

УДК 536.25

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО КОНВЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОЙ СРЕДЫ

ЕРЕМИН Е. А.

Рассматривается вертикальный плоский слой реагирующей жидкости, границы которого поддерживаются при одинаковых постоянных температурах. В результате разогрева, обусловленного протекающей в жидкости химической реакцией нулевого порядка, в слое возникает стационарное плоскопараллельное конвективное течение, которое при достаточно большой интенсивности внутреннего тепловыделения может стать неустойчивым. Линейная устойчивость этого движения рассматривалась ранее лишь в работе [1] в гидродинамической постановке, когда можно пренебречь тепловыми возмущениями и их влиянием на развитие гидродинамических возмущений (область малых чисел Прандтля). В данной статье граница устойчивости определена для произвольных значений числа Прандтля и параметра Франк-Каменецкого FK, характеризующего стационарный плоскопараллельный режим. Существенное отличие рассматриваемого течения от других изучавшихся ранее типов конвективных движений (см. [2]) состоит в том, что основное плоскопараллельное течение реагирующей среды возможно лишь в определенной области параметра FK: при значениях параметра, превышающих некоторое критическое, происходит тепловой взрыв — сильный скачкообразный разогрев жидкости. Это обстоятельство обусловлено существенно нелинейной зависимостью тепловыделения химической реакции от температуры.

1. Рассмотрим вертикальный слой жидкости, ограниченный твердыми параллельными плоскостями $x = \pm h$ с одинаковой постоянной температурой T_0 . Во всем объеме жидкости протекает экзотермическая реакция, тепловой эффект которой считается достаточно большим, что позволяет пренебрегать зависимостью мощности тепловыделения от концентрации реагента (реакция нулевого порядка), плотность внутренних источников тепла определяется законом Аррениуса $q = Qk_0 \exp(-E/RT)$, где T — абсолютная температура, R — газовая постоянная, а Q , k_0 и E — константы химической реакции: тепловой эффект, предэкспоненциальный множитель и энергия активации.

Уравнения конвекции в приближении Буссинеска с учетом внутренних источников тепла, граничные условия и условие замкнутости конвективного течения могут быть записаны в безразмерном виде следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + G(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \Theta \gamma, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + G \mathbf{v} \nabla \Theta = P^{-1} [\Delta \Theta + \text{FK} \cdot \exp(\Theta / (1 + \beta \Theta))]]$$

$$x = \pm 1 \quad \mathbf{v} = 0, \quad \Theta = 0; \quad \int_{-1}^1 v_z dx = 0 \quad (1.2)$$

$$G = g \alpha R T_0^2 h^3 / \nu^2 E; \quad P = \nu / \chi$$

$$\text{FK} = Q k_0 E h^2 \exp(-E/RT_0) / \kappa R T_0^2; \quad \beta = R T_0 / E$$

Здесь Θ — температура, отсчитываемая от ее значения на границах слоя; γ — единичный вектор, направленный по вертикали вверх вдоль оси z , ось x горизонтальна, g — ускорение свободного падения; α , ν , κ , χ — коэффициенты объемного расширения, кинематической вязкости, теплопроводности и температуропроводности жидкости, ρ — плотность; остальные обозначения обычные. В качестве единиц расстояния, времени, скорости, температуры и давления выбраны соответственно

$$h, \quad h^2/\nu, \quad gah^2RT_0^2/E\nu, \quad RT_0^2/E, \quad \rho gahRT_0^2/E$$

При написании уравнения теплопроводности использован известный способ [3] представления экспоненциального выражения для плотности тепловыделения.

В задачу (1.1) входят четыре безразмерных параметра — числа Грасгофа G , Прандтля P , Франк-Каменецкого FK и параметр β , значение которого для реальных химических процессов мало — не превышает 0,05 [3].

2. Для бесконечного вертикального слоя уравнения (1.1) с условиями (1.2) имеют решения, описывающие стационарное плоскопараллельное течение. Профили температуры $\Theta_0(x)$ и скорости $v_0(x)$ этого течения определяются получающейся из (1.1), (1.2) краевой задачей

$$v_0'' + \Theta_0 = 2c; \quad \Theta_0'' + FK \cdot \exp[\Theta_0/(1 + \beta\Theta_0)] = 0 \quad (2.1)$$

$$x = \pm 1; \quad v_0 = 0, \quad \Theta_0 = 0; \quad \int_{-1}^1 v_0 dx = 0$$

где $2c$ — постоянная разделения переменных, имеющая смысл продольного градиента давления.

Стационарная задача (2.1) решалась численно. Для этого сначала методом Рунге — Кутты находилось решение однородной задачи при $c=0$ без учета условия замкнутости потока. Затем к полученной скорости добавлялось частное решение неоднородной системы в виде $V=c(x^2-1)$, исчезающее на границах слоя, причем постоянная c определялась из условия замкнутости потока с использованием формулы Симпсона.

Профили температуры и скорости стационарного плоскопараллельного конвективного течения реагирующей жидкости схематически изображены на вставке к фиг. 1. Движение состоит из трех встречных потоков: двух нисходящих возле границ слоя и восходящего в центральной части. Профиль температуры имеет параболический вид и, как следует из (2.1), не зависит от скорости v_0 . Имеется, таким образом, аналогия со случаем конвективного течения в вертикальном слое, обусловленного однородным внутренним тепловыделением [4, 5].

Так как рассматриваемое плоскопараллельное конвективное течение не приводит к изменению переноса тепла поперек слоя, температурное распределение $\Theta_0(x)$ совпадает с решением известной задачи Франк-Каменецкого для плоского слоя покоящейся реагирующей среды [3]. В зависимости от значений параметров задача эта допускает до трех стационарных распределений температуры [1, 6, 7]. Наибольший интерес представляет первое (низкотемпературное) решение: оно существует при $0 < FK \leq FK_*$ и устойчиво. Второй режим абсолютно неустойчив относительно температурных возмущений, а третий, который возможен даже при $FK > FK_*$, лежит в области физически нереальных значений параметров (см. [1]). При $FK > FK_*$ существует только третье (высокотемпературное) решение и происходит быстрый разогрев слоя до высоких температур — тепловой взрыв. Явление это наиболее ярко выражено при малых значениях β , а в предельном случае $\beta=0$ при $FK > FK_*$ стационарный режим вообще невозможен [3] — третье решение не существует.

Соответственно трем температурным распределениям можно говорить и о трех режимах стационарного плоскопараллельного течения (2.1).

3. Рассмотрим устойчивость стационарного плоскопараллельного конвективного движения (2.1) относительно малых возмущений. Поскольку для рассматриваемой задачи справедливы преобразования Сквайра (см. [8], § 47), плоские возмущения являются наиболее опасными. Будем поэтому рассматривать плоские нормальные возмущения, зависящие от времени и координаты z по закону $\exp(-\lambda t + ikz)$. Вводя функцию тока соотношениями $v_x = -\partial\psi/\partial z$ и $v_z = \partial\psi/\partial x$, получим для амплитуд возмущений функции тока $\varphi(x)$ и температуры $\theta(x)$ следующую линейризованную краевую задачу:

$$\Delta\Delta\varphi + ikG(v_0''\varphi - v_0\Delta\varphi) + \theta' = -\lambda\Delta\varphi \quad (3.1)$$

$$P^{-1}\Delta\theta + ikG(\Theta_0'\varphi - v_0\theta) + \frac{FK}{P} \cdot \frac{\exp[\Theta_0/(1+\beta\Theta_0)]}{(1+\beta\Theta_0)^2} \theta = -\lambda\theta$$

$$x = \pm 1 \quad \theta = \varphi = \varphi' = 0$$

Входящие в уравнения (3.1) комплексные декременты $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ являются собственными числами задачи и зависят от ее параметров P , G , FK , β и волнового числа k . Декременты характеризуют поведение возмущений во времени: действительная часть определяет нарастание ($\lambda_r < 0$) или затухание ($\lambda_r > 0$) возмущений, а мнимая — частоту их осцилляции. Условие $\lambda_r = 0$ выделяет в плоскости (k, G) нейтральную кривую, разграничивающую область устойчивости и неустойчивости.

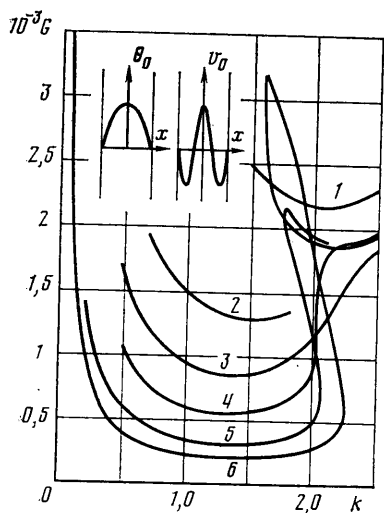
Задача (3.1) решалась численно методом дифференциальной прогонки [9], причем интегрирование прогоночных уравнений и стационарной задачи (2.1) производилось совместно методом Рунге — Кутты — Мерсона с автоматическим выбором шага. Результаты расчета нижнего наиболее опасного уровня неустойчивости при $FK = 0,8$ и $\beta = 0$ для низкотемпературного решения приведены на фиг. 1. Кривые 1–6 соответствуют значениям числа Прандтля $P = 0; 0,5; 1; 2; 5; 10$. В предельном случае $P = 0$ (кривая 1) получается нейтральная кривая для чисто гидродинамических возмущений, имеющих структуру вихрей на границах встречных потоков; эта кривая была определена ранее в [1], где задача устойчивости рассматривалась в чисто гидродинамическом приближении. С ростом числа Прандтля роль тепловых возмущений существенно возрастает, и при больших P становится опаснее неустойчивость в виде тепловых волн. Нейтральная кривая при этом сильно деформируется, образуя при больших числах Прандтля (см., например, случай $P = 10$ — кривая 6 на фиг. 1) две ветви, непрерывно переходящие одна в другую. Нижняя ветвь соответствует тепловым волнам, а верхняя — вихрям на границах встречных потоков.

Как показывают расчеты, фазовая скорость наиболее опасных возмущений λ_i/kG отрицательна (это соответствует бегущим вниз возмущениям), а ее величина при $P = 1$ имеет порядок максимальной скорости стационарного движения. С ростом числа Прандтля фазовая скорость наиболее опасных возмущений растет.

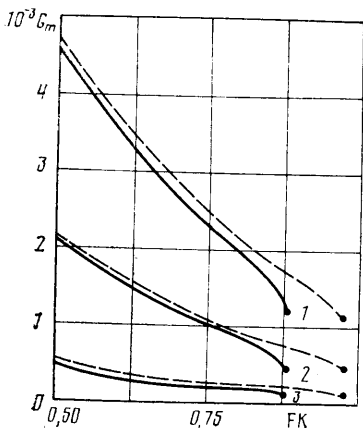
Волновое число k_m , соответствующее минимуму нейтральной кривой, с ростом числа Прандтля уменьшается, а критическое число Грасгофа при больших P стремится к нулю по закону $G_m \sim P^{-1/2}$, что характерно для тепловых волн.

Форма нейтральных кривых слабо зависит от параметров стационарной задачи FK и β . Однако влияние интенсивности тепловыделения химической реакции на критическое значение G_m значительно. На фиг. 2 изображены зависимости минимального критического числа G_m от параметра FK . Кривые 1–3 отвечают значениям числа Прандтля 0,1; 1; 10; сплошные кривые соответствуют $\beta = 0$, а пунктирные — $\beta = 0,1$. Как видно, с ростом параметра Франк-Каменецкого, характеризующего интенсивность химической реакции, минимальное число Грасгофа снижается. Кри-

вые $G_m(\text{FK})$ имеют концевую точку, разную для различных β ; при $\text{FK} > \text{FK}_*$ рассматриваемое низкотемпературное решение исчезает — происходит тепловой взрыв. Очевидно, что при достаточной интенсивности конвекции порог теплового взрыва FK_* может быть отодвинут из-за возникновения вторичного конвективного движения, увеличивающего отвод тепла из реагирующей жидкости. Однако для изучения процессов в этой области параметров необходимо решение полных нелинейных уравнений конвекции (1.1).



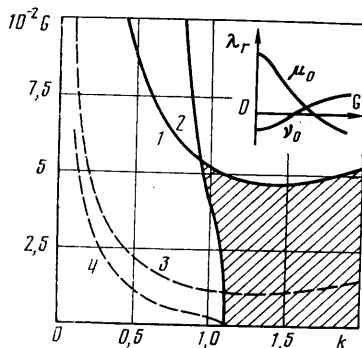
Фиг. 1



Фиг. 2

В противоположном случае слабого тепловыделения (малые значения параметра Франк-Каменецкого) кривые $G_m(\text{FK})$ уходят на бесконечность: предел $\text{FK}=0$ соответствует устойчивому состоянию — изотермическая жидкость без химической реакции.

Учет параметра β приводит лишь к незначительным количественным изменениям критического числа, особенно если параметр Франк-Каменецкого значительно меньше FK_* . Таким образом, для реальных значений параметра β его влияние на устойчивость второстепенно.



Фиг. 3

Как уже отмечалось, стационарная задача (2.1) при фиксированных значениях параметров может иметь не одно решение. В частности, для выбранной на фиг. 1 комбинации $\text{FK}=0,8$ и $\beta=0$ возможно еще и второе решение с большей температурой в слое. Границы устойчивости этого стационарного режима представлены на фиг. 3. Кривая 1 аналогична границе устойчивости для низкотемпературного решения. Кроме того, появляется еще дополнительная кривая 2, связанная с тепловыми возмущениями; область неустойчивости расположена левее этой кривой (суммарная область устойчивости показана на фиг. 3 штриховкой). Как видно, второе решение оказывается неустойчивым относительно длинноволновых возмущений при любых значениях G .

Следует отметить, что появление новой границы устойчивости 2 связано с нижним тепловым уровнем спектра v_0 , который для первого решения всегда положителен и к неустойчивости не приводит. Для второго стационарного режима до $k \approx 1,1$ при малых значениях числа Грасгофа декремент оказывается отрицательным. С ростом G кривая $\lambda_r(G)$ прохо-

дит через ноль (вид нижних уровней спектра изображен схематически на вставке к фиг. 3), тем самым давая точку на нейтральной кривой 2. Граница 1, как и для низкотемпературного решения, образована нижним гидродинамическим уровнем μ_0 . Рассмотренные графики относились к случаю $P=0,5$. Положение границ устойчивости второго решения существенно зависит от числа Прандтля. Для примера на фиг. 3 пунктиром показаны аналогичные кривые 3 и 4 для $P=5$.

Автор выражает благодарность Е. М. Жуховицкому за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремин Е. А. О гидродинамической устойчивости стационарного плоскопараллельного конвективного движения реагирующей жидкости. — В кн.: Конвективные течения. Пермь, 1981, с. 52–61.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость. — В кн.: Механика жидкости и газа. Т. 11. М., 1978, с. 66–154 (Итоги науки и техники. ВИНТИ).
3. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967. 490 с.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Якимов А. А. Об устойчивости стационарного конвективного движения, вызванного внутренними источниками тепла. — ПММ, 1970, т. 34, вып. 4, с. 700–705.
5. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Якимов А. А. О двух типах неустойчивости стационарного конвективного движения, вызванного внутренними источниками тепла. — ПММ, 1973, т. 37, вып. 3, с. 564–568.
6. Shouman A. R., Donaldson A. B., Tsao H. Y. Exact solution to the one-dimensional stationary energy equation for a selfheating slab. — Combustion and Flame, 1974, v. 23, № 1, p. 17–28.
7. Gill W., Donaldson A. B. The Frank-Kamenetskii problem revisited. Pt 1. Boundary conditions of first kind. — Combustion and Flame, 1979, v. 36, № 3, p. 217–232.
8. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
9. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.

Пермь

Поступила в редакцию
3.XI.1981