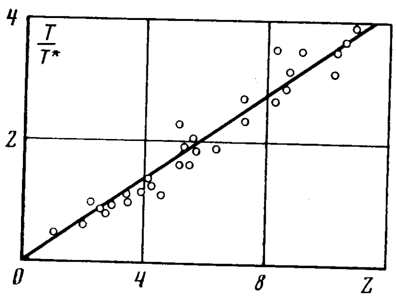
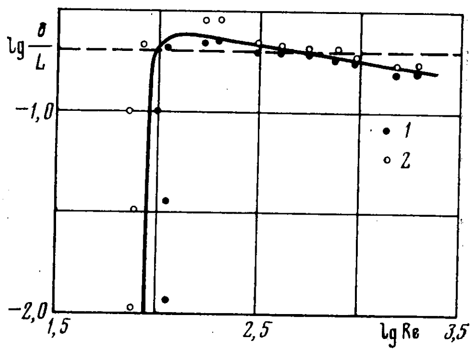
Из формул (4) и (5) следует, что величины I_1, I_2 и L (при ρ=const, η=const) оказались определяющими период автоколебаний. Это согласуется с тем, что условие симметрии течения также выражается через величины импульсов: $I_1=I_2$.

Найдем область существования автоколебаний в зависимости от значений критериев подобия. Рассмотрим случай равных струй. На фиг. 2 в координатах Re, δ/L показана граница между областями: точки *1* находятся в области существования автоколебаний, а точки *2* – где они отсутствовали. Оказалось, что при числах Re<90–100 автоколебания отсутствуют при любом значении параметра δ/L. Здесь течение можно считать ламинарным. Сталкиваясь, струи растекаются так, как будто наталкиваются на стену, перпендикулярную направлению движения, в соответствии с решением задачи о соударении идеальных ламинарных струй [5].

При числах $100\leqslant \mathrm{Re}\leqslant 4800$ наблюдались или отсутствовали автоколебания в зависимости от величины параметра δ/L (увеличивать число Re>4800 не позволяли параметры установки). Переходное значение отношения δ/L заключено в пределах



Фиг. 1



Фиг. 2

0,16–0,24 (или $L\approx(4-6)\delta$) для всего диапазона изменения чисел Re, т. е. место встречи струй при автоколебаниях располагалось на расстояниях не ближе $(2-3)\delta$ от среза сопла. В противном случае автоколебания прекращались, по-видимому, потому, что значительную часть длин струй начинала составлять ламинарная центральная часть – ядро. Заметим, что положение ядра свободной струи практически не зависит от скорости истечения и продолжается до значений $\approx 5\delta$ [6]. Например, при $\delta/L=0{,}20$ (показано пунктиром на фиг. 2) и $\mathrm{Re}\leqslant 100$ течение устойчиво, ламинарно. В диапазоне $100\leqslant \mathrm{Re}\leqslant 550$ – переходная к турбулентности зона с автоколебаниями, и при $\mathrm{Re}\gtrsim 550$ – турбулентное течение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Денщиков В. А., Кондратьев В. Н., Ромашов А. Н.* О взаимодействии двух встречных струй.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 6, с. 165–167.
2. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972, 440 с.
3. *Дейч М. Е.* Техническая газодинамика. М.: Энергия, 1974, 592 с.
4. *Гиневский А. С.* Теория турбулентных струй и следов. Интегральные методы расчета. М.: Машиностроение, 1979. 400 с.
5. *Биркгоф Г., Сарантонелло Э.* Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964. 466 с.
6. *Лебедев И. В.* Расширение потока в ограниченном пространстве. М., 1963, 56 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.IX.1981

УДК 532.529.4:536.25

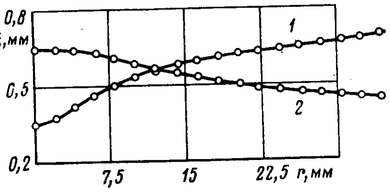
ДЕФОРМАЦИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫМ ДВИЖЕНИЕМ

ПШЕНИЧНИКОВ А. Ф., ТОКМЕНИНА Г. А.

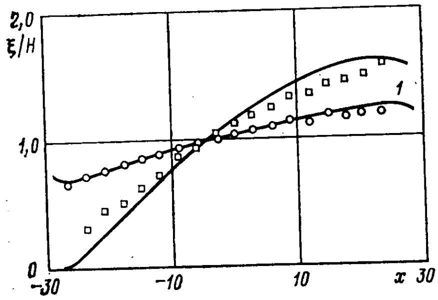
Экспериментально и теоретически исследована термокапиллярная конвекция в тонком горизонтальном слое жидкости с деформируемой поверхностью. Показано, что термокапиллярное движение вызывает существенное искривление свободной поверхности жидкости, если средняя толщина слоя не превышает 1–2 мм.

При исследовании термокапиллярной конвекции обычно предполагается, что движение жидкости не вызывает деформацию свободной поверхности [1, 2]. В условиях наземных экспериментов это предположение хорошо выполняется, если толщина слоя не менее 4–5 мм. Уменьшение толщины слоя приводит к увеличению горизонтальной составляющей градиента давления и должно сопровождаться деформацией свободной поверхности.

1. Рабочая жидкость (этиловый спирт) наливалась в круглую или прямоугольную металлические кюветы, снабженные теплообменниками. Прямоугольная кювета имела размеры 102×40×20 мм. В ней создавался однородный горизонтальный градиент температуры. В дно круглой кюветы внутренним диаметром 90 мм плотно вставлялся нагреватель диаметром 6 мм. Края кюветы охлаждались. Температуры нагревателя и холодильника поддерживались постоянными двумя ультратермостатами. Температурные измерения проводились с помощью термопар, сигнал с которых подавался на потенциометр постоянного тока типа Р-363-2. Горячие спаи термопар были запрессованы в дно кюветы. Измерения, проведенные на круглой кювете, показали, что температура изменяется с радиусом по логарифмическому закону.



Фиг. 1



Фиг. 2

Случайные отклонения локальных температур не превышали 2–3% разности температур между теплообменниками. Таким образом, теплообмен между дном кюветы и окружающей средой был очень слабым.

Рельеф поверхности исследовался с помощью оптического катетометра и короткофокусного теневого прибора. В фокальной плоскости последнего помещалась кольцевая решетка. Теневые фотографии обрабатывались на инструментальном микроскопе. По результатам обработки строился график зависимости угла наклона поверхности от переменного радиуса. Далее графическим интегрированием находился рельеф поверхности. В проведенных опытах средняя толщина жидкого слоя варьировалась в пределах от 0,1 до 1,5 мм, а разность температур между теплообменниками от 10 до 30 К. Число Марангони, определенное через средний градиент температуры и среднюю толщину слоя h, изменялось при этом от 2 до 200. В [1, 3] показано, что влиянием гравитационной конвекции в таких тонких слоях жидкости можно пренебречь.

Однородный горизонтальный градиент температуры вызывает в прямоугольной кювете плоское стационарное движение, при котором толщина жидкого слоя вблизи холодильника больше, чем вблизи нагревателя. Максимальная разность уровней растет с увеличением градиента температуры и уменьшением объема налитой в кювету жидкости. При градиенте температуры около 3 К/см и средней толщине слоя 0,4–1,5 мм разность уровней составляла 0,7–0,2 мм. Максимальный угол наклона поверхности был равен $9\cdot10^{-3}$ рад.

На фиг. 1 приведена зависимость толщины слоя ξ от переменного радиуса r в случае термокапиллярной конвекции в круглой кювете. Кривая *1* на фигуре соответствует случаю, когда в центре кюветы находился источник тепла, кривая *2* – сток. Разность температур между теплообменниками равна 10,7 К. Движение жидкости имеет осевую симметрию. На поверхности жидкости, над источником тепла образуется впадина глубиной до 0,35 мм. Угол наклона поверхности достигает $2{,}5\cdot10^{-2}$ рад. Наличие в центре кюветы стока тепла приводит к соответствующему увеличению толщины слоя. В центре кюветы образуется осесимметричный «холм». В обоих случаях перепад уровней жидкости растет линейно с увеличением разности температур и величины $1/h$. При прочих равных условиях деформация поверхности в случае сосредоточенного источника тепла оказывается большей на 20–30%, чем в случае стока тепла. Если средняя толщина слоя жидкости не превышает 0,4–0,5 мм, то при разности температур в 20–30 К возможно оголение нагретых участков дна. В этом случае жидкость собирается в виде тонкой капли над охлажденными участками.

2. Достаточно хорошей математической моделью термокапиллярного движения в тонком слое жидкости с деформируемой поверхностью могут служить уравнения пограничного слоя. Такое приближение вполне оправдано, так как вертикальная составляющая скорости мала по сравнению с горизонтальной, а давление над поверхностью жидкости постоянно и равно атмосферному. Согласно приближению пограничного слоя [4], поперечный перепад давления, вызванный гидродинамическим

течением, считается пренебрежимо малым. Таким образом, давление в жидком слое оказывается однозначно связанным с локальной толщиной слоя и кривизной поверхности. Реализующееся в тонких слоях жидкости термокапиллярное движение имеет обычно скорость, не превышающую нескольких мм/с. Это позволяет рассматривать течение как медленное и пренебречь нелинейными членами в уравнении движения.

Ограничиваясь рассмотрением плоского движения и учитывая сделанные выше предположения, получаем уравнение, связывающее продольную компоненту скорости U с толщиной жидкого слоя $\xi(x)$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{d\xi}{dx}-\frac{d^3\xi}{dx^3} \tag{2.1}$$

Здесь все величины безразмерные. Введены следующие единицы измерения: расстояния – капиллярная длина $(\sigma_0/\rho g)^{0,5}$, скорости – σ_0/η, температуры – полуразность температур между холодильником и нагревателем ΔT. (σ_0 – средний коэффициент поверхностного натяжения, ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, η – коэффициент динамической вязкости, x, y – координаты вдоль и поперек жидкого слоя соответственно.)

Граничные условия для скорости U имеют вид

$$U=0, \quad y=0, \quad \frac{dU}{dy}=-\frac{\varepsilon}{3}\frac{d\vartheta}{dx}, \quad y=\xi$$

$$\varepsilon=\frac{3\Delta T}{\sigma_0}\left|\frac{d\sigma}{dT}\right| \tag{2.2}$$

Здесь $\vartheta(x)$ – температура на поверхности жидкости.

При записи уравнения (2.1) и граничных условий члены $\sim\xi'^2$ отброшены по сравнению с единицей. Подставляя решение уравнения (2.1) в (2.2) и учитывая, что в стационарном режиме поток жидкости через поперечное сечение слоя равен нулю, получим уравнение для $\xi(x)$

$$\xi^2+\xi'^2-2\xi\xi''=-\varepsilon\vartheta(x)+C \tag{2.3}$$

Здесь C – произвольная постоянная.

В качестве примера рассмотрим тонкий слой жидкости, налитой в широкую прямоугольную кювету длиной $2B$ при наличии однородного горизонтального градиента температуры, направленного против оси x. С целью конкретизации краевых условий для ξ будем считать, что уровень жидкости на краях $x=\pm B$ постоянен и равен средней толщине жидкого слоя H. Такая ситуация реализуется на практике, если в изотермических условиях жидкость налита вровень с краями, а стенки кюветы хорошо смачиваются. Перепадом температуры поперек жидкого слоя пренебрегаем.

Решение уравнения (2.3) можно представить в виде ряда по степеням малого параметра ε. Ограничиваясь первыми тремя членами ряда, имеем

$$\frac{\xi}{H}=1+\frac{\varepsilon}{2H^2}\left(\frac{x}{B}-\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}B}\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{8H^4}\left\{\left[\frac{B}{3(B-1)}-\frac{1}{B}\right]\left(1-\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}B}\right)+\frac{x\operatorname{sh}x}{B\operatorname{sh}B}-\frac{x^2}{B^2}\right\} \tag{2.4}$$

На фиг. 2 изображен рельеф поверхности при двух значениях H (кривые *1*, *2* – H=0,494; 0,288). Точками выделены экспериментальные результаты, полученные на описанной выше прямоугольной кювете при градиенте температуры 2,84 К/см. Сплошные линии соответствуют формуле (2.4). Значения параметров B и ε найдены из условий эксперимента (B=30, ε=0,162). При $H\gtrsim 0{,}5$ теоретические и экспериментальные результаты хорошо согласуются между собой. С уменьшением H ухудшается сходимость ряда (2.4), а на результаты опытов оказывают сильное влияние мениски, образующиеся вблизи передней и задней стенок кюветы и не учитываемые в теории. Эти две причины приводят к более заметному расхождению между теоретическими и экспериментальными результатами при H=0,288.

Сила тяжести является основной причиной, препятствующей деформации свободной поверхности жидкости в наземных экспериментах. В условиях пониженной гравитации влияние термокапиллярной конвекции должно быть значительно большим. В частности, следует ожидать заметных эффектов (изменение толщины слоя жидкости на 5–20%) в слоях со средней толщиной 1–2 см.

В заключение авторы благодарят Г. З. Гершуни, Ю. К. Братухина и Н. И. Лобова за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бирих Р. В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости.— ПМТФ, 1966, № 3, с. 69—72.
2. *Бердников В. С.* Термокапиллярная конвекция в горизонтальном слое жидкости.— Теплофиз. исслед. Новосибирск, 1977, с. 99—104.
3. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972, 392 с.
4. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974, 711 с.

Пермь

Поступила в редакцию 28.IX.1981

УДК 532.546

ОЦЕНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ВЕРИГИНА В ПЛОСКОРАДИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

КАРИМОВ М. Ф., МУХАМЕДШИН Р. К.

Исследуется задача о плоскорадиальном вытеснении газом жидкости из однородного неограниченного пласта. С помощью теоремы сравнения получены нижняя и верхняя оценки распределения давления. Расчеты, проведенные по полученным формулам, показали, что разница между верхней и нижней оценками составляет доли процента. Таким образом, при расчете давления с большой степенью точности можно пользоваться его нижней оценкой.

Рассматривается задача Веригина о вытеснении жидкости газом из однородного неограниченного пласта с пористостью m, проницаемостью k, толщиною h и пьезопроводностью $\varkappa$ [1]. Закачка газа ведется одиночной скважиной с постоянным массовым расходом G_0, с использованием методов интенсификации, обеспечивающих поршневое вытеснение [2]. В случае плоскорадиальной фильтрации математическая постановка этой задачи записывается следующим образом:

$$\frac{\partial p_1^2}{\partial t}=\frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_1^2}{\partial r}\right),\qquad 0<r\leqslant l(t)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t}=\frac{\varkappa}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_2}{\partial r}\right),\qquad l(t)\leqslant r<\infty \tag{1}$$

$$-\frac{\pi kh\rho_0}{\mu_1 p_a}\lim_{r\to 0} r\frac{\partial p_1^2}{\partial r}=G_0;\qquad p_1(l,t)=p_2(l,t)=p_f$$

$$p_2(r,0)=p_2(\infty,t)=p_0;\qquad -\frac{k}{\mu_1}\frac{\partial p_1}{\partial r}(l,t)+\frac{k}{\mu_2}\frac{\partial p_2}{\partial r}(l,t)=0$$

$$m\frac{dl}{dt}+\frac{k}{\mu_2}\frac{\partial p_2}{\partial r}(l,t)=0;\qquad \lim_{t\to 0} l(t)=0$$

Здесь $p(r,\ t)$ – давление, μ – вязкость, ρ_0 – плотность газа в нормальных условиях, p_a – атмосферное давление, p_0 – первоначальное пластовое давление, p_f – давление на фронте вытеснения, $l(t)$ – положение границы раздела газа и жидкости, $a=kp_1(m\mu_1)^{-1}$; индексы 1 и 2 относятся соответственно к зоне газа и к зоне жидкости.

Ввиду нелинейности уравнения фильтрации газа точного аналитического решения поставленной задачи получить не удается. Поэтому представляет интерес оценка точного решения задачи и сверху и снизу.

Построение нижней оценки. Пусть функции v_1 и v_2 оценивают давление в пласте снизу. Аналогично [3–5], используя теорему Вестфаля [4], эту оценку можно получить, положив в первом уравнении (1)

$$a=kp_f(m\mu_1)^{-1}=\text{const} \tag{2}$$

что соответствует минимальному значению величины a в зоне газа.

В этом случае задача (1) имеет автомодельное решение

$$l(t)=\alpha_v\sqrt{t},\qquad v_1^2=v_f^2+\frac{G_0\mu_1 p_a}{2\pi kh\rho_0}\left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{\alpha_v^2}{4a}\right)-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4at}\right)\right]$$

$$v_2=p_0-\frac{v_f-p_0}{\mathrm{Ei}(-\alpha_v^2/4\varkappa)}\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right),\qquad \mathrm{Ei}(-x)=-\int_x^\infty\frac{1}{\eta}e^{-\eta}\,d\eta \tag{3}$$