\leqslant l(t)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t}=\frac{\varkappa}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_2}{\partial r}\right),\qquad l(t)\leqslant r<\infty \tag{1}$$

$$-\frac{\pi k h \rho_0}{\mu_1 p_a}\lim_{r\to 0} r\frac{\partial p_1^2}{\partial r}=G_0;\qquad p_1(l,t)=p_2(l,t)=p_f$$

$$p_2(r,0)=p_2(\infty,t)=p_0;\qquad -\frac{k}{\mu_1}\frac{\partial p_1}{\partial r}(l,t)+\frac{k}{\mu_2}\frac{\partial p_2}{\partial r}(l,t)=0$$

$$m\frac{dl}{dt}+\frac{k}{\mu_2}\frac{\partial p_2}{\partial r}(l,t)=0;\qquad \lim_{t\to 0} l(t)=0$$

Здесь $p(r,\ t)$ – давление, μ – вязкость, ρ_0 – плотность газа в нормальных условиях, p_a – атмосферное давление, p_0 – первоначальное пластовое давление, p_f – давление на фронте вытеснения, $l(t)$ – положение границы раздела газа и жидкости, $a=kp_1(m\mu_1)^{-1}$; индексы 1 и 2 относятся соответственно к зоне газа и к зоне жидкости.

Ввиду нелинейности уравнения фильтрации газа точного аналитического решения поставленной задачи получить не удается. Поэтому представляет интерес оценка точного решения задачи и сверху и снизу.

Построение нижней оценки. Пусть функции v_1 и v_2 оценивают давление в пласте снизу. Аналогично [3–5], используя теорему Вестфаля [4], эту оценку можно получить, положив в первом уравнении (1)

$$a=kp_f(m\mu_1)^{-1}=\text{const} \tag{2}$$

что соответствует минимальному значению величины a в зоне газа.

В этом случае задача (1) имеет автомодельное решение

$$l(t)=\alpha_v\sqrt{t},\qquad v_1^2=v_f^2+\frac{G_0\mu_1 p_a}{2\pi k h\rho_0}\left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{\alpha_v^2}{4a}\right)-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4at}\right)\right]$$

$$v_2=p_0-\frac{v_f-p_0}{\mathrm{Ei}(-\alpha_v^2/4\varkappa)}\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right),\qquad \mathrm{Ei}(-x)=-\int_x^\infty\frac{1}{\eta}e^{-\eta}\,d\eta \tag{3}$$

где параметры α_v и v_f определяются путем решения следующей системы трансцендентных уравнений:

$$\alpha_v^2 v_f \exp\left(\frac{\alpha_v^2}{4a}\right) = \frac{G_0 p_a}{\pi m h \rho_0} \tag{4}$$

$$v_f = p_0 - \frac{m\mu_2}{4k}\alpha_v^2 \operatorname{Ei}\left(-\frac{\alpha_v^2}{4\varkappa}\right)\exp\left(\frac{\alpha_v^2}{4\varkappa}\right)$$

Построение верхней оценки. Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\varkappa}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_2}{\partial r}\right) \tag{5}$$

$$-\frac{2\pi k h l}{\mu_2}\frac{\partial u_2}{\partial r}(l, t) = Q = \text{const}, \qquad u_2(r, 0) = u_2(\infty, t) = p_0$$

где Q – объемный расход жидкости на фронте вытеснения.

В предположении, что $l = \alpha_u\sqrt{t}$, эта задача имеет решение

$$u_2(r, t) = p_0 - \frac{\mu_2 Q}{2\pi k h}\exp\left(\frac{\alpha_u^2}{4\varkappa}\right)\operatorname{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right) \tag{6}$$

Очевидно, что если Q и $\alpha_u\sqrt{t}$ больше истинных значений Q_i и l_i, то для любых r и t выполняется $u_2(r, t) > p_2(r, t)$. Определим Q и α_u. Используя равенство скоростей фильтрации жидкости и газа на подвижной границе и заданный массовый расход на скважине, а также нестационарность процесса вытеснения в данном случае, получим

$$Q_i < G_0 p_a (\rho_0 v_f)^{-1} = Q \tag{7}$$

Учитывая (7) и условия в задаче (1), выражающие начальное положение подвижной границы и кинематическое соотношение на ней, имеем

$$l_i^2 < Qt(\pi h m)^{-1} = \alpha_u^2 t \tag{8}$$

Таким образом, при выборе Q и α_u, согласно (7) и (8), функция (6) оценивает сверху давление в зоне жидкости. Значение функции $u_2(r, t)$ при $r = \alpha_v\sqrt{t}$

$$u_f = u_2(\alpha_v\sqrt{t}, t) = p_0 - \frac{m\mu_2}{4k}\alpha_u^2 \operatorname{Ei}\left(-\frac{\alpha_v^2}{4\varkappa}\right)\exp\left(\frac{\alpha_u^2}{4\varkappa}\right) \tag{9}$$

Так как кривая стационарного распределения давления является асимптотическим решением данной задачи, то верхнюю оценку задачи (1) в газовой зоне можно построить в виде участка кривой стационарного распределения давления при заданном массовом расходе и

$$u_1(\alpha_v\sqrt{t}, t) = u_f \tag{10}$$

Тогда кривая стационарного распределения давления выражается формулой

$$u_1^2(r, t) = u_f^2 + \frac{G_0\mu_1 p_a}{2\pi k h \rho_0}\ln\frac{\alpha_v^2 t}{r^2} \tag{11}$$

Для оценок давления на скважине получаем

$$v_1^2(r_c, t) = v_f^2 + \frac{G_0\mu_1 p_a}{2\pi k h \rho_0}\left[\operatorname{Ei}\left(-\frac{\alpha_v^2}{4a}\right) - \operatorname{Ei}\left(-\frac{r_c^2}{4at}\right)\right] \tag{12}$$

$$u_1^2(r_c, t) = u_f^2 + \frac{G_0\mu_1 p_a}{2\pi k h \rho_0}\ln\frac{\alpha_v^2 t}{r_c^2}$$

Используя асимптотику для интегральной показательной функции при малых аргументах из формул (12) имеем

$$v_1^2(r_c, t) = v_f^2 + \frac{G_0\mu_1 p_a}{2\pi k h \rho_0}\ln\frac{\alpha_v^2 t}{r_c^2}$$

$$u_1^2(r_c, t) - v_1^2(r_c, t) = u_f^2 - v_f^2 = \text{const}$$

Последнее равенство свидетельствует о том, что

$$\lim_{t\to\infty}(u_1(r_c, t) - v_1(r_c, t)) = 0$$

По полученным формулам были проведены расчеты при следующих данных: $p_a = 0{,}098$ МПа, $p_0 = 10$ МПа, $h = 10$ м, $\mu_1 = 0{,}018$ МПа·с, $\mu_2 = 1$ МПа·с, $m = 0{,}25$, $\varkappa =$

$=10$ м^2/с, $k=1$ мкм^2, $G_0/\rho_0=300\,000$ м^3/сут. В результате расчетов получено. $\alpha_v=6{,}06$ м$/\sqrt{c}$, $v_f=120{,}41\,p_a$. Используя формулы (4) и (7), (8), получаем соотношение между α_v и α_u.

$$\alpha_u^2=\alpha_v^2 \exp\left(\frac{\alpha_v^2}{4a}\right) \tag{13}$$

Раскладывая правую часть этого равенства в ряд Тейлора и используя малость α_v, получаем $\alpha_u=\alpha_v(1+\alpha_v^2/8a)$. Поэтому относительная погрешность в определении положения фронта вытеснения будет равна

$$\Delta=\frac{l_u-l_v}{l_v}=\frac{\alpha_v^2}{8a} \tag{14}$$

Для расчетных данных $\Delta<0{,}001$. Таким образом, относительная погрешность не превышает десятой доли процента. Приведенные расчеты позволяют утверждать, что нижняя оценка данной задачи с большой степенью точности аппроксимирует точное решение и может быть использована для практических расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Веригин Н. Н.* Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений.– Изв. АН СССР. ОТН, 1952, № 5, с. 674–687.
2. *Каримов М. Ф., Харисов М. М.* Относительные проницаемости для жидкости и газа при пенообразовании в пористой среде.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 1, с. 179–182.
3. *Ентов В. М.* Теоремы сравнения для уравнений нестационарной фильтрации.– ПММ, 1965, т. 29, вып. 1, с. 200–205.
4. *Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х.* Механика физических процессов. М.: Изд-во МГУ, 1976. 367 с.
5. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 287 с.

Уфа

Поступила в редакцию
10.IX.1981

УДК 532.58

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЦИЛИНДР, ИМПУЛЬСНО ПРИВЕДЕННЫЙ В ДВИЖЕНИЕ

ОГНЕВ В. И., ЩЕГЛОВА М. Г.

В настоящее время имеется мало экспериментальных данных о силах, действующих на тела при импульсном возникновении движения, т. е. при приобретении телом постоянной конечной скорости за очень малое время, т. е. практически скачком. Причиной этого являются трудности, обусловленные механизмом, осуществляющим внезапно начинающееся движение, а также использованием измерительной техники для регистрации переходных значений скорости и силы, действующей на тело.

Первые опыты по оценке сил, действующих на цилиндр при импульсном сообщении ему скорости перпендикулярно его оси, были проведены при малых числах Рейнольдса (Re=580) и малых значениях скоростей движения ($v=0{,}008$ м/с) [1]. Число Рейнольдса определялось по диаметру цилиндра. Непосредственного измерения сил не проводилось. Коэффициенты сопротивления и подъемной силы цилиндра получены косвенным путем с помощью графического определения скорости в отдельных точках по фотографиям развитого вихревого течения за цилиндром (при скачкообразном изменении его скорости) и расчете распределения давления по поверхности цилиндра по этим скоростям.

Результаты опытов по измерению силы, действующей на неподвижный цилиндр во внезапно падающем вертикальном потоке жидкости, были опубликованы в [2]. Эксперименты проведены в вертикальной гидродинамической трубе, которая имела быстро открывающееся дно и клапанный механизм с соответствующим приводом. Чисто импульсного движения получить не удалось, поток двигался ускоренно на пути, равном примерно 2–6 радиусам цилиндра в зависимости от скорости движения. Для получения эффекта бесконечного удлинения, по мнению автора, необходимо было концы испытуемых цилиндров «погрузить» в стенку трубы, оставив небольшой зазор между торцевым концом цилиндра и стенкой для произведения измерений силы. Опыты были проведены при числах Рейнольдса, равных Re= (0,3–0,9)·10^5.

Авторами была предпринята попытка осуществить непосредственную запись сил (сопротивления и подъемной силы), действующих на цилиндр в условиях до-