МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1983

УДК 532.51

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ В СТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НЕ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

БУЛАХ Б. М.

Задача о взаимодействии двух и большего числа частиц, движущихся в вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} \ll 1$), хорошо изучена. Линейность уравнений Стокса позволяет развить эффективные методы решения задачи для двух и многих частиц [1]. Если число Рейнольдса не мало, то силами инерции в уравнениях Навье – Стокса пренебречь нельзя и задача становится нелинейной, т. е. существенно более сложной.

В данной заметке рассмотрена задача о взаимодействии двух сферических частиц в стационарном однородном потоке вязкой несжимаемой жидкости при не малых числах Рейнольдса. Найдены асимптотические формулы для сил взаимодействия частиц при больших по сравнению с радиусом частиц расстояниях между ними.

1. Основой дальнейшего является асимптотическая формула для поля скоростей вдали от обтекаемого однородным потоком вязкой несжимаемой жидкости одного тела. Эта формула при некоторых предположениях о свойствах решения задачи обтекания была получена в [2], а в дальнейшем обоснована и уточнена в [3, 4]. Однако простой физический смысл структуры поля скоростей вне следа за телом в этих и других работах не отмечался. Обратимся к постановке задачи в работе [3]. Обтекаемое тело ограничено замкнутой поверхностью S. Начало декартовой системы координат $x_1x_2x_3$ помещено внутри S. Если скорость частиц жидкости, плотность, давление отнести соответственно к скорости u_∞, плотности ρ_∞, удвоенному динамическому напору $\rho_\infty u_\infty^2$ невозмущенного потока, в качестве линейного размера взять характерный размер тела, то безразмерная скорость $\mathbf{u}$ (u_1, u_2, u_3) и безразмерное давление p будут удовлетворять системе уравнений (1.1), описывающих стационарное движение жидкости

$$(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}+\operatorname{grad} p = \frac{1}{2\lambda}\Delta\mathbf{u}, \qquad \operatorname{div} u=0 \tag{1.1}$$

где $2\lambda=\mathrm{Re}$ – число Рейнольдса. На поверхности тела выполняется условие

$$\mathbf{u}_S=\mathbf{u}_0, \qquad \int\limits_S \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n}\, d\sigma=0 \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{n}$ – орт нормали к S. (В нашем случае $u_0\equiv0$.)
При $R=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\to\infty$

$$\mathbf{u}\to\mathbf{u}_\infty(1,\ 0,\ 0) \tag{1.3}$$

Если $\mathbf{u}_0$ и поверхность тела S удовлетворяют некоторым условиям гладкости, то существует решение поставленной задачи с конечным интегралом Дирихле [3]. Поле скоростей в этом решении при $R\to\infty$ имеет следующее асимптотическое представление [2]:

$$u_k(x)=\delta_{1k}+a_jH_{kj}(x)+O(R^{-3/2+\varepsilon}), \quad \delta_{ij}=1, \quad i=j; \quad 0, \ i\neq j, \quad a_j=2\lambda F_j \tag{1.4}$$

Здесь по повторяющемуся индексу j производится суммирование; $\mathbf{F}(F_1, F_2, F_3)$ – безразмерный вектор силы, с которой поток действует на обтекаемое тело; ε – сколь угодно малая положительная константа. Коэффициенты $H_{kj}(x)$ определяются следующим образом.

Введем обозначения

$$\Phi(s) = -\frac{1}{8\pi\lambda}\int\limits_0^{\lambda s}(1-e^{-t})\frac{dt}{t}$$

$$s=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}+y_1-x_1 \tag{1.5}$$

Тогда $H_{kj}(x)$ определяются по формуле

$$H_{kj}(x) = \delta_{kj}\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_k\,\partial y_j}; \qquad k, j = 1, 2, 3 \tag{1.6}$$

где оператор Лапласа Δ берется по переменным y_k, а производные вычисляются при $y_1 = y_2 = y_3 = 0$.

Для случая, когда сила $\mathbf{F}$ сводится к силе лобового сопротивления, т. е. $\mathbf{F} \| \mathbf{u}_\infty$ (как это имеет место для сферы), формула (1.4) была уточнена в [4]. Принимая во внимание то, что $F_2 = F_3 = 0$, а $F_3 = F$, ее можно записать в виде

$$u_k(x) = \delta_{1k} + a_1 H_{k1}(x) + a_{ij}\frac{\partial H_{ki}(x)}{\partial x_j} + O[R^{-2+\varepsilon}(R - x_1 + 1)^{-1/2}] \tag{1.7}$$

$$a_1 = 2\lambda F$$

Здесь a_{ij} – постоянные.

Если перейти к сферическим координатам R, θ, φ, где ось $\theta = 0$ соответствует направлению $\mathbf{u}_\infty$, то $x_1 = R\cos\theta$, $x_2 = R\sin\theta\cos\varphi$, $x_3 = R\sin\theta\sin\varphi$, а составляющие $\mathbf{u}$ в сферических координатах u_R, u_θ, u_φ с учетом выражений (1.5) – (1.7) определяются по формулам

$$\begin{gathered} u_R = \cos\theta + 2\lambda F\left[\Phi''(s)\sin^2\theta + \Phi'(s)\frac{2\cos\theta}{R}\right] + \ldots \\ u_\theta = -\sin\theta + 2\lambda F\left[\Phi''(s)(\cos\theta - 1) - \frac{\Phi'(s)}{R}\right] + \ldots \\ u_\varphi = \ldots \\ \Phi'(s) = \frac{1}{8\pi}\frac{e^{-\lambda s} - 1}{\lambda s}, \qquad \Phi''(s) = \frac{1}{8\pi}\frac{1 - (1 + \lambda s)e^{-\lambda s}}{\lambda s^2}, \qquad s = R(1 - \cos\theta) \end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь точками обозначены члены более высокого порядка малости по R^{-1}, чем явно выписанные, при условии, что $1 - \cos\theta > \text{const}$.

Вне «следа» за телом (где $s < \text{const}$) $s \to \infty$, $R \to \infty$, $e^{-\lambda s} \to 0$ и формулы (1.8) после несложных вычислений дают

$$u_R = \cos\theta + \frac{F}{4\pi}\frac{1}{R^2} + O(R^{-2}), \qquad u_\theta = -\sin\theta + O(R^{-2}), \qquad u_\varphi = O(R^{-2}) \tag{1.9}$$

Выражения (1.9) имеют простой физический смысл: в однородный поток внесен источник с интенсивностью F.

Ранее аналогичный результат был получен для малых чисел Рейнольдса (см. [5]). Формула (1.9) справедлива при любых значениях F.

2. С помощью формулы (1.9) можно получить главный член сил, действующих со стороны потока на сферы с центрами O_1 и O_2, помещенные в однородный поток на расстоянии $h = O_1O_2$. Для упрощения записи формул далее рассматривается случай, когда сферы имеют одинаковые радиусы, равные a, причем предполагается, что $a/h \ll 1$. Направим ось x_1 по скорости невозмущенного потока $\mathbf{u}_\infty$; ось x_2 – так, чтобы точки O_1 и O_2 лежали в плоскости x_1x_2 (фигура). Внесение сферы с центром O_2 в однородный поток для точек, где $R \gg 1$, эквивалентно внесению в поток источника с интенсивностью F [см. формулы (1.9)].

Действие такого источника на поле скоростей в районе точки O_1 сводится в первом приближении к изменению скорости потока $\mathbf{u}_\infty$ набегающего на сферу с центром O_1, и появлению новой «эффективной» скорости набегающего потока $\mathbf{u}_{1\infty} = \mathbf{u}_\infty + \mathbf{u}_{1R}$, где $\mathbf{u}_{1R}$ – скорость в точке O_1 от источника, помещенного в точке O_2. Согласно фигуре

$$u_{1\infty} \simeq u_\infty\left(1 - \frac{u_{1R}}{u_\infty}\cos\beta\right), \qquad \alpha_1 \simeq \frac{u_{1R}}{u_\infty}\sin\beta \tag{2.1}$$

Сфера с центром O_1 аналогично влияет на поток около сферы с центром O_2. «Эффективная» скорость $\mathbf{u}_{2\infty} = \mathbf{u}_\infty + \mathbf{u}_{2R}$ определяется по формуле

$$u_{2\infty} \simeq u_\infty\left(1 + \frac{u_{2R}}{u_\infty}\cos\beta\right), \qquad \alpha_2 \simeq \frac{u_{2R}}{u_\infty}\sin\beta \tag{2.2}$$

В формулах (2.1), (2.2) следует, согласно (1.9), положить

$$u_{1R} = u_{2R} = \frac{F}{4\pi}\left(\frac{a}{h}\right)^2, \qquad u_\infty = 1$$

Отметим, что влияние сфер друг на друга приведет к изменению F только на величины порядка $(a/h)^2$.

Давление $p-p_\infty$ при $R\to\infty$ для одной сферы есть величина порядка R^{-2}, т. е. оно ведет себя так же, как $\mathbf{u}-\mathbf{u}_\infty$. Принимая, что скорости около сфер в некоторых окрестностях их изменяются на постоянные величины, мы должны принять, что давление там также изменится на постоянные величины, что не изменяет сил, действующих на сферы. Элементарные вычисления дают следующие выражения для проекций сил $\mathbf{F}_1$ (F_{11}, F_{12}) и $\mathbf{F}_2(F_{21}, F_{22})$, действующих со стороны потока на сферы с центрами O_1 и O_2 соответственно:

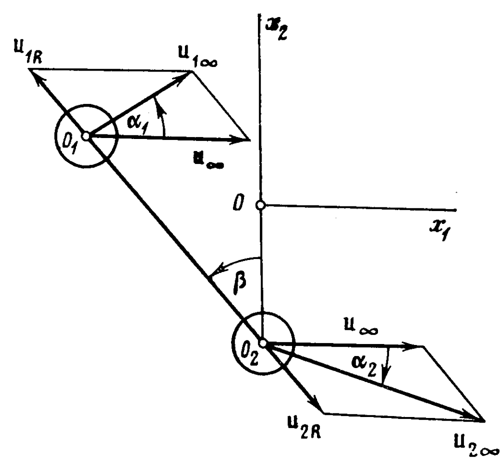
$$F_{11}=F-\left(2F+\frac{dF}{d\,\mathrm{Re}}\mathrm{Re}\right)\frac{F}{4\pi}\cos\beta\left(\frac{a}{h}\right)^2+O\left[\left(\frac{a}{h}\right)^2\right]$$

$$F_{12}=\frac{F^2}{4\pi}\sin\beta\left(\frac{a}{h}\right)^2+O\left[\left(\frac{a}{h}\right)^2\right]$$

$$F_{21}=F+\left(2F+\frac{dF}{d\,\mathrm{Re}}\mathrm{Re}\right)\frac{F}{4\pi}\cos\beta\left(\frac{a}{h}\right)^2+O\left[\left(\frac{a}{h}\right)^2\right]$$

$$F_{22}=-\frac{F^2}{4\pi}\sin\beta\left(\frac{a}{h}\right)^2+O\left[\left(\frac{a}{h}\right)^2\right]$$

где $\mathrm{Re}=u_\infty a/\nu$, ν – кинематический коэффициент вязкости, а силы отнесены к $\rho_\infty u_\infty{}^2a^2$.



3. Зная зависимость $F=F(\mathrm{Re})$ для одной сферы, с помощью (2.3) можно определить силы взаимодействия (отталкивания) двух сфер, находящихся вне следов на больших расстояниях друг от друга. Аналогично изложенному можно получить формулы для сил взаимодействия большего числа сфер, имеющих разные радиусы. В заключение заметим, что прием, который был использован при выводе формул (2.3), аналогичен тому приему, который был использован Л. Прандтлем при вычислении индуктивного сопротивления крыла конечного размаха.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
2. *Finn R.* Estimates at infinity for stationary solutions of the Navierstokes equations.– Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la RPR, 1959, 3(51).
3. *Бабенко К. И.* О стационарных решениях задачи обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью. М., 1972. 48 с. (Ин-т прикл. матем. АН СССР. Препринт, № 40).
4. *Бабенко К. И., Васильев М. М.* Об асимптотическом поведении стационарного течения вязкой жидкости вдали от тела.– ПММ, 1973, т. 37, вып. 4, с. 690–705.
5. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973, 758 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
13.II.1981