МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1983

УДК 536.25

# ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДУЛЯЦИИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУМЕРНОГО СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ

БАТИЩЕВ В. А., КОЛЕСОВ В. В., СЛИТИНСКАЯ С. К.,
ЮДОВИЧ В. И.

Исследуется устойчивость стационарного периодического режима, возникающего в горизонтальном слое жидкости при наличии пространственной модуляции температуры на твердой границе. Верхняя свободная граница слоя соприкасается с атмосферой. Найдены основные резонансные значения волнового числа модуляции; их оказалось пять.

Если температура нижней границы слоя постоянна и температурный градиент не слишком велик, то жидкость находится в равновесии. При переходе температурного градиента через критическое значение равновесие теряет устойчивость и в жидкости возникает стационарная конвекция [1]. При наличии пространственной модуляции температуры на нижней границе слоя жидкость не может находиться в равновесии и в ней устанавливается пространственно-периодический стационарный режим. Целью данной работы является отыскание критических значений температурного градиента, при которых этот основной стационарный режим теряет устойчивость и в жидкости возникает вторичный стационарный режим. Заметим, что аналогичная задача для случая, когда обе границы слоя – свободные поверхности, и без учета влияния атмосферы была решена в работе [2].

**1. Постановка задачи.** Пусть вязкая теплопроводная жидкость заполняет бесконечный плоский горизонтальный слой толщины $h$. Нижняя граница слоя – твердая поверхность, температура которой модулируется периодическими вдоль слоя возмущениями малой амплитуды. Свободная верхняя граница слоя не деформируется (учет деформируемости существен лишь для тонких слоев жидкости и в слабых гравитационных полях [3]) и на ней отсутствуют касательные напряжения. Над слоем находится атмосфера – неподвижный газ, температуропроводность которого велика. Поток тепла $Q$ по вертикали в атмосфере вдали от свободной поверхности жидкости считается заданным, подогреву снизу соответствует случай $Q>0$. Температура и нормальная составляющая потока тепла при переходе через свободную поверхность непрерывны.

Задача для определения вектора скорости $\mathbf{v}=(v_x, v_y, v_z)$ давления $\Pi$, температуры жидкости $T$ и температуры атмосферы $\theta$, приведенная к безразмерному виду и записанная в приближении Буссинеска, имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}=-\nabla\Pi+\Delta\mathbf{v}+\mathbf{e}GT$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla T=\frac{1}{P}\Delta T$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0,\qquad \Delta\theta=0 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{v}=0,\qquad T=\varepsilon\cos\omega x,\qquad z=0$$

$$v_x=\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}=\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}=T-\theta=\frac{\partial T}{\partial z}-m\frac{\partial\theta}{\partial z}=0,\qquad z=1$$

$$\nabla\theta\to\{0,\ 0,\ -1/m\},\qquad z\to\infty$$

Здесь $x$, $y$, $z$ – декартовы координаты, ось $x$ направлена вдоль слоя, ось $z$ – перпендикулярно границам слоя, $t$ – время, $\mathbf{e}=\{0,\ 0,\ 1\}$ – орт оси $z$, $G=g\beta h^4Q/\varkappa\nu^2$ – число Грасгофа, $P=\nu/x$ – число Прандтля, $m=\varkappa_a/\varkappa$ – отношение коэффициентов теплопроводности атмосферы $\varkappa_a$ и жидкости $\varkappa$, $g$ – ускорение силы тяжести, $\nu$, $\chi$ и $\beta$ – соответственно коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и теплового расширения жидкости, $\varepsilon$ и $\omega$ – соответственно амплитуда и частота модуляции температуры на нижней границе слоя.

Для перехода в (1.1) к размерным переменным (отмечены штрихами) достаточно положить

$$x=x'/h, \quad y=y'/h, \quad z=z'/h, \quad t=\nu t'/h^2, \quad \Pi=h^2\Pi'/\rho_1'\nu^2$$
$$\mathbf{v}=h\mathbf{v}'/\nu, \quad T=\varkappa(T'-T_1')/hQ, \quad \theta=\varkappa(\theta'-T_1')/hQ$$

где $T_1'$ – средняя температура нижней границы слоя, а $\rho_1'$ – плотность жидкости при температуре $T=T_1'$.

Требуется найти двумерное (не зависящее от $y$) стационарное $2\pi/\omega$-периодическое вдоль оси $x$ решение задачи (1.1) (основной стационарный режим) и исследовать его устойчивость относительно бесконечно малых пространственно-периодических возмущений.

**2. Основной стационарный режим.** При малой амплитуде модуляции температурного поля $\varepsilon$ задача (1.1) допускает стационарное решение

$$v_{x0}=\varepsilon u_{01}(z)\sin\omega x+\varepsilon^2 u_{02}(z)\sin 2\omega x+\ldots$$
$$v_{z0}=\varepsilon w_{01}(z)\cos\omega x+\varepsilon^2 w_{02}(z)\cos 2\omega+\ldots$$

$$\Pi_0=\mathrm{const}-Gz^2/2+2\varepsilon P_{01}(z)\cos\omega x+\varepsilon^2[P_{02}(z)\cos 2\omega x+P_{00}(z)]+\ldots \tag{2.1}$$
$$T_0=-z+P\varepsilon\tau_{01}(z)\cos\omega x+P\varepsilon^2[\tau_{0,2}(z)\cos^2\omega x+\tau_{00}(z)]+\ldots$$
$$\theta_0=(1-m-z)/m+P\varepsilon\theta_{01}(z)\cos\omega x+P\varepsilon^2\theta_{02}(z)\cos 2\omega x+\ldots$$

Функции $w_{01}(z)$ и $\tau_{01}(z)$ находятся путем решения краевой задачи

$$(D^2-\omega^2)^2 w_{01}=\omega^2 R\tau_{01}, \quad (D^2-\omega^2)\tau_{01}=-w_{01} \tag{2.2}$$
$$w_{01}=Dw_{01}=P\tau_{01}-1=0, \quad z=0$$
$$w_{01}=D^2w_{01}=D\tau_{01}+\omega m\tau_{01}=0, \quad z=1$$

Здесь $D=d/dz$, $R=GP$ – число Рэлея.

Предположим, что $\omega>0$; тогда функции $u_{01}$, $\theta_{01}$ и $P_{01}$ находятся по формулам

$$u_{01}=-\frac{1}{\omega}Dw_{01}, \quad \theta_{01}=\tau_{01}(1)\exp[\omega(1-z)]$$
$$P_{01}=\frac{1}{\omega^2}(D^2-\omega^2)Dw_{01}$$

Для определения функций $w_{02}$ и $\tau_{02}$ требуется решить краевую задачу

$$(D^2-4\omega^2)^2 w_{02}=4\omega^2 R\tau_{02}+w_{01}D^3w_{01}-Dw_{01}D^2w_{01}$$
$$(D^2-4\omega^2)\tau_{02}=-w_{02}+P(w_{01}D\tau_{01}-\tau_{01}Dw_{01})/2$$
$$w_{02}=Dw_{02}=\tau_{02}=0, \quad z=0$$
$$w_{02}=D^2w_{02}=D\tau_{02}+2\omega m\tau_{02}=0, \quad z=1$$

Функции $u_{02}(z)$, $\theta_{02}(z)$, $P_{02}(z)$, $P_{00}(z)$ и $\tau_{00}(z)$ находятся по формулам

$$u_{02}=-\frac{1}{2\omega}Dw_{02}, \quad \theta_{02}=\tau_{02}(1)\exp[2\omega(1-z)]$$

$$P_{02}=\frac{1}{4\omega^2}[(D^2-4\omega^2)Dw_{02}+(Dw_{01})^2-w_{01}D^2w_{01}]$$

$$P_{00}=R\int_0^z\tau_{00}\,dz-w_{01}^2, \quad \tau_{00}=\frac{1}{2}P\int_0^z\tau_{01}w_{01}\,dz$$

**3. Устойчивость основного стационарного режима.** Решение (2.1) задачи (1.1) существует при любом значении числа Рэлея $R$, однако при переходе $R$ через критическое значение $R_0$ решение (2.1) может потерять устойчивость. Разложим $R_0$ в ряд теории возмущений

$$R_0=R_0^{(0)}+\varepsilon R_0^{(1)}+\varepsilon^2 R_0^{(2)}+\ldots \tag{3.1}$$

Для определения коэффициентов ряда (3.1) наложим на режим (2.1) бесконечно малые квазипериодические по $x$ монотонные возмущения, т. е. будем искать решение задачи (1.1), отличное от (2.1), в виде

$$v_x=v_{x0}+v_x', \quad v_z=v_{z0}+v_z', \quad \Pi=\Pi_0+\Pi'$$
$$T=T_0+PT', \quad \theta=\theta_0+P\theta' \tag{3.2}$$

Предположим, что $v_x'$ — нечетная, а $v_z'$, $\Pi'$, $T'$ и $\theta'$ — четные функции $x$, тогда

$$u_x'=u_1(z)\sin\alpha x+\varepsilon[u_{11}(z)\sin(\omega+\alpha)x+u_{12}(z)\sin(\omega-\alpha)x]+$$
$$+\varepsilon^2[u_{21}(z)\sin(2\omega+\alpha)x+u_{22}(z)\sin(2\omega-\alpha)x+u_{20}(z)\sin\alpha x]+\ldots$$

$$v_z'=w_1(z)\cos\alpha x+\varepsilon[w_{11}(z)\cos(\omega+\alpha)x+w_{12}(z)\cos(\omega-\alpha)x]+$$
$$+\varepsilon^2[w_{21}(z)\cos(2\omega+\alpha)x+w_{22}(z)\cos(2\omega-\alpha)x+w_{20}(z)\cos\alpha x]+\ldots$$

Здесь $\alpha\neq\omega$ — волновое число возмущений.

Аналогичные разложения по косинусам имеют место и для $\Pi'$, $T'$ и $\theta'$. Заметим, что такой специальный вид возмущений связан с взаимодействием гармоник $\sin\omega x$ и $\cos\omega x$ режима (2.1) с гармониками $\sin\alpha x$ и $\cos\alpha x$ возмущений.

Подставляя (3.2) в (1.1), линеаризуя полученную задачу в окрестности режима (2.1) и приравнивая выражения, стоящие при одинаковых степенях малого параметра $\varepsilon$, приходим к рекуррентной цепочке линейных краевых задач.

Первая из этих задач служит для определения главного члена $R_0^{(0)}$ разложения критического значения числа Рэлея в ряд по (3.1). После разделения переменных эта задача приводится к виду

$$(D^2-\alpha^2)^2w_1=\alpha^2R_0^{(0)}\tau_1, \quad (D^2-\alpha^2)\tau_1=-w_1 \tag{3.3}$$
$$\tau_1=w_1=Dw_1=0, \qquad z=0$$
$$w_1=D^2w_1=D\tau_1+\alpha m\tau_1, \qquad z=1$$

Последующие краевые задачи рекуррентной цепочки являются неоднородными. Условия их разрешимости позволяют найти остальные коэффициенты разложения (3.1). Опуская громоздкие выкладки, приведем только результаты

$$R_0^{(1)}=0, \quad R_0^{(2)}=-I_2/(2\alpha I_1) \tag{3.4}$$

$$I_1=\int_0^1\tau_1w_1\,dz, \quad I_2=\int_0^1(f_1w_1+\alpha R_0^{(0)}Pf_2\tau_1)\,dz$$

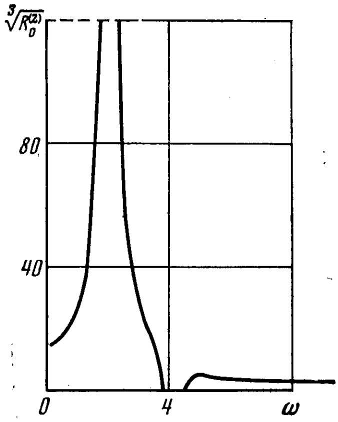
$$f_1=[(w_{12}-w_{11})(D^3w_{01}+\alpha^2Dw_{01})-(D^2w_{12}-D^2w_{11})Dw_{01}]/\omega+$$
$$+[w_{01}D^3w_{11}-\alpha(\alpha+2\omega)w_{01}Dw_{11}-D^2w_{01}Dw_{11}]/(\alpha+\omega)+$$
$$+[w_{01}D^3w_{12}-\alpha(\alpha-2w)w_{01}Dw_{12}-D^2w_{01}Dw_{12}]/(\alpha-\omega)-2\alpha(w_{11}+w_{12})Dw_{01}$$

$$f_2=Dw_{01}[(\alpha-\omega)\tau_{12}-(\alpha+\omega)\tau_{11}]/\omega+w_{01}(D\tau_{11}+D\tau_{12})+$$
$$+\omega\tau_{01}[Dw_{12}(\alpha-\omega)-Dw_{11}(\alpha+\omega)]-D\tau_{01}(w_{11}+w_{12})-2w_1D\tau_{00}$$

**4. Численные результаты.** Для определения первых двух ненулевых членов разложения критического значения числа Рэлея в ряд (3.1) требуется решить спектральную задачу (3.3), неоднородную краевую задачу (2.2) и еще две неоднородные краевые задачи, служащие для определения функций $w_{11}$, $\tau_{11}$ и $w_{12}$, $\tau_{12}$. Каждая из этих задач сводилась к краевой задаче для шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая решалась численно методом пристрелки.

Расчеты проводились при $P=7$ и $m=0{,}0436$, что соответствует случаю, когда над слоем воды расположен воздух.

С физической точки зрения наибольший интерес представляет значение $\alpha_0$ волнового числа $\alpha$, доставляющее минимум критическому числу Рэлея, поэтому, при вычислениях проводилась численная минимизация $R_0(\alpha)$ по $\alpha$.



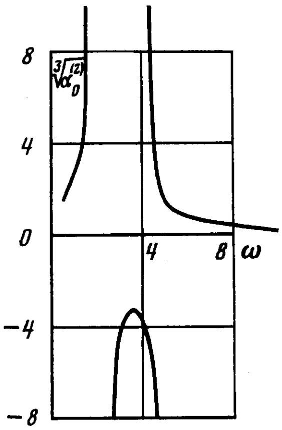
Фиг. 1

Нетрудно убедиться, что критическое значение $\alpha_0$ волнового числа $\alpha$ раскладывается в ряд

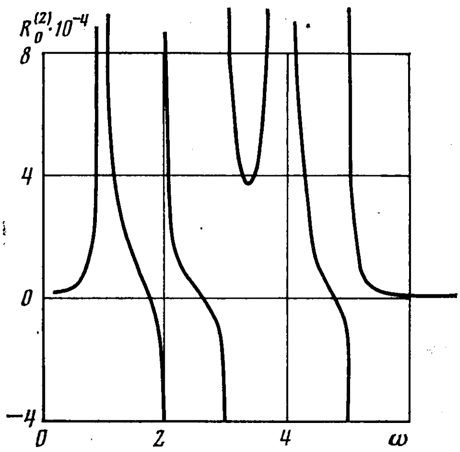
$$\alpha_0=\alpha_0^{(0)}+\varepsilon^2\alpha_0^{(2)}+\ldots$$

где $\alpha_0^{(0)}$ — значение волнового числа $\alpha$, доставляющее минимум функции $R_0^{(0)}=R_0^{(0)}(\alpha)$, а поправка $\alpha_0^{(2)}$ определяется по формуле

$$\alpha_0^{(2)}=-\left[\frac{dR_0^{(2)}}{d\alpha}\bigg/\frac{d^2R_0^{(0)}}{d\alpha^2}\right]_{\alpha=\alpha_0^{(0)}}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Вычисления показали, что

$$\alpha_0^{(0)}=2{,}1;\qquad R_0^{(0)}(\alpha_0^{(0)})=\min_{\alpha} R_0^{(0)}(\alpha)=681$$

На фиг. 1 представлена зависимость поправки $R_0^{(2)}$, найденной по формулам (3.4) при $\alpha=\alpha_0^{(0)}$, от частоты модуляции температурного поля $\omega$. Положительность $R_0^{(2)}$ указывает на стабилизующее влияние пространственной модуляции температуры. При высокочастотной модуляции стабилизирующий эффект существенно уменьшается. Кривая $R_0^{(2)}=R_0^{(2)}(\omega)$ претерпевает два разрыва в точках $\omega=\alpha_0^{(0)}$ и $\omega=2\alpha_0^{(0)}$, так как при взаимодействии возмущений с частотой $\alpha_0^{(0)}$ и синусоидальных колебаний температуры с частотами $\omega$, близкими к $\alpha_0^{(0)}$ или к $2\alpha_0^{(0)}$, возникают резонансы. В этих двух исключительных точках разложение (3.1) теряет силу.

На фиг. 2 представлена зависимость $\alpha_0^{(2)}=\alpha_0^{(2)}(\omega)$, показывающая, что модуляция температурного поля может приводить как к увеличению ($\alpha_0^{(2)}<0$), так и к уменьшению ($\alpha_0^{(2)}>0$) длины волны самого опасного возмущения.

В заключение отметим, что в случае, когда волновое число возмущений не является критическим ($\alpha\neq\alpha_0^{(0)}$), число резонансов увеличивается. Если отбросить в разложениях (2.1) и (3.1) члены $0(\varepsilon^3)$, то общее число резонансов не превосходит пяти. Этот факт объясняется тем, что нейтральная кривая $R_0^{(0)}=R_0^{(0)}(\alpha)$ – выпуклая вниз функция, причем $R_0^{(0)}(\alpha)\to\infty$ при $\alpha\to0$ и при $\alpha\to\infty$. Но тогда при любом $\alpha=\alpha_1$ ($\alpha_1\neq\alpha_0^{(0)}$) найдется только одна точка $\alpha=\alpha_2$, такая, что $R_0^{(0)}(\alpha_2)=R_0^{(0)}(\alpha_1)$, а следовательно, при $\alpha=\alpha_1$, кроме основных резонансов в точках $\omega=\alpha_1$ и $\omega=2\alpha_1$ возникают резонансы в точках $\omega=\alpha_2$, $\omega=\alpha_1+\alpha_2$ и $\omega=(\alpha_1-\alpha_2)$. Возникновение пяти резонансов отчетливо прослеживается на фиг. 3, где представлена зависимость $R_0^{(2)}=R_0^{(2)}(\omega)$ для случая $\alpha_1=1$ ($R_0^{(0)}(1)=1131$).

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. *Возовой Л. П., Непомнящий А. А.* Конвекция в горизонтальном слое при наличии пространственной модуляции температуры на границах.– В кн.: Гидродинамика. Вып. 7. Пермь, 1974, с. 105–117.
3. *Изаксон В. Х., Юдович В. И.* О возникновении конвекции в слое жидкости со свободной границей.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 4, с. 23–28.



Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
7.I.1982